ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1885-1886

(nono anno)

PORTO
Typographia Occidental
66, Rua da Fabrica, 66

1886

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

A. Boulard fils del. et sc. Imp. A. Clément, Paris.

Dr WENCESLAU LIMA.

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1885-1886

(nono anno)

PORTO
Typographia Occidental
66, Rua da Fabrica, 66

1885

I

DISCURSO DE ABERTURA

DISCURSO DE ABERTURA SOLEMNE

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

RECITADO PELO DIRECTOR INTERINO
DA MESMA ACADEMIA

NA SESSÃO PUBLICA DE DISTRIBUIÇÃO DOS PREMIOS AOS ALUMNOS
DO CURSO DE 1884-1885, EM 20 DE OUTUBRO DE 1885

SENHORES!

COSTUMADO já á condescendente benevolencia que me tendes dispensado nos annos anteriores, ouso ainda, abusando d'ella, e vindo inaugurar, como me cumpre, o novo anno lectivo de 1885 a 1886, relatar-vos os principaes successos d'esta Academia durante o anno findo, especialisando, com muito jubilo, as importantes reformas pelas quaes acaba de passar em virtude da creação de novas cadeiras e da reorganisação dos seus cursos, que (com sentimento o digo) posto que professados com esmero e inexcedivel zelo e esforço dos respectivos Lentes, ainda estavam áquem do nosso desejo e da imperiosa necessidade de os ampliar, pondo-os a par de identicos professados

em outras Academias: e tambem, tendo a honra de conferir os premios a nossos distinctissimos alumnos, fazer apregoar bem alto os nomes d'esta *élite* de nossos mais notaveis ouvintes, o que tudo passo a fazer.

E', sem discussão, o facto mais memoravel acontecido n'esta Academia, e tambem o mais importante desde a sua transformação em Polytechnica, o que nos accusa a carta de Lei de 21 de Junho e Decreto de 10 de Setembro do corrente anno; e por isto mesmo, attendendo á sua transcendencia para este estabelecimento, por elle principio esta minha exposição.

Com effeito, a organisação d'esta Academia era até agora, no meio da nossa instrucção superior, uma verdadeira anomalia: nenhum estabelecimento carecia tanto de uma remodelação nos seus quadros. A reforma de 13 de Janeiro de 1837, que foi um agigantado passo no progresso da instrucção nacional, accusa bem claramente inexperiencia, que o conselho academico de então bem conheceu, e assim o fez notar no relatorio que acompanha os programmas por elle elaborados em 1838, como eu já observei d'este lugar (1); mas que o mesmo conselho esperava vêr remediada com o tempo, prática dos programmas, augmento de numero dos professores, e desenvolvimento das obras para se montarem os differentes laboratorios e officinas; porque bem sabia elle que reunir em um só estabelecimento e sobre tudo nas mesmas

(1) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto,* anno de 1881-1882, pag. 17; *Idem,* anno de 1879-1880, pag. 168.

prelecções o ensino industrial de todos os graus, para formar engenheiros, preparar agricultores, artistas, directores de fabricas, pilotos, etc., era pretender o impossivel, e mui especialmente com o limitado numero de cadeiras que então existiam. Com effeito, quem poderia dizer que se formassem engenheiros de pontes e estradas, sem uma cadeira especial de Construcções? Como engenheiros de minas, sem cadeiras especiaes para Mineralogia, Geologia, Montanistica e Docimasia?

Apesar de (como já tenho exposto em relatorios dos annos (1) anteriores) repetidas sollicitações do Conselho Academico, consultas do Conselho Geral d'Instrucção Publica, supplicas da Junta Geral do Districto e do Director litterario d'esta corporação, e de verdadeiras dedicações de muitos que desejavam vêr prosperar esta Academia, entre as quaes notarei o já fallecido snr. Joaquim Torquato Alvares Ribeiro, lente d'esta Academia e a quem se devem relevantes serviços; apesar, em fim, do accordo combinado com o fallecido snr. doutor José Maria d'Abreu, membro do Conselho Geral d'Instrucção Publica, que, na qualidade de delegado do dito Conselho, veio ao Porto, em 1864, inspeccionar a Academia,—apenas por Decreto de 31 de Dezembro de 1868 (2) era dada á

---

(1) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno de 1881-1882, pag. 22.

(2) O Decreto de 31 de Dezembro de 1868, obra do então director geral de Instrucção Publica, conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado, lente da Academia, creava tambem a cadeira de chimica organica, que, por não se achar provida, foi supprimida pela Lei de 2 de Setembro de 1869.

Academia a cadeira de Mechanica; e em 1857, a de Economia politica e Direito administrativo. (1)

Compenetrado d'estas verdades, o nosso mui digno collega, o snr. Dr. Wenceslau de Lima, tomou sobre si a pesada tarefa de, chamando a attenção dos poderes publicos para este estabelecimento, concorrer para que o ensino aqui professado não desdissesse da importancia dos cursos a que elle prepara. E assim o conseguiu.

E' a este nosso distincto collega que, como Deputado ás cortes da Nação, se deve a iniciativa do projecto, que foi convertido na Lei de 14 de Junho de 1883 (2), bem como o augmento da dotação (3) dos estabelecimentos academicos. A este nosso collega se deve tambem o projecto de lei a que se associaram os snrs. deputados Corrêa de Barros e Albino Montenegro, e que foi convertido na Carta de Lei de 21 de Julho do corrente anno, Lei que desdobrando as antigas cadeiras 3.ª, 6.ª, 9.ª e a 13.ª na qual se preleccionava a Mechanica applicada e as Construcções publicas, creou novas cadeiras que vão ser destinadas ao ensino da Geometria descriptiva, da Docimasia e Montanistica, da Chimica organica e analytica, e dos diver-

---

(1) O projecto de lei para a creação d'esta cadeira foi de José da Silva Passos (*Diario da Camara dos deputados*, sessão legislativa de 1857, pag. 127). A respectiva carta de lei tem a data de 15 de Julho de 1857.

(2) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1883-1884, pag. 10 e 11. (*Diario da Camara dos Senhores deputados*, sessão legislativa de 1883, pag. 1110 e 1111, 1121 e 1122; pag. 1449).

(3) *Idem*, pag. 15. (*Diario da Camara dos Senhores deputados*, sessão legislativa de 1883, pag. 1109-1111; e pag. 1383 e 1386).

sos ramos da sciencia do Engenheiro, disciplinas que até agora só muito incompletamente podiam ser desenvolvidas. (1)

Não me parece necessario demonstrar a importancia d'este serviço que o snr. Dr. Wenceslau de Lima, com uma dedicação que não póde ser excedida, prestou a esta Academia, serviço que tambem satisfez as aspirações do Conselho Academico, por tantas vezes manifestadas perante os poderes publicos sem que jámais alcançassem ser attendidas.

E' esta uma nova phase, por que este estabelecimento acaba de passar e que promette os mais brilhantes fructos. Basta, para os avaliar, confrontar a actual organisação dos estudos e cursos academicos sanccionada pelo Decreto de 10 de Setembro ultimo, com a organisação dos programmas dos estudos anteriores á Lei de 21 de Julho, e notar-se-ha que o ensino do Engenheiro d'obras publicas e de minas póde hoje soffrer comparação com os analogos em escólas estrangeiras, e em particular, com as technicas do Brasil e da Belgica.

Uma das consequencias de tão importante reforma foi o ser levantado n'este anno o como que interdicto que, na phrase do digno par do Reino snr. Henrique de Macedo, pesava desde 1873 sobre esta Academia, no tocante a um dos fins que o Decreto de 20 de Setembro de 1844 lhe attribuia, e pela realisação do qual innumeras vezes tinha instado o Conselho

(1) *Diario da Camara dos Senhores deputados*, sessão legislativa de 1885, pag. 884-885.

escolar. Refiro-me ao curso preparatorio para as armas especiaes e estado maior, que até agora estava deserto na Academia, por entenderem os poderes publicos que as condições de ensino na Academia não podiam equiparar-se ás dos outros estabelecimentos que forneciam o mesmo ensino preparatorio. O aviso do Ministerio da Guerra de 29 de Setembro ultimo, publicado no *Diario do Governo* de 30 do mesmo mez, acabou, como era justo, com uma desigualdade que até agora pesava sobre a Academia, estabelecendo que os alumnos que seguem a carreira das armas podem requerer para frequentar o curso preparatorio na Academia com as mesmas garantias e vantagens que na Escóla Polytechnica ou na Universidade. Elemento é este de engrandecimento para esta cidade e das maiores vantagens para as familias d'esta zona do nosso paiz. E com prazer o digo, já se acham matriculados, com a competente licença do Ministerio da Guerra, diversos alumnos no dito curso.

Melhoramentos tão importantes, e que debalde procuraram alcançar para esta Academia illustres campeões do bom credito d'ella e zelosos professores, promovidos agora e levados a effeito por um só Lente, que, apenas ha tres annos, este Conselho, em hora feliz, acolheu em seu seio com unanime applauso, com a mais rigorosa justiça exigiam para o seu promotor uma distincção especial da parte do Conselho, que cumpriu este dever de um modo bem significativo; e o galardão que lhe conferiu deve merecer-lhe toda a consideração, por ser o unico nos annaes d'esta Academia. Esta corporação deliberou abrir uma excepção

na lista das homenagens, que em vida dispensa aos benemeritos professores d'esta casa, e não só resolveu, que se lhe enviasse uma mensagem d'agradecimento e louvor por tão relevantes serviços, como tambem que fosse collocado o seu retrato n'esta sala nobre, na galeria dos illustres professores que aqui vedes, bem como ahi se nota o do eloquente e venerando tribuno Manoel da Silva Passos, que referendou o Decreto de 13 de Janeiro de 1837. Era justo que n'este local, onde se encontram as effigies do snr. D. João 6.º, que fundou a Academia de Marinha e Commercio do Porto, e do insigne Passos Manoel, que referendou o Decreto da reforma da mesma, dando-lhe o amplo nome de Polytechnica, existisse tambem o retrato do snr. Dr. Wenceslau de Lima, que fez passar este estabelecimento por uma nova e mais completa phase.

Eu tenho um indizivel prazer em inaugurar em sessão tão solemne esse retrato, devido a um brilhante e inspirado pincel (1), e de associar a minha pobre palavra á honrosissima manifestação de que, em sessão do Conselho de 9 do mez de Junho do findo anno lectivo, foi alvo o dito snr. Dr. Wenceslau de Lima.

Se, como representante da nação, este nosso respeitavel collega merece os nossos calorosos e francos applausos, não os merece menores pela sollicitude com que, na qualidade de membro da secção perma-

---

(1) João Antonio Corrêa, actual director e professor da *Academia Portuense de Bellas-artes.*

nente do Conselho Superior d'Instrucção Publica, para que foi nomeado por Decreto de 19 de Junho de 1884, tem sabido zelar os interesses da Academia, chamando em favor d'ella a protecção official.

Foi a Academia favorecida pela nomeação de um de seus membros para vogal d'aquelle Conselho; e do que aqui tenho exposto, bem póde colligir todo o espirito, que imparcialmente estudar os factos, que a escolha d'este nosso collega para tão importante lugar foi acertadissima, e honrosa e util para esta Academia.

Determinando a Lei de 21 de Julho d'este anno, no § 1.º do Artigo 1.º, que o Conselho procedesse immediatamente á revisão dos programmas dos cursos legaes da Academia, ordenando e distribuindo as suas materias pelas 18 cadeiras, que ficam constituindo o seu quadro, para serem postos em vigor no anno corrente, o Conselho, em suas sessões de 29 e 30 de Julho, larga e detidamente se occupou d'este assumpto, depois de lhe ser presente o relatorio da commissão *ad hoc* nomeada, composta dos lentes os snrs. Conselheiro Adriano Machado, Ferreira da Silva, Roberto Mendes, Gomes Teixeira e Guilherme Corrêa. Foram d'este modo approvados não só os programmas em geral das cadeiras, como os dos cursos da Academia, que subiram logo á sancção régia, e que o Decreto de 10 de Setembro de 1885 approvou e manda cumprir.

O Conselho não se poupou a esforços para que o seu trabalho merecesse a approvação superior, e devo aqui consignar a actividade e zelo que a commissão

e conselho empregaram para realisar, em tão limitado tempo, tão importante fim.

Em face da nova ordenação das disciplinas pelas cadeiras, teve o Conselho de fazer a distribuição d'ellas pelos lentes proprietarios que contava, e propoz o snr. Gonçalves, que havia ha pouco sido promovido a substituto das cadeiras da secção de Philosophia, para reger, como proprietario, a cadeira de Zoologia; passando o snr. Dr. Arroyo para a cadeira de Chimica inorganica, e ficando a cargo do snr. Ferreira da Silva o ensino de Chimica Organica e de Chimica Analytica, disciplinas que desinteressadamente havia regido com auctorisação superior (1) no decurso dos dois ultimos annos, accumulando a regencia d'esta cadeira, agora creada, com a de Chimica Inorganica, relevantissimo serviço prestado á Academia, pelo qual foi louvado (2), como d'aqui declarei no anno anterior. Os decretos de 14 de Agosto (3) e 23 de Setembro (4) sanccionaram aquellas propostas.

Ficando vagas quatro cadeiras (Geometria descriptiva, Astronomia e Geodesia, Construcções e vias de communicação, Montanistica e Docimasia), o Conselho, em conformidade com o Decreto de 25

---

(1) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno de 1884-1885, pag. 12 a 13.

(2) *Idem*, anno de 1883-1884, pag. 317.

(3) Este decreto vem publicado no *Diario do Governo*, n.º 184, de 20 de Agosto de 1885, e refere-se aos lentes Arroyo e Gonçalves.

(4) Este decreto acha-se publicado no *Diario do Governo*, n.º 255, de 11 de Novembro de 1885, o refere-se á collocação pelas novas cadeiras dos restantes lentes da Academia.

d'Agosto de 1865, organisou os programmas para estes novos concursos, que foram approvados e publicados no *Diario do Governo* de 17 d'Agosto do corrente anno, tendo por isso terminado já o praso para a apresentação dos candidatos; pois que esse praso é de 60 dias.

Ficam vagas as substituições de philosophia e materias, cujos programmas serão organisados pelo conselho.

Tambem em 30 de Julho foram remettidos ás estações competentes os programmas desenvolvidos das dezoito cadeiras da Academia, conforme o disposto no § unico do Art. 27.º do regulamento de 18 de Novembro de 1884, Circular de 10 de Junho de 1885 e Officio da Direcção geral d'instrucção publica de 20 de Junho do mesmo anno.

Uma commissão nomeada em 30 de Julho, e composta dos lentes os snrs. Drs. Ferreira da Silva, Gomes Teixeira e Wodhouse tem-se occupado do estudo do regulamento para os serviços academicos e do horario para o anno lectivo que vai principiar, estudo este que, affecto agora ao Conselho, está sendo discutido por elle em sessões diarias.

Por officio da Direcção geral d'instrucção publica em data de 20 de Janeiro do corrente anno foi pedida ao Conselho academico sua consulta ácerca das ultimas resoluções tomadas na segunda reunião da conferencia internacional dos electricistas, que se effectuou

em Paris em 28 d'Abril e em 3 de Maio do anno passado, das quaes umas diziam respeito ás unidades electricas propriamente ditas, outras ás correntes electricas e aos para-raios, e ainda outras á determinação de um padrão definitivo de luz.

Foi a secção de Philosophia encarregada pelo Conselho de apresentar o referido parecer, do qual foi relator o snr. Dr. Adriano Paiva, cuja competencia para tão delicados assumptos é bem reconhecida, quer entre nós, quer fóra do nosso paiz. A commissão concluiu por dizer que «das deliberações na dita conferencia tomadas, havia umas, que são votos exprimindo a necessidade e conveniencia de certos trabalhos a effectuar, e outras que apresentam resultados definitivos, como são as que tem por fim fornecer ás sciencias physicas as suas novas unidades, o Ohm legal e o padrão definitivo da luz; e que ha grande vantagem, industrial e scientifica, em que estas deliberações recebam em breve a sancção official de que carecem».

Regulamentos que prescrevam claramente os deveres e encargos dos empregados subalternos nos estabelecimentos academicos, são necessarios e essenciaes para o bom regimen d'estes estabelecimentos. No Laboratorio chimico, com especialidade, fazia-se sentir esta necessidade; porque as demonstrações essenciaes ás lições, os trabalhos dos alumnos no laboratorio, as investigações e estudos do Director, e os trabalhos analyticos, que lhe são confiados, quer pelas auctoridades, quer por particulares, constituem serviços variados, para regular execução dos quaes é ne-

cessario indicar ao pessoal normas precisas, de modo a evitar descuidos e coarctar tendencias para lamentaveis abusos.

N'este sentido e para este fim, foi elaborado e apresentado ao conselho pelo snr. Ferreira da Silva um projecto de regulamento, que tendo sido approvado, primeiro pela secção de Philosophia e depois pelo Conselho, fiz subir ás competentes estações superiores para, nos termos do disposto no § 9.º da carta de Lei de 12 d'Agosto de 1854, ser devidamente approvado, como effectivamente o foi por portaria de 30 de Janeiro do corrente anno, regulamento que, interinamente se havia posto em vigor, como vos disse no anno anterior. (1)

Entre outras providencias salutares, consigna-se n'este regulamento a creação definitiva de um curso de Chimica prática, que, conforme o Art. 9.º do mesmo regulamento, terá de ser regulado pelo Conselho.

De ha annos já que os alumnos da cadeira de Chimica praticavam por turno varios exercicios e preparações no laboratorio; muitos d'élles, como o informa o lente respectivo, mostravam grande aproveitamento e aptidão para taes trabalhos. O que se faz agora é o complemento d'estas salutares disposições, para que os alumnos tenham uma instrucção sufficientemente completa: — tornar obrigatorios esses exercicios práticos, consagrando a elles certo numero de horas por

(1) O regulamento foi publicado no *Diario do Governo*, n.º 26, de 4 de Fevereiro de 1885.

semana, a exemplo do que se pratica em escólas estrangeiras de consideração.

A todos que ensinam sciencias experimentaes tem já chegado a convicção de que, se as demonstrações feitas na aula pelo professor são uteis, por prenderem a attenção dos alumnos, e lhes fazerem melhor comprehender os principios da sciencia,—comtudo, a sua utilidade é menor do que geralmente se acredita, se os proprios alumnos não curarem de ir verificando os resultados mais importantes. O estudo prático nos laboratorios em chimica é o meio unico de crear verdadeiros adeptos, que pódem depois prestar valiosos serviços á sciencia e ás artes. Hoje esse ensino acha-se sanccionado para diversas cadeiras, pelo Decreto de 20 de Setembro de 1885.

Na bibliotheca da Academia houve, no anno findo, varias e importantes acquisições de livros scientificos, uns obtidos por compra, e outros por offertas; os quaes todos deverão talvez ser descriptos no annuario correspondente ao presente anno lectivo.

Além de 130 volumes que foram legados á bibliotheca pelo fallecido Dr. em Philosophia, o Reverendo snr. conego João José de Vasconcellos, lente que havia sido d'esta Academia; receberam-se mais 232 volumes, offerecidos pelo mui distincto lente da Escóla Polytechnica do Rio de Janeiro, o snr. Dr. Luiz Raphael Vieira Souto, illustre professor, que já por differentes vezes tem patenteado a esta Academia um vivo interesse. E já que fallei n'esta escóla do Imperio brazileiro, onde abundam, entre seus professores,

brilhantes e abalisados talentos, cumpre-me dizer que esta escóla é muito semilhante á nossa Academia, porque n'ella se preparam candidatos para as carreiras de engenharia civil, de minas e d'artes e manufacturas. É, por isso, de toda a conveniencia estreitar os laços entre estes dous institutos, tão irmãos nos seus fins.

O Conselho academico recebeo com vivo agrado a importante offerta, e deliberou que desta resolução se désse conhecimento official ao offertante, o snr. Dr. Luiz Rafael Vieira Souto, o que gostosamente cumpri.

A commissão das obras d'esta Academia tem sido sollicita em promover, dentro da orbita das suas attribuições, os melhoramentos materiaes no edificio. Foram realisados alguns (1), e estão sendo realisados outros (2), como consta das actas respectivas. E' certo, porem, que se torna necessario dar um desenvolvimento mais amplo ás obras da continuação do edificio, que, tal como se acha, é insufficiente e improprio para os fins a que deve ser destinado.

A commissão representou ao governo n'esse sentido, fazendo ver quam urgente se torna dar prompta solução á questão de remover o collegio dos orfãos para local apropriado, afim de que as obras possam progredir. Um facto veio tornar palpavel esta necessidade: a unica communicação regular que havia entre a parte N. e S. do edificio teve de ser demolida, quasi na totalidade, por ameaçar ruina (3).

---

(1) O augmento de estantes para accommodação de livros na bibliotheca.

(2) Renovação dos telhados do edificio e a reparação exterior da fachada leste.

(3) Veja-se: a acta da sessão da commissão das obras, de 14 de Fevereiro de 1885; e officios da presidencia da commissão de 20 e 27 de Fevereiro e 3 de Março de 1885.

E' certo que a lei de 19 de junho de 1880 permitte aproveitar as dotações annuaes das obras á expropriação das lojas existentes nos baixos da Academia; mas, d'este modo, seria bem morosa a conclusão de um edificio que tão urgente é ampliar.

E, a proposito, devo dizer que tambem n'este anno foram entaboladas, por approvação do governo, as primeiras negociações para pôr em pratica a disposição consignada no artigo da dita carta de lei. Assim é, que confio em que, no decurso do corrente anno lectivo, possa já a Academia dispôr das novas dependencias para as suas aulas e gabinetes, aproveitando as lojas situadas do lado da rua do Anjo e do Campo dos Martyres da Patria (1), occupadas até agora por diversos inquilinos.

O conselho, com o mui louvavel fim de apressar a desejada continuação e acabamento d'este edificio do Paço dos Estudos, deliberou nomear uma commissão, que ficou composta da das obras, podendo aggregar a si as pessoas que julgasse convenientes, para de novo estudar o projecto organisado pela commissão nomeada por Portaria de 31 de dezembro de 1860, e apontado as leves alterações, que porventura seja necessario fazer-lhe, apresentar, em desenvolvido relatorio, as vantagens geraes que adviriam da execução do referido projecto. Deliberou mais que este relatorio, discutido detidamente pelo conselho e

---

(1) O contracto provisorio celebrado em 14 de julho do corrente anno entre a directoria da Academia e a Exc.ma Camara versa sobre a expropriação das lojas 1, 2, 3, 5 e 6, 7, 8 e 9 do lado da rua do Anjo. — E pretende-se tambem expropriar a loja n.º 4 da mesma rua, e as n.os 93 e 94 do Campo dos Martyres da Patria.

illustrado com as competentes plantas, deverá ser publicado e profusamente distribuido, sendo enviado aos poderes publicos, acompanhado da competente representação do conselho.

E' assumpto importante este. O edificio concluido serviria certamente para a installação conveniente, não só da Academia e do Instituto industrial, como tambem da Escóla de Bellas-artes e do Museu industrial, os quaes ambos carecem de novos locaes, accrescendo a vantagem de que o ultimo d'estes estabelecimentos se encontraria perto das tres escolas profissionaes existentes no Porto.

E' de esperar que a commissão dê conta em breve dos seus trabalhos. Realisar o pensamento da commissão, seria completar a obra dos aperfeiçoamentos scientificos pelos quaes a Academia acaba de passar.

Os annuarios d'esta Academia têem continuado a ser publicados, e a merecer bom acolhimento tanto da imprensa, como das pessoas que zelam a causa da instrucção publica.

Têem n'elle sido publicados documentos importantes para a historia d'este estabelecimento, não deixando eu de mencionar aqui a preciosa *memoria historica*, publicada no primeiro anno da apparição do dito annuario, devida á penna do nosso erudito collega, o snr. conselheiro Adriano Machado.

Nos annuarios se encontra colligido importante cabedal de legislação academica, em grande parte devida ao nosso collega o snr. Lobo, ao qual o conselho manifestou, por tal motivo, seu reconhecimento.

Observam-se tambem as biographias e os retratos de varios lentes que foram d'esta Academia, fazendo-se-lhes por este modo, commemoração honrosa e devida á memoria d'elles.

Ultimamente, por proposta do mui distincto vogal do conselho, o snr. Dr. Gomes Teixeira, resolveu-se que no annuario haja uma secção scientifica, e n'essa secção se insiram producções scientificas de qualquer professor da Academia, que queira expôr as suas ideias ácerca de qualquer ponto de sciencia.

Foi inaugurada esta nova parte do annuario, no do anno anterior, pelo mesmo proponente, com a publicação dos seus *Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal.*

E' este trabalho mais uma prova do brilhante talento mathematico do seu auctor, o snr. Dr. Gomes Teixeira, e de todo o lustre, que a sciencia no nosso paiz tem recebido e mais espera receber dos transcendentes trabalhos de tão abalisado professor, com os quaes tem attrahido a attenção dos mathematicos mais distinctos de diversos paizes.

Por occasião da visita a esta cidade dos distinctos officiaes d'armada, Hermenegildo Capello e Roberto Ivens, que tão alto acabam de levantar o nome portuguez, entendi ser de rigoroso dever prestar a estes benemeritos as homenagens da Academia Polytechnica. Esta achava-se representada na recepção que lhe foi feita, além da Direcção e do snr. Doutor secretario, pelos snrs. Drs. Ferreira da Silva e Arroyo.

Não cansarei mais, senhores, a vossa paciencia, e agradecendo-vos a benevolencia com que vos dignastes ouvir-me, peço-vos ainda a distincta mercê de assistirdes á solemnidade da distribuição dos premios a nossos distinctos ouvintes, aos quaes não preciso de estimular no estudo, porque bem sabem elles quaes os vivificantes fructos que a sciencia sóe dar a quem a procura cultivar.

Snrs. premiados. Por mim e em nome do conselho eu vos felicito, e passo a distribuir-vos os bem merecidos titulos do vosso merito scientifico.

DISSE

II

ORGANISAÇÃO

IDEIA GERAL DA ORGANISAÇÃO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

---

§ 1

Cursos legaes da Academia Polytechnica

Os cursos legaes da Academia Polytechnica são uns *especiaes*, outros *preparatorios*.

Os cursos especiaes são: — 1. Curso de *engenheiros civis;* 2. Curso de *commercio*. As cathegorias de engenheiros civis da Academia são tres: engenheiros civis de obras publicas, engenheiros civis de minas e engenheiros civis industriaes.

Os cursos preparatorios são: para a Escóla do Exercito; para a Escóla Naval; para as Escólas Medico-Cirurgicas; para a Escóla de Pharmacia nas Escólas Medico-Cirurgicas. Os cursos preparatorios para a Escóla do Exercito são: um para officiaes de estado maior e de engenheria militar, e para engenheria civil; o outro para officiaes de artilheria. Tambem são dous os cursos preparatorios para a Escóla Naval: um para officiaes de marinha, e outro para engenheiros constructores navaes.

O quadro actual dos cursos academicos e a organisação de cada um d'elles foram determinados pelo decreto de 10 de Setembro de 1885, para execução da carta de lei de 21 de Julho do mesmo anno.

Pelo decreto de 20 de Setembro de 1844, artigo 140.°, a Academia ficava tendo a faculdade de fornecer o ensino preparatorio para a Escóla do Exercito. Mas só n'este anno de 1885-1886, depois da reforma determinada pela carta de lei

e decretos já referidos, e como consequencia d'elles, é que foram concedidas licenças aos militares para aqui frequentarem esse curso. Foi o aviso do ministerio da guerra de 29 de setembro, publicado no *Diario do Governo*, n.° 219, de 30 de Setembro de 1885, que assim o determinou. Esse aviso é do theor seguinte:

«De ordem de s. exc.ª o ministro da guerra se declara que, em virtude do disposto no decreto de 10 do presente mez, os candidatos a alumnos dos cursos preparatorios para as armas especiaes e corpo de estado-maior, a que se refere o decreto de 26 de agosto ultimo, podem solicitar o irem estudar o curso preparatorio para as referidas armas na Academia Polytechnica do Porto, tornando-se-lhes extensivas as vantagens e obrigações que, pela legislação em vigor, são applicadas aos alumnos militares que frequentam a Universidade de Coimbra e a Escola Polytechnica.» (1)

---

(1) O Decreto de 26 d'Agosto a que se refere este aviso é do theor seguinte:

«*Secretaria d'estado dos negocios da guerra — Direcção geral—3.ª Repartição.* — Hei por bem determinar, em conformidade com o disposto no artigo 31.° do decreto com força de lei de 24 de dezembro de 1863, que no anno lectivo de 1885-1886 não sejam admittidas á matricula na universidade de Coimbra e na escola polytechnica mais de 8 praças do exercito com destino ás armas especiaes e corpo do estado maior; e bem assim que na escola do exercito não sejam admittidas á matricula com destino para as armas de cavallaria e infanteria mais de 30 praças, sendo 5 para o curso de cavallaria e 25 para o de infanteria. Quando o numero dos pretendentes para qualquer das armas, ficando comprehendido no numero dos que se destinam ás armas de cavallaria e infanteria os candidatos a que se refere o § 2.° do citado artigo 31.°, for superior ao que fica designado, deverá verificar-se então o concurso de que trata o § 1.° do mesmo artigo, o qual será documental e feito perante um jury nomeado pelo conselho de instrucção da escola do exercito.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios da guerra, encarregado interinamente dos negocios das obras publicas, commercio e industria, assim o tenha entendido e faça executar. Paço, em 26 de agosto de 1885. — REI. — *Antonio Maria de Fontes Pereira de Mello.*»

Ao mesmo assumpto se refere o seguinte aviso do ministerio da Guerra, publicado na ordem do Exercito, n.° 18, de 31 de agosto de 1885:

Nos termos do Decreto de 18 de novembro de 1885, artigo 14, n.º 6, o curso de engenheria de obras publicas da Academia é habilitação para a entrada no quadro de engenheria d'obras publicas, como aspirante a engenheiro d'obras publicas. O curso de minas é, nos termos do artigo 15, n.º 2.º, habilitação para a entrada no quadro da secção de engenheria de minas, como engenheiro aspirante.

§ 2

Começo e fim do anno lectivo

O anno escolar começa no 1.º de outubro de 1885 e termina em 31 de julho de 1886.

Desde o dia 5 até 12 de outubro effectuaram-se os exames dos alumnos repetentes e licenceados. A abertura solemne da Academia celebrou-se no dia 20. As aulas abriram no dia 9 de novembro.

«*9.ª — Secretaria d'estado dos negocios da guerra — Direcção geral — 3.ª Repartição.* — Em conformidade com o disposto nos decretos de 24 de dezembro de 1863 e 26 do presente mez, e do regulamento provisorio da escola do exercito, decretado em 26 de outubro de 1864: declara-se que os requerimentos das praças do exercito, que pertenderem matricular-se nos cursos preparatorios das armas especiaes e corpo do estado maior ou no curso de cavallaria ou de infanteria, deverão, pelas vias competentes, dar entrada na referida secretaria d'estado até ao dia 30 do proximo mez de setembro, documentados com as certidões litterarias exigidas no decreto de 24 de dezembro de 1863; devendo cada um dos referidos requerimentos ser acompanhado do mappa modelo B, a que se refere a portaria de 11 de setembro de 1865, inserta na ordem do exercito n.º 40 do referido anno. Outrosim se declara que os individuos pertencentes á classe civil, tendo menos de vinte annos de idade no dia 25 de outubro, que pretenderem, como militares, ser admittidos á matricula nos referidos cursos, devem requerer, juntando ao seu requerimento não só os documentos litterarios exigidos para a matricula no curso para que se destinam, mas tambem a sua certidão de idade e de registo criminal, devendo os seus requerimentos dar entrada até ao referido dia 30 na supradita secretaria d'estado.»

§ 3

Condições de admissão dos alumnos

As condições de admissão dos alumnos no corrente anno lectivo constam do edital da Directoria, com data de 22 de Setembro. N'elle se diz:

«Os estudantes que pretenderem matricular-se devem lançar na caixa que está no corredor de entrada da secretaria, até o dia 5 de Outubro proximo futuro, os seus requerimentos datados, assignados e competentemente documentados, declarando-se n'elles a naturalidade (freguesia e concelho), filiação paterna, edade, e os cursos que desejam seg. .

«Os documentos devem vir reconhecidos por tabelliães d'esta cidade.

«Os alumnos que pretenderem, no proximo anno lectivo de 1885-1886, ser admittidos á primeira matricula nos cursos especiaes e no preparatorio para a Escóla do Exercito, devem apresentar certidões de approvação nas seguintes disciplinas, ou nas equivalentes, segundo a legislação anterior (Decreto de 14 de Outubro de 1880):

1. Lingua portugueza (1.ª e 2.ª partes).

2. Lingua franceza (1.ª e 2.ª partes).

3. Arithmetica, geometria plana, principios de algebra e escripturação (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).

4. Algebra, geometria no espaço e trigonometria (1.ª e 2.ª partes).

5. Elementos de physica, chimica e introducção á historia natural (1.ª e 2.ª partes).

6. Desenho (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).

7. Litteratura nacional (1.ª e 2.ª partes).

8. Lingua latina (1.ª e 2.ª partes).

9. Philosophia racional e moral e principios de direito natural (1.ª parte).

10. Geographia e cosmographia, historia universal e patria (1.ª e 2.ª partes).

11. Elementos de legislação civil, de direito publico e administrativo portuguez e de economia politica.

« Os alumnos que, segundo a legislação vigente, pretendam matricular-se como voluntarios são admittidos á matricula, apresentando certidões de approvação nas seis primeiras disciplinas acima mencionadas. Aos alumnos do curso preparatorio para a escóla de pharmacia nas Escólas Medico-Cirurgicas não são exigidas as certidões de approvação em algebra, geometria no espaço e trigonometria, nem a de desenho.»

Os alumnos militares que pretendem frequentar o curso preparatorio, precisam requerer ao Ministerio da Guerra a respectiva licença no praso marcado no Decreto publicado todos os annos em [illegible]em do Exercito.

§ 4

Classes de alumnos

No presente anno lectivo foi adoptada a divisão dos alumnos em *ordinarios e voluntarios*, nos termos do Decreto de 30 de Abril de 1863.

Os alumnos ordinarios seguem os cursos pela ordem estabelecida nos programmas legaes, estudando em cada anno lectivo todas e tão sómente as disciplinas que constituem um anno de cada curso, e mostrando-se habilitados com a approvação das disciplinas do anno anterior.

Os alumnos voluntarios seguem no estudo das disciplinas a ordem que lhes convém.

Todos os alumnos são externos.

Os alumnos civis não tem uniforme, nem qualquer signal distinctivo.

Os alumnos militares, praças de pret, que frequentam na Academia o curso preparatorio para a Escóla do Exercito usam, conforme o determinado na Ordem do exercito n.º 9 de 1878, como distinctivo, de estrellas de metal dourado, com as di-

mensões e fórma do modelo adjuncto a esta ordem, sobre os braços, a 10 cent. abaixo da costura do pregado da manga, dividindo-se por egual a distancia entre as costuras longitudinaes.

§ 5

Dos exercicios scientificos

Os exercicios scientificos nos diversos cursos da Academia são theoricos e praticos. (1)

A instrucção theorica constava até agora de lições, recordações ou repetições, dissertações, e problemas por escripto.

A instrucção pratica abrange os exercicios praticos em algumas cadeiras, particularmente os trabalhos praticos do laboratorio chimico; e, segundo o disposto no Decreto de 10 de setembro ultimo, deve comprehender os exercicios de geometria descriptiva, os projectos relativos a construcções, machinas, montanistica, physica e chimica industriaes; a physica e a chimica praticas, etc.; as missões, as excursões geologicas.

Em quasi todas as aulas as lições são feitas á face de um texto, previamente approvado pelo conselho academico, e pelo conselho superior de Instrucção publica. (Carta de lei de 23 de Maio de 1884, artigo 2.º; e Decreto de 18 de Novembro de 1884, art. 27.º). Os lentes interrogam regularmente os alumnos sobre as materias do lição.

§ 6

Exames e actos

Os alumnos são sujeitos a duas ordens de exames: os *exames de frequencia* e os *exames finaes* ou *actos*; uns e outros são publicos.

---

(1) Veja-se o *Programma do ensino da Academia Polytechnica do Porto para o anno lectivo de 1838 para 1839*, publicado no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno de 1879-1880, nas pag. 194-213.

Os exames de frequencia são dous para todas as cadeiras, excepto para a de desenho onde os não ha, e regula-os o decreto de 2 de Outubro de 1879. Um d'estes exames é oral, o outro é escripto. Ambos são feitos perante um jury de tres lentes nomeados pelo Conselho, sendo um o da cadeira, podendo todos interrogar na prova oral. No exame oral cada alumno tira um ponto á sorte, e é sobre elle interrogado. No exame escripto o ponto é o mesmo para todos os alumnos que fazem exame no mesmo dia. A votação é feita a descoberto para cada alumno, por numeros de 0 a 20, com a significação dada pelo artigo 29 do Decreto de 2 de Junho de 1873. A somma dos valores obtidos dividida por tres dá o valor do exame. Não póde ser admittido a exame final o alumno que na media dos dous exames obtiver menos de 10 valores.

Os exames finaes ou actos são regulados pelo Decreto de 6 de Novembro de 1839 (1) e por varias resoluções do Conselho Academico, particularmente pelas que foram tomadas em 6 de Novembro de 1873. (2)

Segundo aquelle decreto, os alumnos que se matricularem nas cadeiras da Academia deviam declarar, na occasião da matricula, qual o curso ou destino que pretendiam seguir (artigo 8.º), e, conforme essa declaração e em harmonia com as disposições do referido Decreto, cursariam as diversas cadeiras ou na *divisão de maior qualificação*, ou nas de *menor qualificação*. Entende-se por divisão de maior qualificação aquella cujos alumnos devem ser munidos das materias ensinadas na respectiva cadeira em toda a sua generalidade e seu desenvolvimento ; e divisões de menor qualificação aquellas cujos alumnos escusam de certas materias e theorias por demasiadamente abstractas, ou por inuteis ao seu destino especial. As pautas para os actos formavam-se segundo esta declaração. Os actos

(1) Transcripto no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1879-1880, pag. 216-229.

(2) Publicadas no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1883-1884, pag. 304-306.

feitos na segunda d'estas divisões não valem para os cursos que exigem qualificação maior.

Se o alumno pretender passar do curso que exige qualificação *menor* nos exames de determinadas cadeiras para outro que a exija *maior*, carece de repetir de novo os actos n'essas cadeiras, com o rigôr que corresponde á respectiva divisão de maior qualificação; esta repetição, porém, póde fazer-se sem repetir a frequencia. O mesmo Decreto, no art. 8.°, dava ao alumno a faculdade de mudar de divisão ao ordenar-se a pauta para os actos no fim do anno, precedendo despacho do director, ouvido o lente respectivo. Quando no acto se reconheça que o examinando não se acha habilitado para a divisão segundo a qual tirou ponto, podem os lentes da meza examinadora, conforme fôr de justiça, approval-o n'uma divisão inferior áquella em que propoz examinar-se (art. 21.°, § 1.°). Havia cadeiras sem divisões, outras com duas, outras com tres divisões (art. 9.° a 20.°).

A Portaria de 13 de Outubro de 1857, respondendo a uma consulta da Academia sobre a intelligencia e applicação dos preceitos da Carta de Lei de 12 de Agosto de 1854, art. 6.°, fazia distincção entre os diversos cursos então existentes na Academia, estatuindo menor numero de preparatorios para o 3.°, 4.° e 7.° mencionados no Decreto de 13 de Janeiro de 1837, e para o de aspirante a officiaes do exercito, consignado nos programmas elaborados pelo Conselho em 1860. (1)

O Decreto de 30 de Abril de 1863, art. 1.° e 2.°, e a Portaria de 3 de Março de 1881 distinguiam egualmente, pelo que respeita a preparatorios, entre os cursos 1.° e 2.°, e os cursos 3.°, 4.°, 5.°, 6.° e 7.° do referido Decreto de 13 de Janeiro de 1837, considerando a citada Portaria estes ultimos cursos como menores.

A prática seguida na Academia não foi sempre de inteiro

(1) Veja-se: *Relatorio da inspecção extraordinaria feita á Academia Polytechnica do Porto em 1864*, por José Maria de Abreu, Lisboa, 1865, pag. 116.

accordo com as disposições já citadas. As matriculas, posteriormente a 1837, fizeram-se durante bastantes annos sem a designação dos cursos, nem de classes ou divisões. Os lentes, segundo as provas dadas nas lições e no acto, approvavam os alumnos na divisão de *qualificação maior* ou *qualificação menor, ou em 1.ª e 2.ª classe* (1), sem se estabelecer a distincção d'estas no acto da matricula. (2)

Mais tarde (1871-1872 e nos annos seguintes) distinguiam-se na matricula os alumnos em duas classes — *1.ª ou 2.ª classe,* segundo o maior ou menor numero de preparatorios que se exigiam para a matricula nos cursos em que o alumno se matriculava. Esta distincção correspondia, em relação aos seus effeitos, á distincção entre os alumnos voluntarios e ordinarios da Universidade, porque permittia a matricula nas cadeiras da Academia na 2.ª classe com menor numero de preparatorios do que na 1.ª; aqui, porém, por meio da declaração de se seguir um curso dos chamados menores, na Universidade por declaração de classe.

Nos actos conservou-se até hoje a antiga distincção de approvação com *qualificação maior* e com *qualificação menor*.

Os alumnos approvados pela 2.ª classe com qualificação maior podem transitar para a 1.ª classe, sem serem obrigados a repetir os actos, mas precisam mostrar que tem os preparatorios exigidos para a matricula n'essa classe. (Veja-se o art. 2.º e seu § do Decreto de 30 de Abril de 1863).

Os alumnos de 2.ª classe, approvados com qualificação menor, carecem de repetir os actos e serem approvados com qualificação maior, para poderem passar para 1.ª classe, uma vez que tenham os preparatorios exigidos. A approvação com qualificação menor corresponde á approvação na classe de *obrigado* da Universidade.

Os actos, á excepção dos da cadeira de desenho, constam

(1) A palavra *classe* em vez de *divisão*, como synonima d'esta, começa a apparecer nos termos dos actos em 1852-1853.

(2) Veja-se o já citado *Relatorio* de José Maria de Abreu, pag. 47 e 65.

de provas oraes e são feitos por cadeiras. Os alumnos tiram ponto com antecipação de 24 horas, e são interrogados por dous lentes. A meza examinadora é constituida além dos dous lentes arguentes por um presidente que deve ser o lente da cadeira (1). O conselho poderá, porém, resolver como achar conveniente (2), n'este e em outros pontos.

Em todos os actos das diversas cadeiras deve entrar em conta a informação vocal dada pelo lente da cadeira respectiva préviamente ao acto, sobre a frequencia e signaes de aproveitamento evidenciados no decurso do anno lectivo.

O lente presidente do acto póde deixar suspensa até o dia seguinte a reprovação de um estudante que, tendo durante a sua frequencia dado provas não equivocas do seu talento e applicação, desmerecesse este honroso conceito no acto publico, e propôr secretamente aos outros lentes o seu conceito, para de commum accordo determinarem que o estudante se proponha e compareça com um exame privado, no qual os referidos lentes, explorando os seus talentos e estudos, decidam entre si com a approvação ou reprovação. (3)

O aproveitamento dos alumnos nas disciplinas da cadeira de desenho é determinado por provas exclusivamente práticas que se dão aos alumnos n'um concurso geral, em conformidade com o programma do ensino (art. 13.º). Os modelos ou desenhos são distribuidos aos alumnos com antecipação de dois mezes. Não ha exame oral.

Os votos são dados em escrutinio secreto por AA (approvado) e RR (reprovado). Dous RR reprovam; um R qualifica a approvação de *pela maior parte*. Ha, pois, a *approvação plena* ou *nemine discrepante*; a *approvação pela maior parte* ou *simpliciter*; e a *reprovação*.

O regulamento de 6 de Novembro de 1839, para o effeito

(1) *Decreto regulamentar de 6 de Novembro de 1839*, art. 10.º

(2) *Idem*, art. 27.º

(3) *Idem*, art. 22 (*Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1879-1880, pag. 228; *Idem*, anno 1878-1879, pag. 169-170).

da approvação dos pontos e mais disposições do regulamento relativos aos exames, agrupava, as cadeiras que então constituiam o quadro da Academia em 4 secções : Mathematica, Philosophia Natural, Commercio e Desenho (art. 4.º, § 2.º). Esta divisão tem sido conservada até hoje.

§ 7

Faltas aos exercicios escolares

As faltas ás lições, repetições, etc., influem na habilitação para os actos finaes. Segundo o regulamento de 6 de Novembro de 1839, vinte faltas sem causa ou sessenta com causa inhabilitam o estudante de fazer acto e inutilisam-lhe a frequencia do anno lectivo; seis faltas, sem causa grave, preterem o estudante de fazer acto na ordem do seu numero de matricula (art. 2.º, § 1.º). Se o alumno frequentar parte das materias que constituem o objecto do ensino d'alguma cadeira, para ficar inhabilitado de fazer acto das referidas materias será bastante que falte com causa a um terço, e sem causa a um sexto do numero de lições (art. 2.º, § 2.º) (1). Em 1862, porém, o Conselho academico diminuiu estes numeros, adoptando para a fiscalisação e julgamento das faltas a legislação vigente na Universidade pelo Decreto de 30 de Outubro de 1856 (2).

Nos termos da deliberação tomada pelo Conselho Academico em 6 de Novembro de 1873, que se refere ás aulas que são em dias alternados, perde o anno todo o alumno que tiver faltado á aula a quarta parte do numero das lições da respectiva cadeira, entendendo-se para este effeito cada falta justificada por um e cada falta não justificada por tres (3).

---

(1) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1879-1880, pag. 218.

(2) Publicada no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1879-1880, pag. 117.

(3) *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1883-1884, pag. 306.

§ 8

Premios e distincções

As honras com que são galardoados os alumnos mais distinctos nos cursos academicos são: *premios pecuniarios* e *honorificos*; *accessit*; e *distincções*.

A instituição dos premios pecuniarios, como honra e distincção conferida aos alumnos mais distinctos, com o fim de excitar a emulação entre elles, foi estabelecida pélo Alvará com força de lei de 16 de Agosto de 1825 [1]. Os premios eram doze, de 40$000 réis cada um, sendo seis para os estudantes de mathematica, dois para a aula de desenho, dois para a do commercio e dois para a de agricultura; mas, depois da reforma de 13 de janeiro de 1837, suscitando-se no conselho academico duvida sobre se as novas cadeiras deviam tambem ser contempladas n'aquella distribuição, resolveu-se que os premios fossem distribuidos por todas as cadeiras, cabendo dois ao primeiro anno de mathematica, e assim se continuou a observar-se até 1873.

O decreto de 19 de Outubro de 1836 consignou a verba de 480$000 para os doze referidos premios, e esta verba veio sempre, em separado, descripta no orçamento da despeza do Ministerio do Reino até 1873.

N'este anno, porém, na sessão legislativa de 19 de Março, apresentou o deputado snr. Adriano Machado, na Camara dos deputados, uma proposta para que as verbas de premios a estudantes, despezas de expediente e dotação dos estabelecimentos academicos, que então importavam em 1.730$000 réis, fossem reunidas em uma só, com a mesma designação cumulativamente. Esta proposta foi approvada em sessão de 31 de Março, sendo decidido que a distribuição d'aquella somma

---

(1) Veja-se o *Annuario da Academia Polytechnica do Porto,* anno 1878-1879, pag. 253; *idem,* anno 1877-1878, pag. 196.

fosse feita pelo Conselho da Academia, por proposta do Director. D'este modo o conselho confere ou não premios pecuniarios, conforme ha ou não estudantes dignos d'elles.

Os premios honorificos tem o mesmo valor honorifico que os anteriores, mas são titulos gratuitos.

As honras de *accessit* são inferiores ás de premio, e constituem um titulo honorifico e gratuito, nos termos do Decreto de 25 de Novembro de 1839, artigo 6.º, § 5.º, applicavel á Universidade. Tanto os premios, como os *accessit* dão direito a um *diploma*.

As honras de *distincto* não dão direito a diploma.

Não pódem ser premiados estudantes, n'uma cadeira, sobre cujo acto foram approvados pela maior parte, nem nas cadeiras em que são repetentes ([1]).

Os premios, os *accessit*, e as mesmas distincções eram conferidas até agora por votação de todo o Conselho sobre as propostas das secções, cujos membros conferenceiam entre si e ordenam, em vista das provas da frequencia, do resultado dos actos e informações dos lentes, as listas dos alumnos premiandos, que são submettidas á votação do Conselho. Esta é a prática seguida, porque a lei não preceitua a este respeito disposições especiaes e só se refere á interferencia do conselho.

Para as propostas serem consideradas validas não é necessaria a unanimidade, mas basta a pluralidade de votos ([2]).

§ 9

Propinas de matricula

As propinas de matricula eram até agora de 1$440 reis e respectivo addicional, para os alumnos civis, por cada anno de

(1) Artigo 21.º do Decreto de 6 de Novembro de 1839 e *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1878–1879, pag. 264.

(2) *Memoria historica* do snr. Conselheiro Adriano Machado, publicada no *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1877-1878, pag. 197.

estudos, na abertura da matricula e outro tanto no encerramento; para os alumnos militares, a verba era de 7$200 reis e addicional [1]. Além d'isso os alumnos que frequentavam as aulas da Escóla Medico-Cirurgica com algumas da Academia não pagavam propinas n'esta ultima, por lhes aproveitar a disposição do § 3.º do art. 121.º do Decreto de 29 de Dezembro de 1836.

A carta de lei de 21 de Julho de 1885, no § 2.º do art. 1.º, elevou a propina da matricula á quantia de 11$520 e respectivo addicional [2], e revogou a disposição do decreto de 29 de Dezembro de 1836, acima referida. Aquella taxa é uniforme para todos os cursos e egual á que pagam os alumnos das Escólas Medico-Cirurgicas [3].

Os alumnos não pagam propina alguma pelos trabalhos nos Laboratorios.

§ 10

Policia academica e penalidades

Estes assumptos são regulados pelos Decretos de 25 de Novembro de 1839 e 31 de Março de 1873; e pelo de 20 de Setembro de 1844, capitulo VIII [4].

§ 11

Administração academica

O governo litterario e economico do Academico, nos termos do Decreto de 19 de Outubro de 1836, pertence a um director

---

(1) Sobre esta propina veja-se: o art. 163.º do Decreto de 13 de Janeiro de 1837; o art. 143.º do Decreto de 20 de Setembro de 1844; o art. 8.º do Decreto de 2 de Junho de 1873; e a tabella do Decreto de 26 de Junho de 1881.

(2) Actualmente o addicional é de 935 a saber: 5 %, 691 reis; e 244 reis de sello.

(3) Veja-se o Decreto de 26 de Junho de 1881, tabella e legislação citada.

(4) Vejam-se: *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, anno 1878-1879, pag. 135. *Idem*, anno de 1879-1880, pag. 126 e 127.

e ao conselho dos lentes. O director é um dos lentes d'ella, nomeado pelo governo, e vence a gratificação de 100$000 reis, além do ordenado da sua cadeira [1]. Ao conselho dos lentes pertence a resolução dos negocios graves da Academia e de todos os que, pelas leis da sua organisação, estavam na parte deliberativa a cargo das auctoridades inspectoras, sendo propostos ao governo aquelles que carecessem de approvação superior, e executando desde logo o director os que fossem de competencia academica (art. 2.º). O Decreto de 13 de Janeiro de 1837 corroborou e ampliou as anteriores disposições quanto á auctoridade de director e do conselho academico nos assumptos litterarios e economicos (art. 158.º, 159.º, e seus §§; art. 160.º e 164.º).

A carta de lei de 12 de Agosto de 1854, no artigo 9.º, preceitua de um modo geral: «ser da privativa attribuição dos conselhos, academicos e escolares de todos os estabelecimentos de instrucção superior, *sob immediata inspecção* e *approvação do governo*, determinar os methodos de ensino e a fórma dos exames e exercicios academicos e estatuir os competentes regulamentos sobre falta de frequencia ás aulas, e sobre os mais objectos de administração scientifica e policial dos respectivos estabelecimentos».

Pelo que respeita á ingerencia das secções no governo litterario e scientifico da Academia, não ha regulamento que a defina, e quando muito podem considerar-se como commissões consultivas, porque as leis se referem n'aquelle ponto unica e exclusivamente ao conselho. Sómente, como já se disse, as secções téem, segundo o disposto no Decreto de 6 de Novembro de 1839, algumas attribuições no tocante á organisação dos pontos para os exames, etc. A prática seguida até agora tem sido que seja presidente de uma secção o lente mais antigo d'ella, e secretario o mais novo. A distincção em secções foi adoptada no regulamento dos concursos de 22 d'Agosto de 1865, para fixar a naturesa das provas a exigir aos candidatos ao magisterio e regular a promoção dos substitutos a ca-

(1) Decreto de 20 de Setembro de 1844, art. 44.º

thedraticos (art. 12, n.º v, do citado decreto; e Decreto de 27 de Setembro de 1854, art. 28.º e 36.º).

Não havia, porém, até agora um regulamento, approvado superiormente, que definisse claramente os deveres e encargos de todos os funccionarios academicos, embora, por diversas vezes, projectos n'este sentido [1] subissem á approvação superior. Ora para o regimen interno esta falta era essencial. O conselho academico está discutindo um projecto de regulamento, agora exigido pela nova phase que toma a organisação da Academia, e ao qual se refere o director no seu discurso de abertura.

A despeza com o pessoal, expediente e aluguer de casa na antiga Academia de Marinha e Commercio foi fixada em reis 10:642$000 pelo Decreto de 19 de Outubro de 1836. Depois da reforma de 1837, a Lei de 7 de Abril de 1838 consignava para dotação da Academia a quantia de 12:208$000 reis: sendo para pessoal 11:328$000 reis; para premios a estudantes, reis 480$000; e para expediente ordinario da Academia 400$000 reis.

Apesar de dotada, pelo Decreto de 13 de Janeiro de 1837, de diversos estabelecimentos, a Academia não recebeu até 1857 para todas as suas despezas, incluindo as de expediente, mais do que os 400$000 reis já consignados no Decreto de 19 de Outubro de 1836. No orçamento de 1857-1858 consignou-se pela primeira vez a verba de 650$000 reis para conservação e aperfeiçoamento dos estabelecimentos [2]. Foi tambem a Lei

(1) Citaremos dous — o que foi approvado pelo conselho em 30 de Julho de 1864, publicado no *Annuario da Academia Polytechnica*, anno 1882-1883, pag. 197-240; e o que foi approvado pelo conselho em 6 de Dezembro de 1879.

(2) Esta verba era distribuida do seguinte modo:

Conservação e aperfeiçoamento dos seguintes estabelecimentos:

Jardim botanico	200$000
Bibliotheca	150$000
Gabinetes de Physica, de Historia Natural e Laboratorio chimico	300$000
	650$000

Apezar d'isto, desde 1858 até 1864 só se fizeram dous pagamentos: o primeiro em 1858, de 1:000$000 reis, auctorisado por Portaria de 18 de Janeiro de 1858; e o segundo em 1864, de 1:300$000 reis, correspondente á dotação do anno economico de 1863-1864 e de 1864-1865.

de 23 de Junho de 1857 que concedeu á Academia Polytechnica, para continuação das obras do seu edificio, a quantia de reis 4:000$000, que tem continuado a ser votada nos orçamentos dos annos seguintes até hoje, permittindo a lei de 19 de Junho de 1880 applicar esta verba para a expropriação das lojas existentes nos baixos do edificio. Assim, pois, em 1864 a dotação da Academia Polytechnica era de 21:074$560 reis, em que se comprehendiam: as despezas de pessoal na importancia de 15:544$650 reis; a verba da continuação das obras, na de reis 4:000$000; e a importancia dos premios a estudantes, expediente, e conservação dos estabelecimentos na importancia de 1:530$000 reis. Alguns annos depois subiu a verba para conservação dos estabelecimentos de 650$000 reis a 850$000 (1), e já assim figura no orçamento de 1872-1873, sendo então a importancia de material, premios e expediente, de reis 1:730$000. No orçamento de 1873-1874 e nos seguintes até 1883 vem esta verba unica, com a mesma designação cumulativamente, devendo a distribuição d'ella ser feita pelo conselho da Academia sob proposta do director (2). Esta verba foi augmentada de 770$000 reis no orçamento de 1883-1884 (3), ficando por tanto em 2:500$000.

A reorganisação por que acaba de passar a Academia não só augmentou o quadro do pessoal docente, como tambem augmenta a verba para despezas dos estabelecimentos e museus, por virtude da disposição de Lei de 21 de Julho de 1885, se-

(1) Distribuidos por este modo:

Jardim botanico	200$000
Bibliotheca	150$000
Gabinete de Physica e de Historia Natural	250$000
Laboratorio chimico	250$000
	850$000

(2) A proposta foi do snr. Adriano Machado, na sessão da Camara dos deputados de 19 de Março de 1873 (*Diario da Camara dos Deputados* de 1873, pag. 803) e foi approvada em 31 de Março (*Idem*, pag. 936 e 967).

(3) A proposta foi do snr. Dr. Wenceslau de Lima — Discurso d'abertura n'este *Annuario*, pag. 10; e no de 1883-1884, pag. 15.

gundo a qual o excesso de receita que deve resultar do augmento das propinas será applicado ao augmento das dotações dos gabinetes, dos museus, e ás despezas dos alumnos em missão. O projecto de orçamento para o proximo anno de 1886-1887, remettido ao Ministerio do Reino, tomando para base a media da frequencia nos ultimos tres annos e as despezas com as novas cadeiras creadas, computava a despeza da Academia em 25:451$007 réis; em que se comprehendem: as despezas de pessoal na importancia de 17:560$650 réis; as das obras em 4:000$000 réis; e as de expediente, premios, estabelecimentos academicos, missões dos alumnos e publicação do Annuario, em 3:890$357 réis. (1)

A receita para o estado subiu de 661$266 réis a réis 5:271$623.

§ 12

Pessoal da Academia Polytechnica

O pessoal do quadro da Academia consta actualmente de 18 Lentes cathedraticos (Lei de 21 de Julho de 1885, art. 1.° e 2.°), e 4 Lentes substitutos, os quaes são demonstradores natos; do director, nomeado pelo governo de entre o corpo dos Lentes; do secretario, do bibliothecario, do guarda-mór, do guarda-preparador do laboratorio chimico, do guarda-demonstrador de physica experimental, do guarda-primeiro official do jardim botanico, de tres guardas subalternos para o serviço e de dous serventes: um para a secretaria, que serve tambem de porteiro, e outro do laboratorio chimico e do gabinete de physica.

Além d'estes empregados, são pagos pelas despezas avulsas da Academia um amanuense da secretaria, um hortelão e um servente do jardim botanico.

(1) Na despesa de pessoal não figuram os vencimentos dos lentes jubilados, montando a 3:499$990 réis.

A — Pessoal do quadro legal da Academia

1. CORPO DOCENTE

Lente da 1.ª cadeira (geometria analytica, algebra superior e trigonometria espherica). — *L. I. Woodhouse*, rua do Breyner, 118.

Lente da 2.ª cadeira (Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações). — *Dr. F. Gomes Teixeira*, rua de Costa Cabral, 132.

Lente da 3.ª cadeira (Mechanica racional; cinematica). — *J. A. S. V. da S. Albuquerque*, rua dos Fogueteiros, 1.

Lente da 4.ª cadeira (Geometria descriptiva). — *Dr. F. Gomes Teixeira* (interinamente).

Lente da 5.ª cadeira (Astronomia e Geodesia). — *L. I. Woodhouse* (interinamente).

Lente da 6.ª cadeira (Physica). — *Dr. Adriano de Paiva*, Quinta de Campo Bello, Villa Nova de Gaya.

Lente da 7.ª cadeira (Chimica inorganica). — *Dr. J. D. Arroyo*, Praça de Cadouços, 16, Foz.

Lente da 8.ª cadeira (Chimica organica e analytica). — *A. J. Ferreira da Silva*, rua da Alegria, 929.

Lente da 9.ª cadeira (Mineralogia, paleontologia e geologia). — *Dr. Wenceslau de S. P. Lima*, rua de Cedofeita, 137.

Lente da 10.ª cadeira (Botanica). — *Dr. F. de Salles Gomes Cardoso*, rua Direita, 20, Mathosinhos.

Lente da 11.ª cadeira (Zoologia). — *M. A. Gonçalves*, rua de Costa Cabral, 637.

Lente da 12.ª cadeira (Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções). — *Roberto R. Mendes*, Hotel America, rua de S. Lazaro.

Lente da 13.ª cadeira (Hydraulica e machinas). — *M. da Terra P. Vianna*, rua do Vasco da Gama, 28, Foz.

Lente da 14.ª cadeira (Construcções e vias de communicação). — *Roberto R. Mendes* (interinamente).

Lente da 15.ª cadeira (Montanistica e docimasia). — Vago.

Lente da 16.ª cadeira (Economia politica, estatistica, principios de direito publico, administrativo e commercial; legislação). — *Antonio A. O. Lobo*, rua do Principe, 50.

Lente da 17.ª cadeira (Commercio). — *J. J. Rodrigues de Freitas*, Travessa de Santa Catharina, 52.

Lente da 18.ª cadeira (Desenho). — *F. S. Cardoso*, rua da Alegria, 347.

Lente substituto de Mathematica. — Vago.

Lente substituto de Philosophia. — Vago.

Lente substituto de Commercio. — Vago.

Lente substituto de Desenho. — *Guilherme A. Correia*, Campo da Regeneração, 124.

2. DIRECÇÃO

Director. — *Dr. F. de Salles Gomes Cardoso* (interinamente).

3. SECRETARIA

Secretario. — *Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, rua das Vallas, 301.

4. BIBLIOTHECA

Bibliothecario. — *Bento Vieira Ferraz d'Araujo* (interinamente).

5. JARDIM BOTANICO

Guarda-primeiro official do jardim Botanico. — *Joaquim Casimiro Barbosa* (interinamente), Massarellos, 43.

6. LABORATORIO CHIMICO

Guarda-preparador do laboratorio chimico. — *Augusto Wenceslau da Silva* (interinamente), rua de Santa Catharina, 612.

7. GABINETE DE PHYSICA

Guarda-demonstrador de physica experimental. — *Bernardo Maria da Motta* (interinamente), travessa do Bolhão, 114.

8. GUARDA-MÓR

Guarda-mór. — *Joaquim Filippe Coelho*, no edificio da Academia.

9. EMPREGADOS SUBALTERNOS

Guarda subalterno, servindo de ajudante de bibliothecario. — *José Baptista Mendes Moreira*, Campo Alegre, 433.

Guarda subalterno. — *Antonio Correia da Silva*, no edificio da Academia.

Guarda subalterno. — *Francisco Martins Ferreira Borges*, Esperança, 68.

Servente do Laboratorio chimico e do gabinete de Physica. — *Domingos Gomes da Cruz*, travessa de S. Dionisio, 99.

Servente da secretaria e porteiro. — *João Antonio Pereira*, Travessa de S. Roque, 7.

B — Pessoal não pertencente ao quadro legal

1. PAGO PELA DOTAÇÃO DO EXPEDIENTE, E DOS ESTABELECIMENTOS ACADEMICOS

Amanuense da secretaria. — *Eduardo Lopes*, rua da Alegria, 293.

Hortelão do Jardim botanico. — *Joaquim José Tavares*, no Jardim.

Servente do Jardim botanico. — *Alberto Ferreira*, idem.

2. PAGOS PELA DOTAÇÃO PARA AS OBRAS DO EDIFICIO DA ACADEMIA E SERVINDO PARA ESCRIPTURAÇÃO E INSPECÇÃO DAS OBRAS

Amanuense da commissão das obras. — *J. Filippe Coelho*.

Guarda apontador das obras. — *Joaquim de Sousa Seabra*, rua 9 de Julho, 37.

C — Lentes jubilados

Conselheiro Arnaldo A. F. Braga, rua do Breyner, 104.
P. d'Amorim Vianna, Setubal.
Gustavo Adolpho Gonçalves e Sousa, rua do Principe, 156.
Dr. José Pereira da Costa Cardoso, rua do Principe, 205.
Conselheiro Adriano A. C. Machado, rua da Paz, 6.

§ 13

Estabelecimentos academicos

Os estabelecimentos academicos servem como meios de ensino nas lições e exercicios. Os que actualmente existem, mais ou menos completos, nos termos das leis vigentes, são:

1. A *bibliotheca*, que serve para leitura dos lentes, e tambem dos estudantes, mediante permissão especial. Está a cargo do bibliothecario (§ 12.º), que é ajudado pelo guarda subalterno *Mendes Moreira*. Está aberta desde as 9 da manhã até ás 3 da tarde.

2. O *gabinete de historia natural*, dirigido pelos lentes das cadeiras de Zoologia, e de Mineralogia e Geologia.

3. O *Gabinete de machinas ou de physica*, que é commum ao Instituto Industrial do Porto e á Academia Polytechnica (Portaria de 2 de Maio de 1854); dirigido, por parte da Academia, pelo Lente *Dr. Adriano de Paiva*, e tendo por guarda demonstrador de physica experimental a *Bernardo Maria da Motta*.

4. O *Laboratorio chimico*, tambem commum aos dous estabelecimentos, dirigido, por parte da Academia, pelo lente *A. J. Ferreira da Silva;* serve de guarda-preparador *Augusto Wenceslau da Silva* e de servente, que o é tambem do gabinete de physica, *Domingos Gomes da Cruz*. Está aberto desde as 10 horas da manhã até ás 4 horas da tarde.

5. O *Jardim botanico*, que fica junto á Praça do Duque

de Beja, dirigido pelo lente *Dr. Salles Gomes Cardoso*, auxiliado pelo 1.° official do Jardim *Joaquim Casimiro Barbosa*. São empregados, além d'isso, no jardim: um hortelão e um servente.

6. *Observatorio astronomico*. Não se acha installado, por falta de local apropriado.

7. *Gabinete de cinematica, ou collecção de modelos de cinematica* para illustração das lições da cadeira de mecanica racional e cinematica, que possue uma boa collecção de modelos cinematicos de Reuleaux. Este gabinete, que não se acha referido no Decreto de 13 de Janeiro de 1837, vem mencionado nos orçamentos da despeza do Ministerio do Reino de 1884-1885, e de 1885-1886.

8. A *collecção dos instrumentos astronomicos*, para illustração das lições da cadeira de astronomia.

9. *Collecção de estampas e modelos de desenho*, para a respectiva cadeira de desenho (1).

O regulamento do Laboratorio Chimico que actualmente vigora, acha-se publicado no *Annuario da Academia Polytechnica*, anno 1884-1885.

---

(1) Sobre estes estabelecimentos veja-se o *Annuario da Academia Polytechnica do Porto*, para 1883-1884, pag. 99 a 99; *idem*, anno 1884-1885, pag. 45 a 62.

§ 14

Indicação geral sobre as lições e exercicios

Objecto do ensino	Numero de horas semanaes		Nome do professor regente
	Lições	Exercicios	
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	2	*L. I. Woodhouse.*
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	2	*Dr. Gomes Teixeira.*
3. Mecanica racional; cinematica	6	—	*J. A. Albuquerque.*
4. Geometria descriptiva I	6	—	*Dr Gomes Teixeira.*
5. Exercicios de geometria descriptiva I.....	—	2	
6. Geometria descriptiva II	2	—	
7. Exercicios de geometria descriptiva II....	—	2	
8. Astronomia e geodesia	6	—	*L. I. Woodhouse.*
9. Topographia........	2	2	
10. Physica geral.......	6	2	*Dr. Adriano de Paiva.*
11. Physica industrial....	2	—	
12. Chimica inorganica geral	6	2	*Dr. J. D. Arroyo.*
13. Chimica inorganica industrial	2	—	

Objecto do ensino	Numero de horas semanaes		Nome do professor regente
	Lições	Exercicios	
14. Chimica organica geral e biologica......	4	2	A. J. Ferreira da Silva.
15. Chimica analytica................	2	2	
16. Chimica organica industrial............	2	—	
17. Mineralogia, paleontologia e geologia.....	6	—	A. M. Gonçalves.
18. Botanica geral......	6	—	Dr. Salles Gomes Cardoso.
19. Botanica industrial Materias primas d'origem vegetal........	2	—	
20. Zoologia geral......	6	—	M. A. Gonçalves.
21. Zoologia industrial...............	2	—	
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade de construcções........	6	—	M. Terra Vianna.
23. Projectos relativos a resistencia dos materiaes e a estabilidade de construcções.....	—	2	
24. Hydraulica e machinas I..............	6	—	Roberto Mendes.
25. Projectos de hydraulica e machinas I.....	—	6	
26. Hydraulica e machinas II.............	6	—	
27. Projectos de machinas II..............	—	6	
28. Projectos de machinas e de chimica industrial..............	—	6	— —

Objecto do ensino	Numero de horas semanaes		Nome do professor regente
	Lições	Exercicios	
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial II......	—	6	— —
30. Construcções I......	6	—	*Roberto Mendes.*
31. Projectos de construcções I.............	—	6	
32. Construcções II......	6	—	
33. Projectos de construcções II.............	—	6	
34. Docimasia..........	2	2	— —
35. Metallurgia.........	4	—	
36. Projectos de metallurgia...............	—	—	
37. Arte de minas.......	6	—	
38. Projectos relativos á arte de minas.......	—	6	
39. Economia politica. Estatistica; principios de direito publico, direito administrativo e commercial............	4	—	*Antonio Lobo.*
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial...	2	—	
41. Calculo commercial; escripturação em geral e especialmente dos bancos............	4	—	*Rodrigues de Freitas.*
42. Contabilidade industrial...............	2	—	
43. Economia commercial e geographia commercial...............	6	—	

Objecto do ensino	Numero de horas semanaes		Nome do professor regente
	Lições	Exercicios	
44. Desenho de figura, paisagem e ornato	—	6	Silva Cardoso.
45. Desenho de architectura e aguadas	—	6	
46. Desenho topographico e desenho de machinas	—	6	

Os alumnos do curso de commercio teem um curso de analyse chimica commercial no 3.º anno.

§ 15

Programmas detalhados das cadeiras e exercicios

I Cadeira — Algebra superior e geometria analytica

Lente *L. I. Wodhouse*. Seis horas semanaes

ALGEBRA

PRIMEIRA PARTE

1. *Determinantes.*—Noções preliminares. Disposição par, disposição impar. Permutação de dois elementos. Permutação circular. Definição de determinante. Notação. Ordem do determinante. Termo principal. Propriedades geraes dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento dos determinantes. Regra de Sarrus. Calculo dos determinantes. Resolução das equações do primeiro grau a muitas incognitas. Multiplicação de determinantes.

2. *Generalisação da noção de quantidade.*—Quantidades arithmeticas. Propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Introducção da ideia de direcção no symbolo representativo da grandeza. Quantidades algebricas reaes. Quantidades geometricas.

Modulo e argumento. Definição das operações geometricas. Verificação das propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Quantidades imaginarias. Interpretação geometrica de $\sqrt{-1}$. Notação algebrica e trigonometrica das quantidades imaginarias. Operações sobre imaginarios. Formula de Moivre. Raizes da unidade.

3. *Series. Productos infinitos. Fracções continuas.*—Series convergentes e divergentes. Series de termos reaes. Regras de convergencia. Series de termos imaginarios. Convergencia.

Productos infinitos. Condição de convergencia. Limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$, quando n cresce indefinidamente.

Fracções continuas. Definição. Transformação da fracção em serie. Estudo do caso em que os numeradores das fracções integrantes são eguaes á unidade.

4. *Principios geraes da theoria das funcções.*—Continuidade das funcções. Descontinuidade de primeira e segunda especie. Theoremas sobre continuidade.

Funcções algebricas. Funcções inteiras. Formula de Taylor. Formação das derivadas. Derivada de um producto. Decomposição da funcção em factores binomios (1). Funcções racionaes fraccionarias. Sua decomposição. Funcções transcendentes. Exponenciaes. Funcções circulares. Logarithmos. Periodicidade nas funcções circulares.

SEGUNDA PARTE

5. *Theoria geral das equações.*—Theorema fundamental da theoria das equações. Existencia de n raizes. Raizes imaginarias conjugadas na equação de coefficientes reaes. Decomposição de um polynomio real em factores reaes do primeiro e segundo grau. Relações entre os coefficientes e as raizes. Transformação das equações. Raizes eguaes.

6. *Separação das raizes das equações numericas.*—Limites das raizes de uma equação de coefficientes reaes. Theorema sobre a mudança de signal de $\frac{f(x)}{f'(x)}$ quando $f(x)$ passa por zero. Theorema relativo á substituição da variavel por dois numeros. Corollarios. Theorema de Descartes. Theorema de Rolle. Theorema de Sturm. Applicação á determinação das condições de realidade de uma equação de grau dado.

Theorema de Cauchy sobre o numero de raizes reaes ou imaginarias dentro de um dado contorno.

Separação das raizes reaes das equações numericas pelo methodo de Lagrange, e applicação do theorema de Sturm.

7. *Calculo das raizes.*—Raizes commensuraveis. Raizes incommensuraveis. Methodo de approximação de Newton e Fourier.

8. *Eliminação.*—Methodo do maximo divisor commum. Methodo de Euler. Methodo de Bezout e Cauchy. Applicação ao calculo das raizes imaginarias. Abaixamento das equações.

9. *Funcções symetricas.*—Funcções symetricas. Methodo de eliminação fundado nas funcções symetricas.

10. *Resolução algebrica das equações.*—Considerações geraes. Equação do terceiro grau. Equação do quarto grau.

---

(1) A demonstração dá-se na theoria das equações.

GEOMETRIA ANALYTICA

PRIMEIRA PARTE

1. *Trigonometria espherica.*—Formulas fundamentaes. Resolução dos triangulos.

SEGUNDA PARTE

2. *Ponto. Linha recta.*—Ponto. Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Distancia entre dois pontos. Transformação de coordenadas.

Equação de uma linha. Equação da linha recta. A equação do primeiro grau representa uma recta. Differentes formas da equação da linha recta. Equação da recta que passa por dois pontos. Condição para que tres pontos estejam em linha recta. Angulo de duas rectas. Condições de parallelismo e perpendicularidade. Intersecção de duas rectas. Condição para que tres rectas sejam concorrentes. Equação de uma recta que passa pela intersecção de outras duas. Distancia de um ponto a uma recta.

Equações do grau superior ao primeiro. Generalidades sobre equações que se decompõem em factores.

3. *Circulo.*—Equação do circulo. Differentes formas. Circulo que passa por tres pontos. Equação do segundo grau que representa um circulo. Determinação do raio e coordenadas do centro.

4. *Parabola.*—Definição. Sua equação. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação em coordenadas polares.

5. *Ellipse.*—Definição. Sua equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

6. *Hyperbole.*—Definição. Equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

Definição d'estas curvas pela relação das distancias dos seus pontos a um ponto e a uma recta. Equação geral.

7. *Das tangentes.*—Tangentes em geral. Tangente e normal ao circulo. Tangente tirada por um ponto exterior. Corda dos contactos. Polo e polar.

Tangente e normal á parabola. Subtangente e subnormal. Differentes propriedades. Polo e polar.

Tangente e normal á ellipse e hyperbole. Subtangente e subnormal. Differentes propriedades. Cordas supplementares. Polo e polar.

8. *Asymptotas.*—Asymptotas da hyperbole. Equação da curva referida ás asymptotas.

9. *Centros e diametros.*—Theoria dos centros e diametros na parabola, na ellipse e na hyperbole. Diametros conjugados. Equações da ellipse e hyperbole referidas aos diametros conjugados. Relação com as cordas supplementares. Equação da parabola referida a eixos conjugados.

10. *Discussão da equação geral do 2.° grau a duas variaveis.*

TERCEIRA PARTE

11. *Ponto. Recta. Plano.*—Coordenadas do ponto no espaço. Distancia entre dois pontos. Coordenadas polares de um ponto. Transformação de coordenadas.

Superficies e linhas. Equações da recta e do plano. Problemas sobre a recta e o plano.

12. *Superficies cylindricas, conicas e de revolução.*

13. *Discussão da equação geral do 2.º grau a tres variaveis.*

II Cadeira — Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações

Lente *Dr. F. Gomes Teixeira.* Seis horas semanaes

Na exposição das doutrinas que são comprehendidas n'esta cadeira, o respectivo lente segue os **Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal,** que são publicados n'este *Annuario,* e de que elle é auctor.

III Cadeira — Mecanica racional e cinematica

Lente *J. A. Albuquerque.* Seis horas semanaes

I — MECANICA RACIONAL

Noção de movimento e de força: objecto da mecanica; distincção entre mecanica racional e mecanica physica. Divisão da mecanica racional em Phoronomia, Estatica e Dynamica. Representação ideal dos corpos em mecanica racional: ponto material e systema material.

A. — PHORONOMIA

a) Movimento absoluto

1) Phoronomia do ponto material

Objecto da Phoronomia; correlação entre esta sciencia e a geometria. Movimento absoluto e relativo. A fluxão das grandezas: noção geral de velocidade.

Theoria da velocidade

Equação do movimento do ponto sobre a trajectoria. Movimento uniforme e variado, rectilineo e curvilineo. Velocidade linear. Representação graphica da lei do movimento: curva dos espaços e das velocidades. Im-

portancia da representação graphica do movimento como methodo de investigação das leis naturaes.

Decomposição do movimento: a simultaneidade de movimento como pura concepção. Expressão do movimento de um ponto pelo de tres movimentos rectilineos coordenados: equações finitas do movimento. Composição de volocidades simultaneas de um ponto: parallelogrammo, parallelipipedo, e, geralmente, polygono das velocidades. Movimento de um ponto em relação a um polo fixo: movimento areolar no plano e no espaço; movimento de circulação e angular; velocidades respectivas. Propriedades projectivas do movimento de um ponto.

Applicações: projecção de um movimento circular e uniforme sobre um diametro — principaes propriedades da velocidade de um planeta no seu movimento ao redor do sol — methodo de Roberval para o traçado das tangentes ás curvas: exemplifica-se o methodo na espira de Archimedes, na conchoide, na quadratriz, nas conicas e na cycloide.

Emprego em mecanica dos principios da theoria dos vectores.

Theoria da acceleração

Incremento geometrico da velocidade: acceleração total; sua decomposição natural em acceleração tangencial e centripeta. Interprètação geometrica da acceleração total. Propriedades projectivas da acceleração total. Desvio elementar: importancia da sua consideração; expressão da acceleração no desvio. Equações differenciaes do movimento. Conhecimento que a consideração simultanea das noções de velocidade e acceleração dá do movimento de um ponto. Hodographos das accelerações.

2) Phoronomia dos solidos ou systemas invariaveis

Simplificações que ao estudo do movimento de um solido dá a hypothese da invariabilidade da fórma. Movimento elementar de um solido. As especies mais simples do movimento elementar de um solido: movimento de translacção e de rotação; suas propriedades geometricas e phoronomicas. Representação da rotação por um vector.

Figuras planas

Movimento de uma figura plana no seu plano: deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; centro ou polo instantaneo de rotação; determinação do polo pelo conhecimento das velocidades contemporaneas de dois pontos; situação do polo no infinito. Movimento continuo da figura plana: trajectorias polares; movimento epicycloidal plano.

Applicações ao movimento de uma recta de comprimento constante, cujos extremos são dirigidos pelos lados de um angulo: circulos de Cadran.

Movimento de uma figura plana no espaço: deslocação infinitamente pequena; fóco do plano; caracteristica; propriedades do fóco e da caracteristica. Caso em que a caracteristica passa ao infinito.

Figuras esphericas

Movimento de uma figura espherica na sua esphera; deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; polo e eixo instantaneo de rotação; sua determinação. Movimento continuo da figura espherica: trajectorias polares esphericas; reducção do movimento da figura ao de rolamento das trajectorias polares esphericas; movimento epicycloidal espherico.

Solidos

Movimento de um solido cujos pontos se deslocam parallelamente a um plano fixo; sua reducção ao de uma figura plana no seu plano: rolamento cylindrico.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: sua reducção ao de uma figura espherica na sua esphera; theorema de Poinsot: rolamento conico. Relação que liga a velocidade angular ao redor do eixo instantaneo, a velocidade angular d'este eixo descrevendo as duas superficies conicas e os raios de curvatura d'ellas. Solução analytica: expressão em determinantes das componentes da velocidade linear de um ponto do solido.

Movimento o mais geral de um solido livre no espaço: deslocação finita; reducção a uma translacção e rotação; infinidade de combinações de dois movimentos do mesmo genero; quantidades que permanecem constantes em todos os systemas d'essas combinações; systema notavel em que a translação é parallela ao eixo da rotação; seu estado unico: movimento heliçoidal; eixo de rotação e de resvalamento, sua construcção—deslocação infinitesimal: eixo instantaneo de rotação e de resvalamento; determinação da velocidade do movimenlo heliçoidal. Movimento continuo: imagem de Poinsot; imperfeição d'esta representação. Axoides: imagem de Poncelet. Superficies e contornos complementares dos axoides: theorema de Reuleaux que reduz o movimento mais geral de um solido ao rolamento de duas curvas.

Acceleração no movimento dos solidos: centro das accelerações; logares geometricos dos pontos materiaes em que as accelerações tangenciaes e centripetas são nullas. Theorema de Rivals.

a) Movimento relativo

1) Movimento relativo de um ponto material

Relação entre a velocidade absoluta, relativa e de arrastamento. Casos de movimento relativo em que o movimento de arrastamento é uma translacção simples, ou uma rotação simples: exemplifica-se no movimente apparente do sol e no movimento diurno dos astros. Relação entre a acceleração absoluta, relativa, de arrastamento e complementar: theorema de Coriolis, sua demonstração geometrica e analytica. Expressão em determinantes das componentes da acceleração complementar.

2) Movimentos elementares componentes ou relativos de um solido

Composições de translacções. Composição de rotações: 1.º ao redor de eixos parallelos; binario de rotações—2.º ao redor de eixos convergentes. Composição de translacções e rotações.

Expressões analyticas da deslocação de um ponto do solido em funcção dos seis parametros que definem o movimento mais geral do solido.

Passagem da phoronomia á estatica e dynamica

Principios fundamentaes da mecanica racional, considerados como factos primarios da constituição cosmica: I Principio de persistencia — II Principio da coexistencia — III Principio da mutualidade de acção.

As forças comparadas aos seus effeitos: noção de massa. Avaliação numerica das massas pelos pesos; densidade; homogenidade. Representação das forças por vectores.

Como a noção da massa opera a passagem dos theoremas e construcções da phoronomia para a dynamica: composição das forças applicadas a um mesmo ponto material; projecção das forças: decomposição de uma força applicada a um ponto material em força tangencial e normal á trajectoria do ponto; theorema de Coriolis em dynamica; força de inercia de arrastamento, força centrifuga composta.

Noção do trabalho das forças: alta importancia da noção do trabalho, tirada da sciencia economica, em vista da industria do homem e da grande industria da Natureza. Unidades de trabalho. Trabalho elementar de uma força: dois aspectos differentes de o considerar. Expressão de trabalho elementar de uma força emanante de um ponto fixo.

Trabalho virtual; importancia d'esta concepção como artificio de raciocinio. Theorema que liga o trabalho elementar da força resultante ao das forças componentes; theorema que liga o trabalho elementar de uma força relativo a uma deslocação qualquer aos trabalhos da mesma força relativos ás deslocações componentes d'aquella. Expressão do trabalho elementar de uma força em coordenadas rectangulares. Noção de momento de uma força em relação a um ponto, a um eixo e a um plano. Representação do momento por uma area plana; representação dos momentos por vectores: eixo do momento. Theorema do trabalho elementar de uma força na rotação do ponto de applicação da força ao redor do eixo. Determinantes que exprimem os momentos de uma força relativamente a tres eixos rectangulares. Modificações que soffrem estes determinantes devidas a uma translacção dos eixos coordenados. Expressão do momento de uma força relativamente a um eixo dado de posição em funcção d'aquelles determinantes. Theorema de Varignon.

B. — ESTATICA

1) Estatica do ponto material

Definição de equilibrio. Independencia das condições estaticas das forças e do estado de quietação ou de movimento do ponto material. Equações geraes do equilibrio. Reducção das tres equações do equilibrio a uma unica equação, por meio do trabalho virtual. Equilibrio de um ponto obrigado a uma superficie; reação normal da curva e da superficie; reducção d'este equilibrio ao do ponto livre. Equilibrio relativo de um ponto livre: applicação a um ponto pesado á superficie da terra; peso do ponto material.

2) Estatica dos systemas materiaes

Noções sobre a constituição dos systemas naturaes; distincção de forças interiores e exteriores. Hypothese da continuidade da materia nos corpos. Pressão n'um elemento dos systemas materiaes; isotropismo. Systemas obrigados a ligações: systemas invariaveis. Lemma relativo á somma dos trabalhos das forças interiores.

Equilibrio dos systemas obrigados a ligações (*theorema das velocidades virtuaes*): reducção do systema ao de pontos livres. Theorema de Tschirnhausen servindo de lemma para obter a expressão do trabalho das forças de ligação.

Annullação d'este trabalho para deslocações virtuaes compativeis com as ligações. Methodo de Lagrange para o estabelecimento analytico das equações geraes do equilibrio; sua importancia.

Equilibrio dos systemas invariaveis; applicação do *theorema das velocidades virtuaes* aos systemas invariaveis — 1.º caso em que o systema é livre: as seis equações necessarias e sufficientes que definem o equilibrio — 2.º caso em que o systema está obrigado a um ponto fixo, ou a um eixo fixo; equações da reacção do ponto ou do eixo. Reducção do numero das equações de equilibrio em casos especiaes das forças applicadas: 1.º forças convergentes em um mesmo ponto; 2.º forças parallelas; 3.º forças situadas n'um mesmo plano. Equivalencia das forças; sua expressão analytica por seis ou por uma equação. Consequencias immediatas da equivalencia. Composição das forças; caso de forças convergentes; caso de duas forças parallelas binario de forças. Theoria dos binarios de forças: propriedades do binario; representação do binario por um vector (*eixo do binario*); propriedade projectiva do eixo; effeito dynamico de um binario applicado a um solido. Composição dos binarios. Composição geral das forças: reducção de um systema qualquer forças a duas; a uma resultante de translacção e a um binario; momento resultante. Expressão analytica da condição de reductibilidade de um systema de forças a uma unica força. Minimo dos momentos relativamente ás diversas posições da resultante de translacção: *eixo central dos momentos* — representação geometrica de Poinsot dos eixos no espaço relativamente aos quaes se tomam os momentos de um systema de forças.

Equilibrio de um corpo que se appoia n'um plano fixo por um numero determinado de pontos; solução do paradoxo relativo ás pressões.

Centro das forças parallelas; propriedades caracteristicas. Centro de gravidade: centro de massa de solidos, superficies e linhas. Caso da homogenidade. Theoremas que podem facilitar a determinação do centro de gravidade. Exemplos principaes da determinação do centro de gravidade na hypothese da homogenidade.

Methodo centrobarico: theorema de Pappus.

Equilibrio dos systemas funiculares: noção de tensão do cordão; equilibrio de um cordão actuado por tres forças; equilibrio do polygono funicular; construcção graphica de Varignon: applicação ás pontes pensis: equações do equilibrio da curva funicular: applicação a um fio tenso sobre uma superficie — a um fio homogeneo pesado suspenso pelas extremidades (catenaria). Equilibrio dos systemas polygonaes articulados sem attricto.

Theoria geral da funcção de força: determinação simples das quantidades relativas á força por meio da funcção de força; representação geometrica por meio das superficies de nivel. Caso fundamental em que existe uma funcção de força: potencial. Theoremas de Laplace e de Poisson relativos ao parametro differencial da segunda ordem do potencial.

Applicação á attracção de uma esphera homogenea ou composta de camadas esphericas homogeneas sobre um ponto material situado no exterior ou interior da esphera; attracção de um ellipsoide homogeneo: theoremas de Newton e de Ivory; notavel consequencia d'este ultimo theorema.

Equilibrio dos systemas isotropos: equações do equilibrio interior de um systema material qualquer; equilibrio do parallelipido e do tetraedro elementar. Ellipsoide das pressões. Orientação de um elemento plano sob uma determinada pressão.

Casos de systemas isotropos: Hydrostatica. Equações geraes do equilibrio dos fluidos; equação de Clairaut. Superficie de nivel; expressão da pressão no parametro da superficie de nivel; propriedades isopiezica, isotherma e homogenica de uma camada de nivel.

Applicação aos liquidos pesados; altura representativa das pressões. Pressão de um liquido pesado sobre uma superficie immersa: centro de pressão; sua determinação geometrica e analytica no caso da superficie plana. Reducção das pressões elementares sobre uma superficie curva. Caso em que as pressões superficiaes dão resultante: *principio* de Archimedes. Equilibrio dos corpos fluctuantes.

Applicações: nivellamento barometrico; equilibrio relativo de um liquido que gira uniformemente ao redor de um eixo vertical.

Summaria exposição historica dos diversos principios sobre que se tem fundado a Estatica.

C. — DYNAMICA

1) Dynamica de um ponto material

Equações differenciaes dynamicas do movimento linear: problemas geraes que ellas exprimem; determinação das constantes arbitrarias. Expressão d'estas equações sob a forma de equilibrio: força de inercia, equação do trabalho virtual que exprime o equilibrio dynamico.

Equações differenciaes dynamicas do movimento areolar.

Integraes geraes das equações differenciaes do movimento: Theorema do augmento da quantidade de movimento projectado — Theorema do trabalho; caso de funcção de força: theorema das forças vivas; expressão do theorema por meio das superficies do nivel. Dois casos importantes em que existe funcção de força — Theorema do accrescimo do momento da quantidade de movimento em relação a um eixo: interpretação geometrica de Resal. Caso do theorema das areas. Forças centraes: expressão differencial de uma força central nos elementos da trajectoria.

Movimento de um ponto sobre uma curva e sobre uma superficie dadas: caso de funcção de força. Dynamica do movimento relativo de um ponto material: extensão dos theoremas geraes a este movimento.

Applicações:

Movimento rectilineo em geral: casos em que a integração se reduz a quadratura — Movimento rectilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central proporcional á distancia ao centro — Movimento rectilineo e vertical, descendente e ascendente, de um ponto pesado no vacuo e num meio resistente. Observação sobre as soluções singulares em mecanica: exemplo de Poisson — Movimento de um ponto pesado sobre uma recta inclinada.

Exemplos principaes de movimento curvilineo:

Movimento dos projectis no vacuo e em um meio resistente — Movimento curvilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central: *a*) proporcional á distancia ao centro; *b*) inversamente proporcional ao quadrado da distancia ao centro: movimento dos planetas ao redor do Sol; leis de Kepler e suas immediatas consequencias.

Exemplos principaes do movimento de um ponto sobre uma curva e uma superficie: Movimento de um ponto material pesado movel sobre um circulo vertical; pendulo circular simples no vacuo; pendulo cycloidal no vacuo. Tautochrona e brachistochrona de um ponto pesado no vacuo. Pendulo circular em um meio resistente no caso de mui pequenas oscillações.

Exemplos de movimentos relativos: queda de um ponto pesado no vacuo attendendo ao movimento da terra: desvio este confirmado pela experiencia de Reich em Freyberg. Pendulo de Foucault.

2) Dynamica dos systemas materiaes

Systemas obrigados a ligações:

Reducção da dynamica dos systemas á estatica dos systemas: theorema de d'Alembert: seus differentes enunciados, e expressão analytica. Equações geraes do movimento estabelecidas pela apreciação do methodo dos multiplicadores; vantagem da introducção das indeterminadas. Exemplos do emprego do methodo. Theorema de Hamilton: equações dynamicas de Lagrange (primeira forma canonica); equações dynamicas de Hamilton (segunda forma canonica). Applicação das equações de Lagrange ao movimento de um ponto obrigado a uma esphera (pendulo conico).

Integraes da equação geral do movimento: Theorema do movimento do centro de gravidade — Theorema das quantidades de movimento proje-

ctadas — Theorema dos momentos das quantidades de movimento: theorema das areas: plano do maximo das areas; caso do plano invariavel — Theorema das forças vivas; theorema da energia: conservação da energia total do Universo; theorema de Ivon Villarceau relativo ao virial.

Summario historico dos theoremas geraes da dynamica.

Theorema de Gauss do minimo esforço. Theorema da menor acção.

Propriedades mecanicas do centro de gravidade; theorema de Kœnig; trabalho da gravidade.

Equações dos pequenos movimentos.

Estabelidade e instabelidade do equilibrio: theorema de Dirichlet. Coexistencia das pequenas oscillações e sobreposição dos pequenos movimentos.

Extensão dos theoremas geraes ao caso do movimento relativo.

Systemas invariaveis: Decomposição do movimento de um solido livre em movimento do centro de gravidade e ao redor d'este centro; expressão da somma dos momentos das quantidades de movimento e da força viva de um solido movendo-se ao redor de um eixo. Theoria dos momentos de inercia: raio de gyração; relação entre os momentos de inercia relativos a eixos parallelos; propriedade de minimo momento. Momento de inercia em relação a um eixo passante por um ponto; eixos principaes de inercia e momentos de desvio (*deviations moments, Rankine*); propriedades dos eixos principaes e sua determinação; ellipsoide central. Expressão do momento de inercia de um solido de revolução em relação ao sei eixo. Momentos de inercia das figuras planas; ellipse central. Momento de inercia polar.

Exemplos principaes da determinação de momentos de inercia.

Equações dynamicas do movimento de um solido ao redor de um eixo fixo: theoria do pendulo composto — pendulo simples synchrono; eixo de oscillação; propriedades de maximo e de minimo do tempo de uma oscillação.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: equações de Euler; formulas que exprimem as componentes de rotação instantanea nas velocidades de nutação, precessão e rotação propria do solido. Caso em que as forças passam pelo ponto fixo: dois primeiros integraes das equações de Euler; estabelecimento directo d'estes integraes. Theoria geometrica de Poinsot.

Theoria da percussão; theoremas relativos á variação da força viva na percussão. Applicação a um solido obrigado a um eixo fixo: centro de percussão. Pendulo balistico. Choque dos corpos: solução analytica de Poisson; solução geometrica de Darboux.

Hydrodynamica: equações geraes do movimento dos fluidos. Condições relativas á superficie. Fórma das equações ás differenciaes parciaes no caso de funcção de força e de funcção de velocidade. Movimento permanente de um liquido pesado: theorema de Daniel Bernouilli; sua demonstração directa; theorema de Torricelli.

II — CINEMATICA

(THEORIA DOS MECANISMOS)

Objecto de cinematica theorica, considerado como sciencia da composição e do movimento das machinas, ou theoria dos mecanismos. Breve digressão historica sobre a origem e formação d'esta sciencia — exposição critica dos systemas de classificação dos mecanismos de Monge, Hachette, Lanz e Bétancourt (1808-1819), Borgnis (1818); Limitação e denominação da sciencia por Ampère (1834); systema de Robert Willis (1841), de Laboulaye (1849), de Haton de la Goupillière (1864). Razão da imperfeição dos systemas propostos. Constituição logica e scientifica da cinematica pelo systema Reuleaux, fundado nas verdadeiras leis da formação dos mecanismos. Solução geral dos problemas das machinas: ponto de partida de Reuleaux; definição de machina. Caracteristica dos problemas relativos ás machinas. Analyse cinematica das machinas: decomposição em mecanismos, em cadeias, em binarios de elementos. Formação de um binario de elementos pela ligação reciproca dos elementos de dois binarios primitivos. Ligação de um numero qualquer de binarios de elementos: cadeia cinematica simples e composta; cadeia fechada desmodromica. Transformação da cadeia fechada em mecanismo. Pluralidade d'esta transformação. Transformação do mecanismo em machina.

Notação cinematica.

Differentes especies de binarios de elementos: condição a que deve satisfazer um binario de elementos para ser desmodromico. Binarios de elementos inferiores (parafuso, cylindro, prismo). Apoios necessarios e sufficientes dos elementos. Binarios superiores. Investigação geral dos perfis de elementos em vista de uma dada lei de movimento: processo geral de dentadura; theorema e construcção de Savary; processo approximado de Poncelet; processo de trajectorias polares auxiliares.

Caso em que a lei do movimento é definido por trajectorias polares circulares: engrenagens cylindricas nos tres typos principaes de lanterna, flancos, desenvolventes de circulo; processos de dentadura de Reuleaux. Engrenagem de cremalheira. Calculo do trabalho do attricto nos dentes de uma engrenagem. Engrenagens conicas; methodo practico de Tredgold. Engrenagens hyperboloides.

Binarios de elementos dependentes: clausura dos binarios por meio de forças sensiveis; clausura por meio de cadeias cinematicas. Elementos cinematicos ductís: binarios monocineticos (orgãos de tracção e de compressão); clausura cinematica completa dos elementos ductís.

Cadeias cinematicas dependentes: pontos mortos nos mecanismos; passagem d'estes pontos por meio de forças sensiveis ou por clausura de cadeias.

Cadeia fundamental: *quadrilatero de manivella cylindrico;* trajectorias polares da cadeia; trajectorias polares reduzidas. Mecanismos derivados da cadeia. Transformação evolutiva da cadeia: *cadeia cylindrica de manivella de impulsão;* theoria geometrica e analytica da biella. Mecanismos d'ella derivados; machinas que elles constituem.

Principios geraes de modificação accessoria de fórma: 1.º amplifica-

ção dos moendes (Zapfen-Erweiterung) — 2.ª reducção das cadeias. Applicação d'estes principios á cadeia de manivella ($C_3''P\perp$): amplificação 2 em 1 1 em 2 (excentrico), 3 em 2, 2 em 3, 1 em 2 em 3, 3 em 2 em 1.

Transformação evolutiva da amplificação annular 2 em 3: *cadeia de corrediça em cruz rectangular*; mecanismos derivados.

Reducção do numero de membros de uma cadeia: exemplifica-se nas cadeias ($C_3''P\perp$) — c; ($C_3''P\perp$) — a — c; ($C_2^{\perp}$ $C_2\perp$) — c.

Capsulismos de manivella derivados da cadeia ($C_3''P\perp$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schemas das machinas de vapor de Simpson e Shipton, de Cochrane, de Davies; schemas das bombas de Beale e de Ramelli, do ventilador de Wedding.

Capsulismos de rodas derivados da cadeia simples de rodas dentadas cylindricas ($Cz+C_2''$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (Schemas das machinas de Pappenheim, Fabry, Root, Evrard, Repsold, Dart, Révillion Galloway). Trens ordinarios de rodas dentadas; trens epicycloidaes.

Analyse cinematica das machinas tradicionalmente consideradas como *machinas simples*: alavanca, plano inclinado, cunha, roldana, sarilho, parafuso.

Analyse das machinas completas: concepção que considera a machina completa como o resultado da combinação das tres partes — receptor — transmissor — operador. Divisão das machinas em machinas de transporte e de transformação. Critica d'aquella concepção. Interpretação cinematica da machina completa.

Theoria geral do movimento das machinas.

METHODO DE ENSINO

O curso da 3.ª cadeira é dado em 70 lições (numero médio) de duas horas cada uma (seis semanaes) expostas na aula pelo professor. Depois de um certo numero de lições, que completem uma divisão do programma, os alumnos são interrogados pelo lente sobre as materias dadas (o numero dos interrogatorios não excede oito).

O professor expõe as lições sem dependencia de compendio; para o que, previamente á hora da lição, os calculos e as figuras são escriptos e traçadas com todo o desenvolvimento nas tres pedras da aula, sendo as duas horas da lição consagradas á exposição oral feita pelo professor. Indica-se, porém, como podendo servir de auxilio ao trabalho dos alumnos no estudo das lições expostas sobre o programma, a obra de *H. Laurent*, *Traité de mécanique rationnelle*, 2 vol., 2.ª edição, Paris, 1878; e faz-se opportunamente a bibliographia das principaes obras a consultar para maior desenvolvimento de alguns assumptos mais importantes do curso.

IV Cadeira — **Geometria descriptiva**

Lente (interino) *Dr. F. Gomes Teixeira.* Oito horas semanaes

I

Objecto da geometria descriptiva; methodos em geometria descriptiva: de projecção, de rebatimento, de rotação e de mudança de planos de projecção. Problemas relativos ao ponto, á recta e ao plano. (Este ensino deve ser considerado como uma recordação desenvolvida do ensino do 6.º anno dos Lyceus centraes).

Pontos e linhas de construcção situados fóra do quadro graphico. Problemas relativos aos angulos triedros: construcções respectivas.

Estudo e traçado de curvas importantes, especialmente a helice, epicycloides, envolventes de circulo.

Representação graphica do ellipsoide, hyperboloide de uma e duas folhas, e paraboloides elliptico e hyperbolico.

Superficies e seus planos tangentes: cylindro, cone e superficies de revolução. Intersecção de superficies curvas: cones e cylindros (penetração e arrancamento), intersecção de duas superficies da 2.ª ordem, de duas superficies de revolução.

Projecções cotadas: problemas relativos á linha recta e ao plano; plano tangente ao cone.

Perspectiva axonometria e cavalheira.

II

Noções de geometria projectiva.

Sombras lineares. Superficies regradas: superficies planificaveis e enviesadas. Normalias. Curvatura das superficies. Superficies heliçoidaes: superficie de parafuso de filetes triangulares, e de filetes quadrados. Superficies topographicas.

III

Noções de graphostatica: calculo graphico: theoria geometrica das figuras reciprocas em graphostatica. Equilibrio graphico dos systemas planos.

Traçado das engrenagens cylindricas, conicas e heliçoidaes. Applicações da geometria descriptiva ao corte dos solidos (Stereotomia).

V Cadeira — **Astronomia e geodesia**

Lente (interino) *L. I. Wodhouse.* Oito horas semanaes.

PRIMEIRA PARTE

ASTRONOMIA E GEODESIA

a) ASTRONOMIA

1. ***Esphera celeste e movimento diurno.***—Planos e circulos principaes da esphera celeste.—Coordenadas astronomicas.—Transformação dos differentes systemas de coordenadas astronomicas.—Medida do tempo.—Conversão das medidas do tempo.—Questões relativas ao movimento diurno.

2. ***Instrumentos astronomicos.***—Descripção e uso dos principaes instrumentos empregados nas observações astronomicas.

3. ***Variações dos planos fundamentaes a que se referem as coordenadas dos astros.***—Precessão.—Nutação.

4. ***Erros d'observação devidos á posição do observador á superficie da terra e ás propriedades da luz.***—Parallaxe.—Refracção astronomica. Effeitos da parallaxe e da refracção sobre o semi-diametros dos astros. Aberração.

5. ***Posições médias das estrellas.***—Reducção das posições médias das estrellas aos lugares apparentes, e reducção inversa.—Determinação das ascensões rectas e declinações, e da obliquidade da ecliptica.—Determinação das constantes que servem para a reducção.—Movimentos proprios das estrellas.—Constellações.—Nebulosas.

6. ***Determinação astronomica das coordenadas geographicas d'um lugar.***—Determinação do meridiano ou d'um azimuth absoluto.—Determinação do tempo e da latitude, conjuncta ou separadamente.—Determinação da differença das longitudes geographicas de dous lugares.

7. ***Systema solar.***—Movimento do sol.—Movimento da lua.—Planetas.—Satellites.—Cometas.—Eclipses do sol e da lua.—Occultações.—Dimensões absolutas do systema solar.—Parallaxe do sol.

b) GEODESIA

1. ***Triangulações geodesicas.***—Cadeias e redes geodesicas.—Bases.—Triangulação de 1.ª ordem e triangulações secundarias.—Estações e signaes geodesicos.

2. ***Medida das bases.***—Réguas geodesicas.—Correcção e precisão da medida d'uma base.

3. ***Medida dos angulos.***—Methodos empregados na medida dos angulos.—Instrumentos repetidores e reiteradores.

4. ***Calculo dos triangulos geodesicos.***—Methodos de resolução dos triangulos.—Calculo dos triangulos.—Correcções angulares.—Compensação das redes.

5. *Coordenadas das estações geodesicas.*—Determinação dos azimuths, latitudes e longitudes.—Calculo das coordenadas geographicas d'uma estação em funcção dos mesmos elementos n'outra estação.—Distancias á meridiana e á perpendicular.

6. *Fórma e grandeza da terra.*—Medida d'um arco de meridiano ou de parallelo.—Formulas e dados numericos applicaveis ao ellipsoide terrestre.—Achatamento da terra.—Determinação do metro.—Determinação da figura da terra deduzida das operações geodesicas.

7. *Nivellamento geodesico.*—Refracção geodesica.—Nivellamento trigonometrico.—Nivellamento de precisão.—Nivellamento barometrico.

8. *Projecções cartographicas.*—Projecção estereographica.—Projecção por desenvolvimento.

SEGUNDA PARTE

TOPOGRAPHIA

a) PLANIMETRIA

1. *Noções preliminares.*—Limites da geodesia e da topographia.—Definições e principios.

2. *Methodos geraes de levantamento das plantas.*—Methodos geometricos.—Methodo trigonometrico.—Cartas topographicas.—Orientação.

3. *Alinhamentos.*—Traçado dos alinhamentos.—Medida directa e indirecta dos alinhamentos.—Instrumentos empregados.

4. *Traçado e medida dos angulos.*—Traçado dos angulos.—Instrumentos empregados.—Medida dos angulos.—Bussolas.—Goniometros.—Goniographos.

5. *Traçado das plantas.*—Methodo graphico e methodo numerico.—Traçado das rectas e dos angulos.—Curvas de concordancia.—Calculo das coordenadas.—Régua de calculo.—Copia e reducção das plantas.—Escalas.

b) ALTIMETRIA

1. *Methodos geraes de nivellamento.*—Methodo geometrico.—Methodo trigonometrico.—Methodo barometrico.—Instrumentos empregados no nivellamento.—Practica do nivellamento.—Sondagens.

2. *Figurado do terreno.*—Traçado das curvas de nivel.—Representação graphica do relevo das superficies.

3. *Instrumentos de planimetria e nivellamento.*—Theodolito.—Tacheometro.—Omnimetro.

4. *Estudos d'estradas e caminhos de ferro.*—Methodo por perfis longitudinal e transversaes.—Methodo tacheometrico.—Traçado definitivo.

c) LEVANTAMENTOS SUBTERRANEOS

1. Methodo geral.
2. Traçado e medida dos alinhamentos.

3. Medida dos angulos.—Instrumentos empregados.
4. Nivellamento subterraneo.
5. Operações topographicas necessarias para a abertura das galerias, tunneis e poços.
6. Orientação das plantas das minas.
7. Traçado das plantas subterraneas.
8. Representação graphica dos trabalhos das minas.
9. Cartas mineiras.

d) AGRIMETRIA

Cadastro.—Problemas d'agrimetria.

N. B. A exposição do ***methodo dos menores quadrados*** e do ***calculo das probabilidades*** fica incluida no programma da 2.ª cadeira.

VI Cadeira — **Physica**

Lente *Dr. Adriano de Paiva* (seis horas semanaes)

PRIMEIRA PARTE

(16 lições)

LIÇÃO 1.ª

Preliminares

Definições. — Sciencias dos objectos e sciencias dos phenomenos. — Collocação da physica propriamente dicta no quadro geral dos conhecimentos.— Leis e theorias physicas. — Representação algebrica das leis physicas. Exemplificações. — Representação graphica ou geometrica das leis physicas. Emprego das curvas e do methodo dos planos cotados. Apparelhos registradores. — Combinação d'estes modos de representação para chegar ao estabelecimento das leis. — Hypotheses: seu emprego, valor, importancia e escolha.

LIÇÃO 2.ª

Noções de mechanica.—Do movimento

Mechanica e suas divisões.— Cinematica. Differentes especies de movimento.— Movimento uniforme e movimento variado. —Movimento rectilineo uniformemente variado.— Translação e rotação. Movimento helicoidal.— Composição dos movimentos. Parallelogrammo das velocidades. Parallelogrammo das accelerações.

LIÇÃO 3.ª

Da força

Primeira noção da força. — Leis fundamentaes da mechanica. Lei da inercia. Principio de Gallileu. Consequencias. — Força resultante e forças

componentes. — Parallelogrammo, parallelipipedo e polygono das forças. — Momentos das forças. — Composição de forças parallelas no mesmo ou em differente sentido. — Centro de forças parallelas.

LIÇÃO 4.ª

Continuação das noções de mechanica

Binarios ou conjugados de forças. — Theoria dos binarios. — Composição dos binarios. — Composição das forças applicadas a um solido. — Condições d'equilibrio de um corpo solido. — Theoria do movimento curvilineo. Caso do movimento circular uniforme. — Lei da acção e reacção. Choque dos corpos.

LIÇÃO 5.ª

Machinas em geral. — Unidades mechanicas

Machinas simples e compostas. — Condições d'equilibrio na alavanca e no plano inclinado. — Trabalho mechanico e força viva. — Theorema das forças vivas. — Principio da transmissão do trabalho. Resistencias passivas. Rendimento. Impossibilidade do movimento perpetuo. — Medida das grandezas mechanicas. Unidades que têm sido adoptadas. Unidades mechanicas do systema C. G. S.

LIÇÃO 6.ª

Machinas que a physica emprega em diversas medições

Importancia da medição rigorosa. Micrometria. — Noticia geral sobre o espherometro, comparador, cathetometro e machinas de dividir. — Balanças. Theoria da balança de precisão.

LIÇÃO 7.ª

Gravidade

Determinação experimental das leis da queda dos corpos. — Peso. Centro de gravidade. — Equilibrio dos solidos apoiados ou suspensos. Condições d'estabilidade. — Movimento dos projectis.

LIÇÃO 8.ª

Pendulo

Pendulo simples e composto. — Determinação da intensidade da gravidade. — Outras applicações do pendulo. — Movimentos periodicos em geral. — Formula fundamental do movimento vibratorio.

LIÇÃO 9.ª

Attracção universal

Causas que fazem variar a intensidade da gravidade. — Attracção ou gravitação planetaria deduzida das leis de Kepler. Sua identidade com a gravidade. — Attracção universal. — Experiencias de Bouguer, Maskeline, Airy e outros. — Balança de Cavendish.

LIÇÃO 10.ª

Elasticidade

Modo de conceber a elasticidade em todos os corpos. — Propriedade geral da compressibilidade. Sua demonstração para os liquidos; piezometros. — Formas particulares da elasticidade privativas do estado solido. — Leis da elasticidade por tracção, torsão e flexão. — Limites de elasticidade. — Tenacidade. — Applicações.

LIÇÃO 11.ª

Hydrostatica

Liquidos considerados independentemente da acção da gravidade. — Principio de Pascal. — Distribuição das pressões nos liquidos pesados. — Composição das pressões exercidas sobre uma superficie qualquer no seio d'um liquido. — Resultante da totalidade das pressões exercidas pelos liquidos sobre os vasos. Resultante das pressões exercidas sobre um corpo mergulhado no liquido; principio d'Archimedes. — Theoria da fluctuação nos liquidos e suas applicações.

LIÇÃO 12.ª

Capillaridade

Phenomenos capillares em geral. — Influencia das attracções moleculares sobre a distribuição das pressões nos liquidos. Pressão molecular. Differente fórma da superficie terminal e sua influencia sobre o valor d'esta pressão. Explicação das differenças de nivel. — Formula de Laplace. — Experiencias de Plateau. — Differentes phenomenos devidos á capillaridade.

LIÇÃO 13.ª

Pneumostatica

Caracteres do estado aeriforme. — Extensão aos gazes dos principios fundamentaes da hydrostatica. — Differenças entre as duas ordens de fluidos. — Gazes sujeitos á acção da gravidade. — Aerostatos. — Pressão atmospherica. Barometria.

LIÇÃO 14.ª

Lei de Mariotte

Differentes enunciados da lei de Mariotte.--Sua demonstração experimental. Experiencias de Boyle, Mariotte, Oersted e Swendsen, Despretz, Pouillet, Dulong e Arago, Regnault, Natterer, Cailletet. — Consequencias theoricas e práticas. — Misturas gazosas. — Manometros. Volumenometro.

LIÇÃO 15.ª

Machinas de rarefacção e compressão do ar

Machina pneumatica ordinaria. — Vantagens da machina de dous corpos de bomba.--Impossibilidade de realisar o vacuo perfeito. Aperfeiçoamento de Babinet.--Machina de Bianchi.—Machina de Deleuil.--Machinas de mercurio. -- Outros apparelhos para a rarefacção do ar. -- Machinas e bombas de compressão.

LIÇÃO 16.ª

Hydrodynamica

Esgoto dos liquidos. — Theorema de Torricelli. Constituição da veia liquida. — Esgoto constante. Modos diversos de o realisar. — Esgoto dos gazes. — Applicações. Noções sobre algumas machinas hydraulicas.

SEGUNDA PARTE

ACUSTICA

(6 LIÇÕES)

—

LIÇÃO 17.ª

Apreciação numerica dos sons

Producção e qualidades do som. — Methodos e apparelhos empregados para medir o numero de vibrações. — Apparelhos registradores. Phonautographo. Phonographo. — Limites de perceptibilidade. — Leis numericas da consonancia, ou theoria physica da musica.

LIÇÃO 18.ª

Modo e velocidade de propagação do som

Propagação das vibrações em um cylindro indefinido. Vibrações longitudinaes e transversaes. — Propagação em um meio indefinido. Seu mechanismo. Variação da intensidade com a distancia. — Reflexão e refracção

sonora. — Velocidade do som dada theoricamente. Sua determinação experimental.

LIÇÃO 19.ª

Vibrações longitudinaes

Propagação das vibrações em um cylindro limitado. Reflexão com ou sem mudança de signal. — Tubos sonoros. — Leis de Bernouilli. — Experiencias para verificação d'estas leis. Causas do desaccôrdo. — Methodos de Dulong e Wertheim para determinar a velocidade do som. — Vibrações longitudinaes das varas e das cordas.

LIÇÃO 20.ª

Vibrações transversaes

Cordas vibrantes. — Leis das vibrações transversaes das cordas suppostas perfeitamente flexiveis. — Verificações experimentaes; sonometro. — Influencia da rigidez. — Relação entre as vibrações longitudinaes e transversaes das cordas. — Vibrações transversaes da vara elastica. Suas leis. — Diapasão.

LIÇÃO 21.ª

Vibrações compostas

Sobreposição de duas vibrações isochronas. Differentes modos de a realisar. — Vibrações das placas e das membranas. — Figuras de Chladni. Sua explicação. — Composição das vibrações de differente duração. Pulsações sonoras. — Sons resultantes; sua causa. — Composição das vibrações rectangulares.

LIÇÃO 22.ª

Analyse e synthese dos sons

Analyse dos sons. — Sons compostos. Fórma da vibração. Timbre. Decomposição do som pelo ouvido. Analyse pelos resoadores de Helmholtz combinados com as chammas manometricas de Kœnig. — Synthese dos sons. — Explicação dos phenomenos da voz. — Mechanismo da audição.

TERCEIRA PARTE

CALOR

(13 LIÇÕES)

LIÇÃO 23.ª

Instrumentos para a apreciação do calor

Thermometria. — Definição rigorosa de temperatura. — Differentes especies de thermometros. — Calorimetria. — Unidade prática de calor ou calo-

ria. Calor especifico.--Differentes especies de calorimetros.—Emprego geral d'estes apparelhos.

LIÇÃO 24.ª

Dilatação dos corpos pelo calor

Dilatação dos solidos.—Determinação experimental do coefficiente de dilatação linear. Apparelhos de Lavoisier e Laplace, e de Ramsden.—Dilatação absoluta e apparente dos liquidos. Dilatação absoluta do mercurio. Experiencias de Dulong e Petit. Experiencias de Regnault.

LIÇÃO 25.ª

Dilatação dos corpos pelo calor (continuação)

Dilatação apparente do mercurio. Thermometro de peso.—Dilatação de solidos e liquidos quaesquer. Dilatação da agua. Maximum de densidade. —Dilatação dos gazes. Primeiras experiencias. Lei de Gay Lussac. Experiencias de Regnault.—Thermometro de ar.

LIÇÃO 26.ª

Avaliação rigorosa das densidades

Correcções da pesagem ordinaria.--Exposição e modo de correcção dos processos empregados na determinação das densidades dos solidos e liquidos.--Areometros de volume variavel. Alcoometro de Gay Lussac.—Densidade dos gazes.--Methodo de Regnault.--Peso d'um dado volume de gaz.

LIÇÃO 27.ª

Natureza do calor

Hypotheses sobre a natureza do calor.—Theoria thermodynamica.—Transformação do trabalho em calor.—Transformação do calor em trabalho.—Equivalente mechanico do calor. Processos de determinação.—Significação do segundo principio da thermodynamica.—Explicação d'alguns phenomenos.—Interpretação dos estados dos corpos. Constituição thermomechanica dos gazes.--Materia radiante.

LIÇÃO 28.ª

Calores especificos

Determinação dos calores especificos dos solidos e liquidos.—Calor especifico dos gazes a pressão constante. Experiencias de Delaroche e Berard. Indicação dos resultados das experiencias de Regnault.—Calor especi-

fico dos gazes a volume constante. Experiencia de Clement e Desormes. -- Leis dos calores especificos; sua interpretação theorica.

LIÇÃO 29.ª

Fusão e solidificação

Passagem dos solidos ao estado liquido. Leis da fusão. — Leis da solidificação. — Variações dos pontos de fusão e de solidificação. Superfusão. Mudança de volume durante a fusão. — Fusão das ligas. — Allotropia. — Regelação e sua theoria. — A fusão é um trabalho; seu equivalente em calor.

LIÇÃO 30.ª

Identidade dos gazes e dos vapores

Dos vapores no vacuo. —Vapores não saturantes ou não saturados. -- Vapores saturantes ou saturados. Propriedade das paredes frias. — Medida da tensão maxima dos vapores: 1.° entre 0° e 100°; 2.° abaixo de 0°; 3.° a temperaturas quaesquer. Indicação das experiencias de Regnault. Resultados. Applicações.—Continuidade do estado liquido e gazoso. — Liquifacção dos gazes.

LIÇÃO 31.ª

Formação dos vapores

Evaporação e ebullição. — Formula de Dalton sobre a evaporação. — Frio produzido pela evaporação. — Evaporação em um espaço limitado. -- Misturas de gazes e vapores. — Peso do ar humido. — Ebullição: suas leis. Marmita de Papin. Variações anormaes do ponto d'ebullição.--Phenomenos produzidos nos vasos muito quentes.

LIÇÃO 32.ª

Calor de vaporisação.— Densidade dos vapores

A vaporisação é um trabalho; seu equivalente em calor. — Determinação do calor de vaporisação. Calorimetro de mercurio de Favre e Silbermann. Calor de vaporisação da agua. — Determinação da densidade dos vapores. Processos de Gay' Lussac, Hofmann, Dumas, Sainte-Claire Deville e Troost. -- Densidade theorica dos gazes e dos vapores.

LIÇÃO 33.ª

Conductibilidade calorifica

Como se propaga o calor atravez dos corpos.--Conductibilidade em um muro homogeneo de faces extremas indefinidas. — Coefficientes de conducti-

bilidade. Sua medida. — Caso da barra alongada. Lei de Lambert. — Conductibilidade dos liquidos e dos gazes. Convexão.

LIÇÃO 34.ª

Applicações do calor aos phenomenos naturaes

Hygrometria. — Problema fundamental da hygrometria.—Modos experimentaes de o resolver. Hygrometros. — Meteoros aquosos. — Movimentos da atmosphera e dos mares. — Calor solar. Sua medida. Hypotheses sobre a origem do calor solar.

LIÇÃO 35.ª

Machinas thermicas

Historia e descripção da machina a vapor. — Locomotivas. — Theoria da machina a vapor. — Outras machinas thermicas.—Origem da força animal. -- Trabalho chimico dos vegetaes.

QUARTA PARTE

OPTICA

(18 LIÇÕES)

LIÇÃO 36.ª

Propagação da luz em um meio homogeneo. Sua velocidade

Luz. Hypotheses sobre a sua natureza. -- Ondas e raios luminosos. -- Lei da propagação rectilinea. —Theoria da sombra e da penumbra. Imagens atravez de pequenas aberturas. — Determinação da velocidade de propagação da luz no vacuo e em meios differentes. Methodos de Rœmer, Bradley, Fizeau, Foucault.

LIÇÃO 37.ª

Reflexão da luz

Leis da reflexão da luz: reflexão regular e irregular. — Espelhos planos. — Imagens d'um ponto e d'um objecto; deslocamento pelo movimento do espelho. — Reflexão em dous espelhos inclinados. Numero das imagens. Kaleidoscopios.--Reflexão nos espelhos parallelos.—Goniometros de reflexão. — Heliostatos.

LIÇÃO 38.ª

Espelhos curvos

Espelhos esphericos; definições. — Foco principal e focos conjugados no espelho concavo de pequena abertura. — Espelhos conjugados. — Deduc-

ção e discussão da formula que liga as distancias focaes conjugadas com o raio de curvatura. — Eixo principal e eixos secundarios. Imagens. — Espelho convexo. — Aberração de esphericidade: causticas de reflexão. — Espelhos parabolicos. Espelhos conicos e cylindricos. Anamorphoses.

LIÇÃO 39.ª

Refracção da luz

Leis de Descartes sobre a refracção. — Indice de refracção: absoluto e relativo; directo e inverso. Angulo limite. Reflexão total. Miragem. — Interpretação das leis da reflexão theorica e da refracção no systema da emissão. Sua insufficiencia e contradicção com a experiencia. Explicação pelo systema das ondulações.

LIÇÃO 40.ª

Refracção nos meios terminados por planos

Refracção da luz nos meios de faces parallelas. — Refracção nos meios de faces obliquas. — Formulas fundamentaes do prisma. Limite de emergencia. Circumstancias que influem sobre a grandeza e sentido do desvio. — Desvio minimo. — Methodos para a determinação dos indices de refracção nos solidos, liquidos e gazes.

LIÇÃO 41.ª

Lentes

Refracção nos meios terminados por superficies curvas. — Differentes especies de lentes. — Focos na lente biconvexa. — Formula das lentes; sua deducção e discussão. — Centro optico. — Eixo secundario. — Imagens. — Lente biconcava e outras. — Aberração de esphericidade: causticas de refracção. — Laryngoscopio.

LIÇÃO 42.ª

Espectrologia

Decomposição da luz solar. — Espectro luminoso. — Ideias de Newton. Desegual refrangibilidade das côres; sua recomposição. Mistura das côres. — Riscas de Frauenhofer. — Spectroscopio. — Espectro calorifico. Apparelho de Melloni. — Espectro chimico. Actinometria.

LIÇÃO 43.ª

Transmissão das radiações

Primeiro caso; raios simples. — Formula theorica. Transmissão da luz atravez dos corpos; transmissão nos gazes. Transmissão dos raios calorifi-

cos e chimicos medios. Transmissão dos calores obscuros. Transmissão dos raios ultra-violetas. — Segundo caso; fasciculos complexos. — Experiencias de Melloni. -- Reflexão e diffusão das radiações.

LIÇÃO 44.ª

Emissão das radiações

Lei geral da emissão. — Emissão dos calores obscuros. — Comparação dos poderes emissivos. Influencia da temperatura. Velocidade do resfriamento. — Emissão da luz. — Photometria. Unidades photometricas. Differentes especies de photometros. Poder illuminante. Photometria chimica. — Espectros de differentes luzes. — Analyse espectral.

LIÇÃO 45.ª

Absorpção e transformação das radiações

Poder absorvente; lei de Leslie. Applicação ás chammas gazosas: inversão das riscas no espectro. — Constituição chimica dos corpos celestes. — Transformação das radiações absorvidas. — Phosphorescencia e fluorescencia.

LIÇÃO 46.ª

Photochimica

Transformação em trabalho chimico das radiações absorvidas pelos corpos. — Acções reductoras e oxidantes. — Effeitos sobrepostos. — Substancias impressionaveis e reveladoras. — Acção sobre os vapores. — Acção dos raios simples. — Heliochromia. — Acção da luz sobre as folhas das plantas. — Photographia.

LIÇÃO 47.ª

Instrumentos opticos

Primeira cathegoria d'instrumentos opticos. — Microscopio simples. — Camara escura. — Camara clara. — Lanterna magica. — Microscopio solar. — Pharoes. — Do olho humano como instrumento optico. Visão.

LIÇÃO 48.ª

Continuação dos instrumentos opticos

Theoria geral dos instrumentos opticos compostos. — Diaphragma. Campo. Eixo optico. Reticulo. Tiragem. — Amplificação. — Claridade. — Oculos. — Telescopios. -- Microscopio composto.

LIÇÃO 49.ª

Interferencias

Principio das interferencias. — Experiencia dos dous espelhos. Leis do phenomeno. Diversos modos de produzir a interferencia. Explicação das interferencias pela theoria das ondulações. — Diffracção; fendas estreitas; sombra d'um cabello. — Anneis corados. Sua theoria.

LIÇÃO 50.ª

Polarisação e direcção das vibrações

Propriedades dos raios polarisados. — Dupla refracção. Polarisação do raio ordinario, Lei de Malus. Polarisação do raio extraordinario. Turmalina. —Direcção das vibrações luminosas. — Reflexão e refracção da luz polarisada.--Raio reflectido; angulo de polarisação. Lei de Brewster. Polarisação pela refracção.

LIÇÃO 51.ª

Dupla refracção uniaxial

Theoria da dupla refracção uniaxial. — Constituição dos crystaes. — Construcção de Huyghens. — Verificações experimentaes. — Applicações. Prismas de Rochon e de Wollaston. Prisma de Nicol.

LIÇÃO 52.ª

Vibrações ellipticas

Theoria geral das vibrações ellipticas. — Analysador. — Vibrações circulares. — Côres das laminas delgadas crystallisadas. — Caso d'uma lamina normal ao eixo.

LIÇÃO 53.ª

Rotação do plano das vibrações

Polarisação rotatoria. Leis do phenomeno. Côr sensivel. — Theoria de Fresnel. — Poder rotatorio molecular. — Saccharimetria. — Relação entre o poder rotatorio e a fórma crystallina.

QUINTA PARTE

ELECTRICIDADE E MAGNETISMO

(21 LIÇÕES)

LIÇÃO 54.ª

Natureza e producção da electricidade

Factos geraes. Conductores e isoladores; reservatorio commum. — Existencia de dous estados electricos; separação pelo attrito. — Hypotheses sobre a natureza da electricidade. — Electricidade estatica e dynamica. — Machinas electricas fundadas sobre o attrito. — Experiencias diversas.

LIÇÃO 55.ª

Leis das acções electricas

Leis das attracções e repulsões. — Balança de Coulomb. — Methodo das oscillações. — Experiencias de Harris. — Leis da perda da electricidade. Perda pelo ar. Experiencias de Matteucci. Perda pelos isoladores. — Leis da distribuição electrica á superficie dos corpos conductores. — Methodo do plano de prova. Causas d'erro. Resultados. Poder das pontas.

LIÇÃO 56.ª

Influencia electrostatica

Estudo experimental da influencia. Influencia sobre um conductor no estado natural. Caso d'um conductor electrisado; electroscopio de folhas de ouro. Caso dos corpos maus conductores. — Theoria da faisca electrica. — Movimento electrico dos corpos leves. — Machinas electricas fundadas sobre a influencia electrostatica.

LIÇÃO 57.ª

Potencial electrico

Potencial de um conductor electrisado. Definição experimental. — Definição mathematica do potencial electrico em um ponto. — Propriedades do potencial. — Potencial de um ponto relativamente a um systema qualquer de massas electricas. — Superficies equipotenciaes. — Linhas de força. — Potencial dos conductores electrisados. — Potencial da terra. — Equilibrio electrico sobre um conductor. — Capacidades electricas. — Equilibrio entre diversos conductores. — Theoria da influencia electrostatica.

LIÇÃO 58.ª

Medida dos potenciaes. — Condensação electrica

Determinação experimental dos potenciaes electricos. — Breve noticia sobre os principaes electrometros. — Condensação da electricidade. — Estudo experimental d'este phenomeno. — Theoria da condensação. — Poder condensante. — Medida das capacidades. — Influencia dos dielectricos.

LIÇÃO 59.ª

Electricidade atmospherica

Instrumentos para a observação da electricidade da atmosphera. — Factos geraes. — Electricidade das nuvens. — Origens da electricidade atmospherica. — Relampago. — Trovão. — Raio e suas particularidades. Pára-raios. — Digressão sobre outros phenomenos luminosos da atmosphera.

LIÇÃO 60.ª

Corrente electrica

Causas que podem produzir uma differença de potencial. Definição de força electro-motriz. — Corrente electrica: maneira de conceber a sua propagação nos conductores solidos. — Intensidade da corrente. — Primeiras ideias sobre o modo de a avaliar. — Experiencia de Oersted. Galvanometro. — Thermo-electricidade. Elementos e pilhas thermo-electricas. — Hydro-electricidade. Correlação entre a producção da corrente e o exercicio da actividade chimica. Hypotheses electro-chimicas. Maneira de conceber a propagação da corrente nos liquidos.

LIÇÃO 61.ª

Electrolyse

Condições de producção dos phenomenos electrolyticos. — Effeitos da passagem da corrente atravez da agua e de outras cathegorias de compostos. — Acção principal e acções secundarias. — Phenomenos de transporte. — Theorias de Grotthus e de Clausius. — Leis da electrolyse; lei de Faraday. Quantidade de electricidade. Voltametro. — Applicações geraes da electrolyse. Galvanoplastia, douradura e prateamento.

LIÇÃO 62.ª

Pilhas hydro-electricas

Historia das primeiras pilhas. Pilha de Volta e suas principaes modificações. — Causas do enfraquecimento da corrente. Processos propostos para

as evitar. — Classificação das pilhas actualmente conhecidas. — Principaes pilhas de um liquido sem despolarisante; de um liquido com despolarisante solido ou liquido; de dous liquidos. — Pilhas de gazes. — Pilhas seccas. — Pilhas secundarias. Accumuladores electricos.

LIÇÃO 63.ª

Leis de Ohm

Demonstração experimental das leis de Ohm para o caso das pilhas thermo-electricas. — Conductores equivalentes. Comprimento reduzido. Resistencia. — Caso das pilhas hydro-electricas. — Digressão sobre as bussolas dos senos e das tangentes e outros apparelhos galvanometricos. — Formula geral exprimindo a intensidade da corrente na força electro-motriz e na resistencia total. — Discussão. — Modos de associação dos elementos d'uma pilha. — Derivação das correntes: theoremas de Kirchhoff.

LIÇÃO 64.ª

Unidades electricas. — Medida das constantes das pilhas

Indicação geral do systema de unidades adoptadas na medida das principaes grandezas electricas. — Definição do *ohm*, do *ampère*, do *volt*, do *coulomb* e do *farad*. Multiplos e submultiplos. — Exposição succinta dos principaes methodos empregados para a medida das resistencias e das forças electro-motrizes. Resultados.

LIÇÃO 65.ª

Leis de Joule

Medida do calor desenvolvido nos conductores. — Temperatura do circuito. — Temperaturas nas soldaduras d'um circuito. — Arco voltaico. — Principaes systemas de illuminação pela electricidade.

LIÇÃO 66.ª

Leis d'Ampère

Acções reciprocas das correntes. — Correntes parallelas. — Correntes angulares. — Porções d'uma mesma corrente rectilinea. — Correntes sinuosas. — Effeito d'uma mudança de sentido. — Corrente terrestre. Propriedades d'uma corrente indefinida. Acção da terra sobre as correntes. — Solenoides.

LIÇÃO 67.ª

Theoria e constituição dos magnetes

Analogias entre os magnetes e os solenoides. Theoria de Ampère sobre a constituição dos magnetes. — Acção das correntes sobre os magnetes. —Influencia magnetica.—Processos de magnetisação pela influencia dos magnetes.— Magnetisação pela terra. — Magnetisação pelas correntes. — Electromagnetes.

LIÇÃO 68.ª

Avaliação das acções magneticas

Leis das attracções e repulsões magneticas. Methodo das oscillações. Methodo da balança de torsão. — Distribuição do magnetismo. — Substancias magneticas e diamagneticas; explicação do diamagnetismo.

LIÇÃO 69.ª

Magnetismo terrestre

Binario terrestre. Definição da inclinação e declinação. — Medida da declinação; principaes modelos das bussolas de declinação. — Medida da inclinação; bussola de inclinação. — Intensidade magnetica. — Estado magnetico do globo. — Calculo da intensidade e da inclinação. — Equador, meridianos e parallelos magneticos. Linhas sem declinação. Variações da declinação e da inclinação.

LIÇÃO 70.ª

Correntes de inducção

Inducção pelas correntes e pelos magnetes. — Inducção pela terra. — Lei de Lenz. — Inducção nas massas metallicas: magnetismo de rotação.— Self-inducção ou inducção d'uma corrente sobre si mesma. — Correntes induzidas de diversas ordens. — Inducção pela electricidade estatica.

LIÇÃO 71.ª

Machinas de inducção voltaica

Leis sobre as quantidades d'electricidade e sobre as forças electro-motrizes das correntes de inducção. — Machina de inducção de Ruhmkorff. Partes diversas de que se compõe e principaes aperfeiçoamentos. Effeitos geraes. Estratificações. Acções magneticas. — Indicação de alguns apparelhos volta-faradicos para usos medicos.

LIÇÃO 72.ª

Machinas dynamo-electricas

Noções geraes sobre os diversos systemas de machinas dynamo-electricas. — Machinas magneto-electricas de Pixii e de Clarke. — Modificações para usos medicos. Machina de Nollet. — Bobina de Siemens. Machina de Wilde. — Emprego da armadura induzida em forma de annel. Machinas de Gramme; progressos que realisam. Auto-excitação. Reversibilidade.

LIÇÃO 73.ª

Motores e telegraphos electricos

Indicação d'alguns motores electricos. Sua theoria. — Telegraphia electrica. Partes componentes d'um telegrapho electrico.— Systema Breguet. — Telegrapho escrevente de Morse. — Progressos recentes da telegraphia.

LIÇÃO 74.ª

Applicações differentes da electricidade

Telephonia electrica. Principios em que se fundam os telephones mais usados. Microphones. — Applicação da electricidade ao transporte da força a distancia. — Transmissão electrica dos effeitos luminosos, ou telescopia electrica. — Outras applicações da electricidade.

VII Cadeira — Chimica inorganica

Lente: *Dr. José Diogo Arroyo*. 8 horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

CHIMICA INORGANICA GERAL

I. NOÇÕES GERAES

1. *Preliminares.* — Phenomenos, leis e theorias.—Objecto da chimica inorganica e da chimica organica; unidade da chimica. Da acção chimica, principaes categorias de phenomenos chimicos: combinações directas e indirectas, immediatas e provocadas, limitadas e illimitadas, instantaneas e lentas; reacções exothermicas e endothermicas. — Especies chimicas; propriedades organolepticas, physicas e chimicas servindo para as definir; mixto e composto. — Analyse e synthese.

*

2. *Classificação das especies chimicas.* — Os elementos. — Os corpos compostos; funcções chimicas dos compostos mineraes.

3. *Nomenclatura chimica.*

4. *Leis numericas.* — 1. Lei da conservação da materia. — 2. Lei das proporções definidas. — 3. Lei das proporções multiplas. — 4. Lei dos numeros proporcionaes ou da proporcionalidade. — 5. Lei dos volumes: consequencias importantes da Lei de Gay-Lussac, relativas ás densidades gazosas e aos numeros proporcionaes. — 6. Lei dos calores especificos. — 7. Lei das decomposições electrolyticas de Faraday. — 8. Lei do isomorphismo.

Consequencias d'estas leis: Numeros proporcionaes em peso; unidades adoptadas; importancia para a fixação das formulas chimicas. — Numeros proporcionaes em volume; formulas geraes; unidades adoptadas; volume gazoso occupado pelo numero proporcional em peso e pela unidade de peso; calculo theorico do peso do litro dos diversos gazes. Densidades theoricas.

5. *Formulas e equações chimicas.* — Formulas chimicas baseadas na noção de numero proporcional e nas leis geraes. Determinação das formulas empiricas. Equações chimicas; regras para a determinação dos coefficientes numericos das equações chimicas. Applicações das equações chimicas, em especial para os gazes. Deduzir o volume de um gaz da equação da reacção que o produziu.

7. *Theoria atomica e dos equivalentes.* — Equivalentes dos corpos simples. Equivalente dos corpos compostos. Volume gazoso occupado pelo peso equivalente. — Pesos atomicos. Pesos moleculares. Volume molecular, formulas geraes. Densidades de vapor; densidades anormaes. — Subsidios que os dados da theoria atomica fornecem ás hypotheses sobre a constituição da materia. — Comparação da theoria dos equivalentes com a theoria atomica. — Transformação das formulas equivalentes em atomicas e vice-versa. — Valencia e atomicidade dos elementos.

8. *Causas que facilitam e determinam as acções chimicas.* — Acção do calor, dos agentes mecanicos (compressão, percussão, attrito) e dos agentes chamados de contacto. — Acção da electricidade. — Acção da luz. — Influencia de acções chimicas simultaneas.

9. *Noções de mecanica chimica.* — *Principios geraes de thermo-chimica.* Affinidade chimica. Os tres principios fundamentaes da thermo-chimica segundo Berthelot. Consequencias principaes do principio dos trabalhos moleculares. Importancia do principio do trabalho maximo: reacções completas e incompletas. — Applicação das leis de thermo-chimica á previsão das reacções dos acidos, bases e saes sobre os saes; leis de Berthollet e seu valor.

Apparelhos e methodos calorimetricos. — Calorimetro de Berthelot. Detonador ou bomba calorimetrica. Exemplos de algumas operações de calorimetria chimica.

Dissociação. Estudo especial do phenomeno da dissociação.

Isomeria. Isomeria, especialmente a allotropia.

10. *Classificação dos metalloides e dos metaes.* Classificação dos metalloides por Dumas. Classificação dos metaes por Thénard, e classificação natural. Bases da classificação de Mendelejeef.

II. ESTUDO PARTICULAR DOS METALLOIDES

1. *Hydrogenio. Chloro, Bromo, iodo* e *fluor.* Estado natural, propriedades, preparação d'estes metalloides, e suas principaes applicações. Resenha dos principaes dos seus compostos.

2. *Oxygenio e ozono. Enxofre, selenio e tellurio.* Estado natural, preparação, propriedades e applicações d'estes metalloides. Principaes compostos.

3. *Azoto.* (*Ar atmospherico*). *Phosphoro, arsenio e antimonio.* Estado natural, extracção, propriedades e applicações d'estes corpos. Principaes compostos.

4. *Boro.* — *Carbono e silicio.* Estado natural, preparação, propriedades e applicações d'estes corpos. Principaes compostos.

III. COMPOSTOS DOS METALLOIDES COM O HYDROGENIO

1. *Acidos chlorhydrico, bromhydrico, iodhydrico e fluorhydrico.* — Generalidades sobre estes compostos. Estado natural, preparação, propriedades, usos e applicações.

2. *Agua e agua oxigenada. Acido sulfhydrico e per-sulfureto de hydrogenio; acidos selenhydrico e tellurhydrico.* — Generalidades sobre estes compostos. Preparação, propriedades e applicações dos principaes.

3. *Compostos hydrogenados dos metalloides da familia do azoto; e hydrogenio siliciado.* — Generalidades. — Ammoniaco, estado natural, producção e preparação; purificação; propriedades e principaes applicações. — Phosphamina e outros phosphoretos de hydrogenio. — Hydrogenio arseniado; processo de Marsh para a indagação do arsenio. — Hydrogenio antimoniado. — Hydrogenio siliciado.

IV. COMPOSTOS DOS METALLOIDES COM O OXYGENIO E COM OS OUTROS METALLOIDES

1. *Combustão.* — Temperatura e calor de combustão. Constituição das chammas: combustões lentas e vivas; applicações mais importantes.

2. *Compostos oxygenados do chloro, do bromo e do iodo.*

3. *Compostos oxygenados do enxofre e dos metalloides da 2.ª familia.*—Generalidades. Acidos sulfuroso e sulfurico. Acidos polythionicos. Chloretos e oxy-chloretos de enxofre.

4. *Compostos oxygenados do azoto.* Generalidades. Prot'oxydo de azoto. — Acido hypo-azotoso. — Bi-oxydo de azoto.—Acido azotoso.—Per-oxydo de azoto.—Acido azotico anhydro, mono-hydratado e tetra-hydratado.—Acido per-azotico. — Hydroxylamina. — Chloretos, brometo, iodeto e sulfureto de azoto. Oxy-chloretos e oxy-brometos d'azoto.

5. *Compostos oxygenados do phosphoro, do arsenio e do antimonio.* — Acidos hypo-phosphoroso, phosphoroso, phosphatico e phosphorico. Chloretos, brometos e iodetos de phosphoro; oxy-chloreto de phosphoro.— Acidos arsenioso e arsenico. — Sulfuretos de arsenio e seus usos. — Acido

antimonioso; oxydo intermedio de antimonio; acido antimonico. — Tri-chloreto, penta-chloreto e oxy-chloreto de antimonio. Sulfuretos e oxy-sulfuretos de antimonio; kermes mineral.

6. *Compostos oxygenados do boro.—Compostos oxygenados do carbono e do silicio.* Acido borico anhydro. Acido meta-borico, pyro-borico e ortho-borico. Fluoreto de boro. — Oxydo de carbono. Acido carbonico. Sulfureto de carbono. — Silica anhydra; hydratos do acido silicico. — Chloreto e fluoreto de silicio e acido fluo-silicico.

V. ESTUDO PARTICULAR DOS METAES

1. *Generalidades.* — Estado natural. Metallurgia em geral. Propriedades physicas dos metaes. Propriedades chimicas. — Ligas.

2. *Metaes alcalinos.* — Generalidades. Potassio e sodio; estado natural, extracção, propriedades, applicações e principaes compostos. Breves noções sobre o lithio, rubidio, cœsio e thallio.

2. *Prata.* Estado natural; preparação e purificação, propriedades, ligas e compostos mais importantes.

4. *Ammonio. Baryo, stroncio e calcio.* Principaes compostos.

5. *Chumbo.* — *Magnesio, zinco, cadmio e indio.* Generalidades; estado natural; extracção, e purificação, usos e principaes ligas e compostos d'estes metaes.

6. *Ferro, nickel, cobalto, manganesio, chromo e uranio.* Generalidades. — Estudo mais detalhado do ferro. Estado natural, metallurgia, propriedades, applicações, ligas e compostos mais importantes d'este metal.

7. *Cobre e mercurio.* Estudo d'estes metaes sob os mesmos pontos de vista que os precedentes.

8. *Aluminio, glucinio, gallio,* etc. Estudo particular do aluminio.

9. *Ouro. Bismutho.*

10. *Platina e metaes da mina de platina.* Estado natural e methodo de tratamento do minerio. Platina: propriedades, applicações, ligas e compostos principaes.

11. *Estanho. Titano e zirconio.* Estudo particular do estanho.

12. *Vanadio, niobio, tantalo. Molybdeno e tungsteno.* Breves indicações.

VI. OXYDOS E HYDRATOS METALLICOS

1. *Generalidades.* — Estado natural, preparação, propriedades, e classificação dos oxydos metallicos.

2. *Alcalis e alcalis causticos.* Potassa, soda e lithina.

3. *Oxidos e hydratos alcalino-terrosos.* — Cal viva e cal apagada. Argamassas. — Baryta.

4. *Oxydos de chumbo. Oxydos de magnesio e de zinco.* — Prot'oxydo de chumbo; minio ou zarcão; bi-oxydo de chumbo. — Magnesia anhydra e hydratada. — Oxydo de zinco.

5. *Oxydos e hydratos mais importantes do ferro.* — Sesqui-oxydo de ferro.

6. *Outros oxydos metallicos.* — Bi-oxydo de manganesio. — Acido chromico; acidos chromicos condensados e mixtos, em especial o acido chlorochromico. — Oxydos cuproso e cuprico. — Oxydo mercurico. — Acidos estannicos.

VII. SAES

1. *Generalidades.* — Preparação, propriedades e classificação analytica dos saes. Acção da corrente electrica, da luz, do calor, da agua, do oxygenio, do are dos metaes sobre os saes.

2. *Chloretos.* — Generalidades. Chloreto de potassio; chloreto de sodio; chloreto de prata; chloreto de ammonio; chloreto de ammonio e de ferro; chloreto de baryo; chloreto de calcio; chloreto de magnesio; chloreto de zinco; chloreto ferrico; chloreto de manganesio; chloreto mercuroso; chloreto mercurico: chloretos de cobre; per-chloreto d'ouro; sal de Chrestien; chloreto de platina; chloreto estannoso.

3. *Brometos e iodetos.* — Generalidades. — Brometo de potassio; brometo de sodio; brometo de lithio; brometo ferroso. — Iodeto de potassio; iodeto de ammonio; iodeto de chumbo; iodeto ferroso; iodeto mercuroso; iodeto mercurico.

4. *Sulfuretos.* — Generalidades. — Potassa sulfurada e soluto de potassa sulfurada. Mono-sulfureto de sodio; soda sulfurada e suluto de soda sulfurada. Sulfureto de ammonio; sulfhydrato d'ammonio; sulfureto amarello de ammonio. Cal sulfurada e soluto de cal sulfurada. Sulfureto de zinco. Sulfuretos de ferro. Sulfuretos de mercurio.

5. *Cyanetos Fluoretos.* — Breves indicações.

6. *Azotatos. Chloratos. Perchloratos. Hyposulfatos.* — Generalidades sobre os azotatos; azotato de potassa; azotato de soda; azotato de ammonia; azotato de prata; azotato de baryta; azotato de chumbo; azotato de cobalto; azotato mercurico; sub-azotato de bismutho. — Chlorato de potassa.

7. *Azotitos. Chloritos. Hypo-chloritos. Per-iodatos. Hypo-phosphitos. Hydro-sulfitos.* — Azotito de potassa. Hypo-chloritos de soda, de potassa e de cal; chloretos descorantes. Hypo-phosphito de cal; hypo-phosphito de soda.

8. *Boratos. Bromatos. Carbonatos.* — Borax. — Generalidades sobre os carbonatos. Carbonatos de potassa. Carbonatos de soda. Carbonatos de lithina. Carbonato de ammonia. Carbonato de cal. Carbonatos de chumbo. Magnesia alva das pharmacias. Carbonato de manganez. Carbonato ferroso. Carbonato de bismutho. Carbonato de zinco. Carbonato de mercurio.

9. *Phosphatos; phosphitos.* — Generalidades sobre os phosphatos. Phosphato ammoniacal. Sal de phosphoro. Phosphato de soda. Phosphato de cal. Pyro-phosphato de soda. Pyro-phosphato de ferro e de soda.

10. *Silicatos e aluminatos.* — Silicato de potassa. Silicato de cal. Silicato de alumina hydratada. — Breve noticia sobre a composição dos vidros e dos productos ceramicos.

11. *Sulfitos* e *hypo-sulfitos*. — Sulfito de soda. Hypo-sulfito de soda.

12. *Sulfatos*. — Generalidades. — Sulfato de potassa. Sulfato de soda. Sulfato de ammonia. Sulfato de cal. Sulfato de zinco. Sulfato de magnesia. Sulfato de cadmio. Sulfato ferroso e caparrosa verde. Sulfato de sesqui-oxydo de ferro. Sulfato de manganez. Sulfato de cobre e sulfato de cobre ammoniacal. Sulfato mercurico. Alumens, especialmente o alumen ordinario.

13. *Chromatos*. *Manganatos*. *Arseniatos* e *arsenitos*. — Chromato neutro e bi-chromato de potassa. Per-manganato de potassa. Arsenito de potassa. Arseniato de potassa.

14. *Antimonitos*. *Antimoniatos*. *Estannatos*. *Molybdatos*, etc. — Antimoniato acido de potassa. Pyro-antimoniato acido de potassa. Estannato de potassa. Molybdato de ammonio.

15. *Azotetos; phosphoretos*. *Carbonetos*, *silicietos*. *Hydrogenetos*. — Breves indicações.

SEGUNDA PARTE

CHIMICA INORGANICA INDUSTRIAL

1. *Oxygenio e hydrogenio*. Methodos industriaes de extracção e principaes applicações.

2. *Agua*. Fabrico do gelo. Depuração das aguas. Distillação da agua do mar. Tratamento das aguas dos esgotos.

3. *Enxofre*. Extracção. Refinação. Applicações principaes, enxoframento das vinhas.

4. *Phosphoro*. Fabrico das accendalhas phosphoricas e outras.

5. *Sulfureto de carbono*. Fabrico, depuração; armazenagem e applicações.

6. *Acido sulfuroso*, *sulfitos* e *hyposulfitos*. Fabrico do acido sulfuroso. Usos economicos. Injecção dos cadaveres. Hyposulfitos de soda e de cal.

7. *Acido sulfurico*. Fabrico, concentração e depuração. Acido sulfurico Nordhausen. Importancia d'esta producção.

8. *Acido azotico*. Fabrico do acido azotico. Condensação.

9. *Acido borico*. Extracção industrial; depuração e applicações.

10. *Chloreto de sodio*. Extracção do sal gemma. Extracção do sal contido nas aguas do mar. Marinhas portuguezas.

11. *Acido chlorhydrico* e *sulfato de soda*. — Preparação industrial do acido chlorhydrico e do sulfato de soda. Condensação de acido chlorhydrico nos fornos de sulfato. Purificação. Applicações.

12. *Sodas naturaes* e *sodas artificiaes*. -- Plantas que fornecem as sodas naturaes; extracção. Natrão. Fabrico da soda artificial. Refinação da soda. Fabrico dos crystaes de soda. Fabrico do bi-carbonato de soda. Methodos diversos de fabrico.

13. *Potassa* e *saes de potassa*. -- Extracção. Potassa perlassa. Potassa

vermelha da America e outras. Caracteres e composição das potassas commerciaes. Refinação das potassas. Potassa extrahida da suarda das lans. Potassa artificial. Potassa caustica. Saes de Stassfurth. Principaes applicações das potassas e das sodas.

14. *Aluminio, alumen, sulfato de alumina. Sulfato de ferro.* — Fabrico do aluminio; propriedades e applicações usuaes. Alumen, variedades commerciaes, propriedades, estado natural, extracção e fabríco. Sulfato de alumina. Aluminato de soda. Sulfato de ferro; composição, propriedades, preparação e applicações.

15. *Acido carbonico* e *aguas gazosas artificiaes.* -- Apparelhos de Herman-Lachapelle e Glover, e de Mondallot. Vasos siphoides. Enchimento dos siphões.

16. *Chloro e chloretos descorantes. Chlorato de potassa.* Fabrico da cal chlorada secca. Preparação da cal chlorada liquida. Principaes applicações dos chloretos descorantes. — Fabrico do chlorato de potassa. Applicações. Accendalhas chimicas. Escorvas fulminantes.

17. *Iodo, bromo, iodetos e saes dos vareks.* Industria dos vareks. Fabríco dos saes e producto dos vareks. Extracção do bromo. Preparação do brometo e do iodeto de potassio. Applicações.

18. *Borax.* Borax anhydro, prismatico e octaedrico. Fabríco e refinação do borax. Applicações.

19. *Cal. Argamassas e cimentos.* — Materias primas do fabríco da cal. Fabríco da cal. — Applicações da cal gorda e da cal magra. Cal hydraulica. Fabríco da cal hydraulica artificial. Preparação dos cimentos hydraulicos. Argamassas e maçames.

20. *Gesso.* Materias primas. Theoria do fabríco do gesso. Processo de fabríco. Applicações.

21. *Vidros e crystaes.* — Variedades commerciaes de vidros e suas propriedades. — Fornos empregados para o fabríco do vidro. Decoração do vidro. — Applicações.

22. *Alvaiade de chumbo e alvaiade de zinco.* Diversos methodos de fabríco do alvaiade de chumbo. Applicações. Perigos com a manipulação do alvaiade. Alvaiade de zinco. Fabrico e applicações á pintura.

23. *Argillas e suas applicações.* Tijolos, telhas, cadinhos. Louças e porcellanas, etc.

24. *Photographia.*

APPENDICE — Materias corantes mineraes.

VIII CADEIRA — **Chimica organica**

Lente *A. J. Ferreira da Silva.* Oito lições semanaes

PRIMEIRA PARTE

A. — CHIMICA ORGANICA GERAL

I. PRELIMINARES

1. *Noções geraes.*— Substancias existentes nos sêres vivos. Composição das substancias organicas. Substancias organisadas. Desenvolvimento historico da marcha seguida no estudo chimico dos compostos organicos: methodos analyticos, methodos syntheticos. Objecto e utilidade do estudo da chimica organica.

2. *Analyse elementar; formulas.* — Analyse qualitativa. Analyse quantitativa. Densidades gazosas; fundamentos dos principaes methodos empregados na sua determinação. Formulas racionaes baseadas na noção de atomicidade. Formulas de Berthelot.

3. *Classificação dos compostos organicos.* — Series homologas; funcções chimicas. Classificação por funcções (Berthelot). Divisão geral dos compostos organicos em gordos, aromaticos e de addição aromaticos.

II. CARBONETOS DE HYDROGENIO

1. *Carbonetos de hydrogenio em geral.* —Carbonetos fundamentaes. Classificação e nomenclatura dos carbonetos. Formação por analyse e por synthese.

2. *Carbonetos formenicos ou paraffinas.* — Formena ou methane. Oleos de petroleo; paraffina, vaselina, etc. Illuminação pelos compostos organicos. Chammas em geral e particularmente da lampada de Bunzen: applicações.

3. *Carbonetos ethylenicos* (*olefinas*) e *acetylenicos.* —Ethylena. Acetylena.

4. *Carbonetos camphenicos.* —Essencia de terebinthina. Oleos volateis ou essenciaes. Caoutchouc e gutta-perka.

5. *Carbonetos benzenicos.* — Benzina e seus homologos; constituição e isomerias. Nitrobenzina.

6. *Outros carbonetos aromaticos.* — Breves noções sobre a naphtalina e a anthracena.

III. ALCOOES

1. *Alcooes em geral.* — Classificação, nomenclatura e principaes derivados dos alcooes. Importancia d'esta funcção.

2. *Alcooes monatomicos.* — Alcool ordinario; preparação do alcool anhydro. Menção dos principaes alcooes monatomicos.

3. *Alcooes polyatomicos em geral.* — Definição, derivados e classificação dos alcooes polyatomicos.

4. *Glycerina ordinaria.*

5. *Alcooes hexatomicos e de atomicidade superior.* — Glucosas em geral e glucosa ordinaria. Mel das abelhas. Saccharoses; analyse dos assucares. — Polysaccharides: amido, dextrina, cellulosa; gommas diversas.

6. *Phenoes.* — Phenol ordinario. Acido picrico e picratos. Pyrogallol.

IV. ALDEHYDOS

1. *Aldehydos em geral.* — Definição, classificação e nomenclatura dos aldehydos. Indicação dos principaes aldehydos.

2. *Aldehydos propriamente ditos.* — Aldehydo ordinario e chloral. Aldehydo benzoico.

3. *Acetonas, quinonas e carbonylos.*—Quinona. Anthraquinona e alizarina. Camphora.

V. ACIDOS E SEUS SAES

1. *Acidos em geral.* — Definição e classificação dos acidos organicos. Indicação dos principaes.

2. *Acidos monobasicos de funcção simples.* — Acido acetico e acetatos. Acido valerico. Acido estearico. Acido oleico e sabões. Acido benzoico.

3. *Outros acidos.* — Noções sobre os acidos: oxalico, lactico, tartrico, citrico, salicylico, galhico e tannico.

VI. ETHERES

1. *Etheres em geral.* — Classificação dos etheres. Enumeração dos principaes.

2. *Etheres dos alcooes monatomicos.* — Etheres do alcool ordinario; ether ordinario e theoria da etherificação. Chloroformio, bromoformio e iodoformio. Ether methylchlorhydrico. Ether acetico.

3. *Glycerides.* — Os corpos gordos naturaes: oleos liquidos e oleos concretos ou manteigas; gorduras ou banhas e ceras. Nitroglycerina e dynamite.

4. *Glucosides e cellulosides.* — Salicina. Cellulosides nitricas: algodão-polvora, collodio.

VII. AMINAS

1. *Aminas ou alcalis organicos em geral.* — Classificação e nomenclatura dos alcalis organicos artificiaes.

2. *Aminas em particular.* — Rapido estudo da anilina e da toluidina. Importancia industrial dos seus derivados. Glycollamina.

3. *Alcalis naturaes ou alcaloides.* — Alcalis fixos e volateis: methodos de extracção e constituição.

4. *Alcaloides em especial.* — Morphina, narcotina, quinina, strychnina, nicotina, atropina, pilocarpina. Principios activos do chá, do café e do tabaco.

VIII. AMIDAS

1. *Amidas em geral.* — Definição e classificação das amidas: imidas e nitrilas. Indicação das principaes.

2. *Amidas em especial.* — Oxamida. Acido hippurico. Anil azul e branco: synthese do anil.

IX. COMPOSTOS ORGANO-METALLICOS

1. *Compostos organo-metallicos.* — Sua origem e constituição. Zincoethyla. Cacodyla.

X. SERIE CYANICA

1. *Serie cyanica em geral.* — Theorias d'esta serie.

2. *Compostos importantes da serie cyanica.* — Cyanogenio. Acido cyanhydrico. Cyanetos simples, cyanetos duplos, sulfocyanetos. Urêa.

XI. PRINCIPIOS ALBUMINOIDES

1. *Materias albuminoides em geral.* — Constituição, propriedades, reacções geraes e classificação das materias albuminoides.

2. *Albuminoides em especial.* — Estudo rapido da albumina, caseina, fibrina, gluten, osseina, gelatina.

B. — BREVES NOÇÕES DE CHIMICA BIOLOGICA

1. Sangue, estudo summario do sangue. Urina, ensaio da urina. Leite, ensaio do leite. Fibras textis e filamentosas animaes e vegetaes; ensaio dos tecidos.

2. Putrefacção: Conservação das materias organicas alimenticias ou não, e desinfecção; taxidermia e embalsamamento.

SEGUNDA PARTE

CHIMICA ANALYTICA

I. PRELIMINARES

1. *Objecto, importancia e principaes divisões da chimica analytica.* — Importancia da analyse chimica quer nas sciencias, quer na industria. Analyse mineral, analyse organica, analyse dos gazes, analyse biologica. Analyse qualitativa: por via secca, por via humida, e espectroscopica, etc. Analyse quantitativa: gravimetrica ou ponderal, e volumetrica.

2. *Operações preliminares e geraes de analyse mineral; material necessario.* — Instrumentos usados nos ensaios por via secca; massarico e seu uso; chamma de Bunzen; reagentes empregados; processos e operações praticas. — Instrumentos, apparelhos e utensilios empregados na analyse por via humida; operações a executar, mechanicas, physicas e chimicas; reagentes geraes e reagentes especiaes ou caracteristicos. Medições. Pesagem: balança e pesos. Medidas de volume: balões marcados, provetes, pipetas (argãos ou chupetas) e buretas (galhetas); graduação e verificação. Medida do peso especifico. — Methodos opticos. Espectroscopio e seu uso; fundamentos e applicações da analyse espectral. Polarimetro e seu uso. Microscopio.

3. *Caracteres analyticos dos principaes metaes.* — Classificação dos metaes ou bases sob o ponto de vista analytico, em 5 grupos. — Reacções por via secca e por via humida; methodos de doseamento e separação de cada um d'estes metaes.

4. *Caracteres analyticos dos principaes acidos mineraes.* — Classificação dos acidos em seis grupos analyticos. Reacções por via secca, por via humida e methodos de doseamento e separação de cada um d'elles.

II. ANALYSE MINERAL QUALITATIVA

1. *Preliminares.* — Marcha a seguir na analyse qualitativa. Caracteres physicos, propriedades organolepticas, etc. Ensaios pyrognosticos ou por via secca: pelo methodo ordinario empregando o massarico, ou pelo methodo de Bunzen. Analyse por via humida: solução, desaggregação; indagação das bases; preliminares para a investigação dos acidos; indagação d'estes ultimos.

2. *Analyse qualitativa das soluções, com o fim de descobrir os metaes de saes misturados (via humida).* Indagação dos metaes do grupo da prata. Indagação dos metaes do grupo do cobre. Investigação dos metaes do grupo do ferro. Pesquisa dos metaes do grupo do baryo. Indagação dos metaes do grupo do potassio.

3. *Analyse qualitativa das soluções, com o fim de descobrir os acidos de saes misturados.* Indagação dos acidos do grupo do acido sulfurico. Pesquisa dos acidos do grupo do acido chlorhydrico. Indagação dos acidos do grupo do acido azotico.

III. ANALYSE MINERAL QUANTITATIVA

1. *Analyse ponderal* ou *gravimetrica*. Conhecimento previo dos compostos que melhor se prestam ao doseamento de um corpo, particularmente acido ou metal. Processos práticos para determinar a formação d'esses compostos. Separação dos corpos: analyses directas, analyses indirectas, e analyses por differença. Exemplos de calculos de analyses indirectas.

2. *Analyse volumetrica*. Classificação das analyses volumetricas, segundo Mohr: analyses por saturação, por precipitação, por oxydação e por reducção. Doseamento directo ou por meio dos restos. Condições a realisar para o bom exito de uma analyse volumetrica, relativas aos vasos empregados, aos reagentes e á reacção escolhida para o doseamento. Soluções graduadas racionaes e systematicas, normaes, deci-normaes e centi-normaes; soluções empyricas; regra para, com o uso das soluções normaes systematicas, se obter a percentagem de uma substancia pura existente n'um producto commercial. Preparação e verificação das soluções. Reacções finaes.

3. Calculo das analyses.

IV. ANALYSE DOS GAZES

1. *Operações geraes.* — *Apparelhos e utensilios.* Recolhimento dos gazes. Conservação dos gazes: gazometros diversos. Trasvasamento dos gazes: — pipetas de gaz. Medida do volume dos gazes: provetes e tubos graduados; verificação d'elles; correcções na medida do volume dos gazes. Apparelhos para sujeitar os gazes á acção da faisca electrica: eudiometros diversos, especialmente os de Berthelot e Bunzen.

2. *Methodos de analyse dos gazes.* Reagentes absorventes. Combustão eudiometrica. Avaliação por differença.

3. *Classificação dos gazes sob o ponto de vista analytico. Gazes incompativeis.*

4. *Marcha a seguir para reconhecer a naturesa de um gaz unico.*

5. *Marcha a seguir na analyse de uma mistura de gazes.*

V. ANALYSES ESPECIAES

1. *Analyse dos materiaes de construcção.* Calcareos. Cal. Cimentos. Silicatos. Argillas. Arêas. Pouzzolanas. Argamassas. Gesso. Betume; asphalto, etc.

2. *Analyse das aguas naturaes.* Analyse das aguas. Ensaio rapido das aguas: hydrotimetria. Estudo das aguas nas suas applicações aos usos domesticos, ás caldeiras a vapor, aos usos agricolas, etc.

3. *Analyse das terras, adubos e productos agricolas.* Analyse mecanica e chimica das terras. Analyse dos correctivos. Analyse dos adubos agricolas.

4. *Alcalimetria* e *acidimetria. Chlorometria.*

5. *Saccharimetria.* Methodos chimicos; methodos opticos.

6. *Analyse toxicologica.* Operações preliminares. Determinação dos

venenos inorganicos; destruição das materias organicas por diversos processos; investigação methodica dos venenos mineraes. — Determinação dos venenos organicos (methodo de Stass). — Analyse das terras suspeitas.

7. Estudo chimico da urina.
8. Estudo chimico dos calculos e dos sedimentos urinarios.

TERCEIRA PARTE

CHIMICA ORGANICA INDUSTRIAL

1. Assucar. Melaços, seu aproveitamento industrial.
2. Bebidas fermentadas, licores e espiritos. Industria do alcool e da distillação.
3. Corpos gordos. Sabões. Velas. Glycerina. Ensaio dos oleos empregados na industria.
4. Feculas. Glucosa. Dextrina.
5. Pão; massas alimentares. Farinhas e seu ensaio.
6. Madeira. Conservação da madeira.
7. Papel. Papeis de côr e pintados.
8. Gaz illuminante. Saes ammoniacaes. Materias corantes artificiaes derivadas de alcatrão da hulha.
9. Perfumarias.
10. Resinas, gommas-resinas e balsamos. Vernizes alcoolicos, oleosos e essenciaes.
11. Gommas. Caoutchouc e gutta-perka.
12. Tabacos.
13. Industria do asphalto e do betume.
14. Branqueamento. Lavagem.
15. Explosivos de origem organica.
16. Materias textis e filamentosas, em especial industria da seda.
17. Materias corantes vegetaes e animaes.
18. Tinturaria por immersão. Estamparia ou tinturaria por impressão.
19. Adubos commerciaes.
20. Gelatina. Couros e pellicas.
21. Lacticinios. Leite. Manteigas. Queijos.
22. Vinagres e acido acetico.
23. Conservas alimenticias.
24. Aproveitamento dos despojos animaes.

IX Cadeira — **Mineralogia, paleontologia e geologia**

Lente (interino) *M. A. Gonçalves*. Seis horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

MINERALOGIA

Definição e divisões da mineralogia.

I. — Crystallographia geometrica

a). Leis fundamentaes. Classificação das formas crystallinas. Systemas de notação crystallographica de Weiss, Naumann, Miller, Dana e Levy.

b.) Systemas crystallographicos. Formas holoedricas, hemiedricas e tetartoedricas dos systemas isometrico e hexagonal. Formas holoedricas e hemiedricas dos systemas tetragonal e orthorhombico. Systemas monoclinico e triclinico.

c). Estructura regular. Theoria racional da estructura dos corpos crystallizados homogeneos. Theoremas geraes sobre a symetria dos polyedros e das redes. Classificação dos edificios moleculares segundo o genero de symetria a que pertencem.

d). Medida dos angulos dos crystaes. Goniometros de applicação e reflexão. Applicação do microscopio á medida dos angulos diedros dos crystaes microscopicos.

Calculos crystallographicos. Systemas graphicos de representação dos crystaes. Representação das faces de um crystal pela posição dos seus polos sobre uma esphera de projecção. Projecções stereographica, orthogonal e gnomonica. Methodo de Quenstedt. Methodo de Miller.

e). Maclas.

II. — Crystallographia physica

a). Propriedades physicas dos meios continuos.

b). Phenomenos que se referem á cohesão. Deformações dos solidos. Forças elasticas. Relações entre as forças elasticas e a deformação. Equilibrio de elasticidade. Clivagem e fractura. Dureza. Escala de Mohs e sclerometro.

c). *Phenomenos opticos:*

1) Diaphaneidade. Refracção nos crystaes dos differentes systemas. Prisma de Nickol. Turmalina. Polariscopios. Dupla refracção uniaxial. Phenomenos com luz parallela e convergente. Polarização rotatoria. Dupla refracção biaxial. Dispersão dos eixos de elasticidade e dos eixos opticos. Phenomenos com luz parallela e convergente. Caracteres distinctivos dos crystaes trimetricos. Influencia da temperatura sobre as propriedades opticas. Anomalias.

2) Lustre. Côr. Pleo chroismo. Dichroscopio de Haidinger. Nomenclatura das cores. Cores proprias e accidentaes. Risca. Fulguração ou jogos de cores. Iriação. Furta-cores. Opalescencia. Asterismo. Fluorescencia e phosphorescencia.

d). Phenomenos magneticos e electricos.

e). Homeomorphismo e hetereomorphismo.

III — Crystallogenia

Irregularidades dos crystaes. Distorsões. Imperfeições da superficie. Imperfeições e impurezas internas. Experiencias relativas á crystallisação. Corrosão dos crystaes e pseudomorphoses.

IV — Mineralogia descriptiva

A). Generalidades sobre as especiés mineraes:

Elementos chimicos dos mineraes. Analyse e nomenclatura das especies. Estructura irregular. Fórmas imitativas e pseudo-regulares. Densidade dos mineraes. Fusibilidade. Escala de Kobell. Methodo de J. Szabó. Ensaios por via secca. Coração da chamma. Ensaios nos tubos abertos e fechados, na lamina e fio de platina. Ensaios sobre o carvão. Ensaios por via humida. Solubilidade.

Ideia geral da estructura da crusta terrestre; modo de ser dos mineraes na natureza. Jazigos metalliferos. Paragenese. Distribuição geographica Classificação de mineraes. Classificação de Lapparent.

B). Descripção dos mineraes:

a). Elementos das rochas fundamentaes. Elementos silicatados das rochas acidas. Elementos essenciaes (familias da silica, feldspathos e mineraes folheados). Elementos accessorios (silicatos dos granitos e gneiss, das pegmatites e dos syenitos eleoliticos). Elementos silicatados das rochas basicas. Elementos essenciaes (familia dos pyroxenas e amphibolas e do peridoto). Elementos accessorios. Zeolites. Silicatos de metamorphismo. Silicatos de alumina, anhydros e hydratados. Silicatos não exclusivamente aluminosos, anhydros e hydratados.

b). Elementos das jazidas mineraes. Oxydos e oxysaes não metalliferos (oxydos, aluminatos, nitratos, boratos, carbonatos, sulfatos, etc.). Saes haloides (chloretos e fluoretos.)

c). Minereos metallicos. Mineralizadores proprimente ditos. Elementos mineralizadores e combinações mutuas dos elementos mineralizadores. Minereos dos metaes acidificaveis. Minereos dos metaes propriamente ditos (minereos de ferro, cobalto, nickel, zinco, estanho, chumbo, bismutho, cobre, mercurio, prata, ouro, platina, iridio, osmio e palladio).

d). Combustiveis mineraes. Mineraes de carbono. Carvões fosseis. Ceras fosseis. Betumes. Resinas fosseis. Saes organicos.

c). Determinação de mineraes pelo methodo de Kobell.

SEGUNDA PARTE

GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

Definição e divisões da geologia e paleontologia. Relações entre a geologia, paleontologia e mineralogia, e da paleontologia com a zoologia e botanica. Noções da historia da geologia.

I — Noções de lithologia

a). Mineraes essenciaes, accidentaes e accessorios das rochas. Sua macrostructura. Determinação dos seus elementos constituitivos. Applicação

do microscopio aos estudos petrographicos. Inclusões vitreas e microstructura das rochas. Classificações de rochas.

b). Estudo das principaes rochas.

II — Morphologia terrestre

a). Morphologia propriamente dita. Dados astronomicos, dimensões e densidade da terra. Dados relativos á atmosphera. Distribuição dos continentes e oceanos. Relevo da crusta terrestre.

b). Physiographia. Distribuição do calor á superficie da terra. Magnetismo terrestre. Distribuição da vida organica no globo.

III — Geologia dynamica

a). Phenomenos vulcanicos. Typo normal da actividade vulcanica. Phenomenos de projecção. Emissão de lavas. Emanações gazosas dos vulcões. Variações da actividade vulcanica. Vulcões marinhos. Formação das montanhas vulcanicas e das crateras. Distribuição dos vulcões. Causas do vulcanismo.

Fontes quentes. Geysers. Solfataras. Mofetas.

Tremores de terra. Variabilidade e modo de producção dos movimentos do solo. Propagação dos tremores de terra. Relações dos tremores de terra com as circumstancias geognosticas. Velocidade de propagação, duração e frequencia dos tremores de terra. Tremores de mar. Theorias dos tremores de terra e mar.

Levantamentos e abaixamentos instantaneos e seculares. Exemplos. Levantamentos e abaixamentos em epochas geologicas antigas. Formação. dos continentes.

b). *Acção da agua*:

1) A agua liquida como agente geologico. Solubilidade de todas as rochas na agua. Acções hydro-chimicas. Depositos subterraneos provenientes das soluções mineraes. Fontes mineraes e seus depositos. Substancias mineraes levadas ao mar. Consequencias da actividade das aguas de infiltração. Erosão. Formação dos valles por erosão. Transporte e depositos das aguas correntes. Actividade mecanica do mar.

2) O gelo como agente geologico. Geleiros. Estructura interna de um geleiro. Progressão dos geleiros. Limite inferior do geleiro. Distribuição dos geleiros. Phenomeno que dependem do seu movimento. Montanhas de gelo.

c). *Acção geologica da atmosphera*:

Acção chimica dos elementos que constituem a atmosphera. Chuvas atmosphericas. Influencia dos ventos sobre a configuração da terra.

d). *A vida organica como agente geologico*:

Trabalhos dos polypos. Bancos de conchas e foraminiferos. Carbonisação e plantas carboniferas. Vulcões de lama; resultado de decomposições organicas.

IV — Geologia petrogenetica

a). Rochas eruptivas. Formação das rochas eruptivas. Particularidades d'estas rochas.

b). Rochas sedimentares. Formação dos elementos das rochas sedimentares. Caracteres d'estas rochas. Rochas sedimentares minerogenicas de origem mecanica e chimica. Rochas sedimentares zoogenicas e phytogenicas.

c). Rochas metamorphicas. Metamorphismo. Modificação das rochas determinada pelas fontes mineraes. Metamorphismo das rochas determinado pelos vapores vulcanicos e pela carbonisação. Theoria do metamorphismo geral.

V — Geologia architectonica

a). Terrenos estratificados. Camadas. Series de camadas. Posição das camadas, causas que a alteram.

b). Terrenos massiços. Jazigo dos terrenos não estratificados. Estructura das rochas massiças.

c). Filões mineraes. Formação dos filões mineraes. Estructura dos filões. Relações dos filões com as rochas visinhas e entre si.

VI — Geologia historica e paleontologia

A). Theoria da descendencia. Periodos geologicos e formações. Limite inferior e superior das formações. Extensão horisontal d'uma formação e differenças entre formações da mesma edade. Avaliação da edade geologica das camadas. Divisão da historia do desenvolvimento da crusta terrestre e das séries de camadas correspondentes em periodos e formações.

B) *Estudo das formações*:

a) Formação fundamental.

b) Caracteres das formações archaicas.

1) Caracteres petrographicos e vestigios organicos do laurenciano. Posição d'esta formação em relação ás outras.

2) Caracteres petrographicos, restos organicos e relações architectonicas do huroniano.

c) Caracteres e divisões das formações paleozoicas.

1) Caracteres petrographicos, paleontologia e divisões do siluriano.

Phenomenos vulcanicos e formações de filões n'esta epocha.

2) Caracteres petrographicos, relações architectonicas, caracteres paleontologicos e divisões do devoniano. Phenomenos vulcanicos d'esta epocha.

3) Caracteres petrographicos, relações de jazigo, relações architectonicas, caracteres paleontologicos e divisões do carbonifero. Formação dos jazigos de hulha. Phenomenos vulcanicos e filões d'esta epocha.

4) Caracteres do dyassico. Fosseis d'esta epocha.

5) Desenvolvimento da vida organica durante o periodo paleozoico.

c) Formação mesozoicas.

1) Caracteres geraes do triassico.

Caracteres petrographicos, paleontologicos e relações architectonicas dos diversos typos de triassico.

2) Caracteres geraes do jurassico.

Caracteres petrographicos, paleontologicos, relações architectonicas e divisões do liassico, dogger e jurassico branco.

3) Caracteres geraes petrographicos e paleontologicos, divisões e parallelismo do cretaceo.

4) Desenvolvimento da vida organica durante o periodo mesozoico.

d). Formações cainozoicas.

1) Caracteres e divisões do terciario. Terciario antigo. Formação do eocene e oligocene. Terciario recente. Formações miocene e pliocene.

2) A Europa e a America na epocha glaciaria. Phenomenos glaciarios nas ilhas britanicas e Scandinavia. Os continentes na epocha diluviana. Homem diluviano. Alluvio.

3) Desenvolvimento da vida organica durante o periodo cainozoico.

E) Constituição geologica do solo portuguez.

X. Cadeira — **Botanica**

Lente *Dr. F. Salles Gomes Cardoso*. Seis horas semanaes

Introducção.—Definição de Botanica, e das suas divisões, e de vegetal, dando-se por esta occasião uma idéa geral de uma planta em face de qualquer exemplar d'ellas, e expondo-se tambem a difficuldade de seu tão util, como agradavel estudo, e especialmente as causas de erros, a que podemos ser levados, em consequencia dos meios, de que dispomos, attendendo á exiguidade dos objectos, que observamos.

HISTOLOGIA

Das cellulas.—Consideradas em si mesmo. Diversas formas, que podem apresentar. Natureza da membrana continente d'ellas. Composição chimica e modificações d'este envolucro. Materias liquidas, semi-liquidas e solidas, contidas nas cellulas, fim presumivel de cada uma d'estas substancias e sua composição chimica.

Genese cellular. — Origem e multiplicação das cellulas. Exposição d'estes phenomenos (segundo Cauvet) por divisão e endogenia.

Fibras e tecido fibrôso.—Em que consiste, de onde provém, sua posição nos vegetaes, e principal fim.

Vasos aereos.—Definição d'estes vasos e caracteres distinctivos entre as verdadeiras e falsas tracheas. Glossologia de todos estes vasos e logar que occupam nos vegetaes bem como fim presumivel de todos.

Vasos laticiferos.—Sua formação, fim e logar que occupam.

ORGANOGRAPHIA DA PARTE DESCENDENTE DO AXOPHITO

Raiz.—Definição d'ella. Diversas especies de raizes e estructura das mesmas. Formação da radicula. Differenciação de seus tecidos nas plantas dicotyledoneas, nas monocotyledoneas e acotyledoneas.

Das raizes adventicias—e consequencias práticas da sua apparição (multiplicação por merguihia e estaca).

Raiz dos vegetaes parasitas.

Caracteres das raizes já formadas.

Rhyzotaxia.—Disposição das raizes sobre a parte descendente do Axophito.

Glossologia de todas ellas.—Segundo os meios em que vivem e configuração que apresentam.

ORGANOGRAPHIA DA PARTE ASCENDENTE DO AXOPHITO

Do caule.—Suas divisões em aereo (tronco, espique, e colmo) e subterraneo (rhisoma, bolbo e tuberculo).

Tronco.—Organisação do caule nos vegetaes lenhosos dicotyledoneos, precisando bem e descrevendo-a.

Medulla.—O estojo medullar. O lenho. Os raios medullares e a zona geradora. O liber. O parenchimo cortical. A camada suberosa. A epiderme á qual junctaremos (como o compendio indica) a descripção anatomica da epiderme e cuticula. Dos estomas aquiferos e aereos e os pellos, e glandulas.

Espique.—Estructura anatomica d'este caule em geral--das palmeiras, das liliaceas e dos fetos.

Colmo.—Item.

Rhizoma.—Descripção d'este caule e quaes os pontos de onde brotam os gomos.

Bolbo.—O que é, e distincção entre os tunicados e os embricados, ou escamosos.

GOMOS OU BOTÕES

Descripção anatomica d'elles e dos seus orgãos protectores. Analogias e differenças entre estes e o embrião.

Prefoliação.—Disposição das folhas dentro do botão antes do desenvolvimento d'ellas.

Glossologia d'esta vernação.

Bolbilhos e Turião.—O que são, como se desenvolvem. Analogias e differenças, que elles téem entre si e com os botões.

Ramificação.—Desenvolvimento dos gomos, quer terminaes, quer axillares, denominação, que compete aos ramos, segundo a ordem da sua evolução, posição em relação ao caule. Cladodes o que são, e distincção entre estes ramos e os chamados faciados.

FOLHAS

O que são e seu principal fim.—Partes de que constam e anatomia de cada uma d'essas partes. Divisão d'ellas em simples e compostas. Denominação de todas ellas segundo a sua direcção relativa ao caule, peciolação, nervação, figura, chanfradura na base, terminação no vertice, angulos do seu contorno, incisões no limbo, expanção e superficie, pubescencia, etc.

Ascidios.—O que são.

PHILOTAXIA

Leis da disposição das folhas nos caules e nos ramos—Exposição das tres leis, que presidem a esta collocação. Espira geradora, o que é e meios de a determinar. Angulo de divergencia das folhas, e modo de o calcular pelas fracções $^1/_2$; $^1/_3$; $^2/_5$........ Modo de determinar a espira geradora, auxiliados pelas secundarias, que se tornam bem visiveis quando o eixo é muito deprimido e as folhas ou bracteas são muitas e muito aproximadas no eixo.

Folhas oppostas ou verticilladas.—Lei da alternação dos verticillos.

Pélos, espinhos e aculeos.—O que são, de onde proveem e meios de os distinguir uns dos outros.

Orgãos modificados.—Anomalias, monstruosidades, e transformações normaes.

FUNCÇÃO DA NUTRIÇÃO

CIRCUMSTANCIADA EXPOSIÇÃO DOS DIFFERENTES ACTOS, DE QUE ELLA CONSTA, E SÃO OS SEGUINTES:

Absorpção.—O que é, logar por onde se effectua e causas, que a determinam? Terão as raizes a propriedade electiva?

Circulação ou movimento dos succos nos vegetaes.

Por onde sobe a seiva bruta, e causas, que determinam o seu ascenso. Como se prova o seu curso e velocidade?

Seiva elaborada.—O que é, como se organisou e por onde se dirije das folhas para as raizes e para as outras differentes partes do vegetal.

Giração.--Direcção dos liquidos dentro das cellulas, meios de observar estes movimentos; vegetaes que mais se prestam a esta observação, e agentes, que modificam este movimento, e causa presumivel d'este movimento.

Cyclose.—Como se faz o movimento do latex dentro dos vasos lacticiferos, e como se póde observar. Propriedades physicas e composição chimica do latex. Que papel exercerá o latex nos vegetaes?

Excreção vegetal.—Em que consiste, e quaes os pontos em que se

torna mais notavel este acto, bem como natureza das materias regeitadas. As raizes tambem excretam?

Transpiração.—Seu fim e differença entre ella e a vaporisação. Prova, de que os vegetaes transpiram. Onde se opera a transpiração?

Respiração.—O que é, e em que consiste. E' ella completamente analoga á dos animaes? Existe mais que uma respiração nos vegetaes?

A coloração dos vegetaes.—Poderá considerar-se como proveniente da oxydação e desoxydação da chlorophila?

Assimilação e desassimilação.

Origem dos elementos constituidos dos principios immediatos e das materias salinas dos vegetaes. Circumstanciada descripção e discussão d'este importantissimo objecto, seguindo em tudo o compendio. (D. Couvet, Curso elementar de Botanica, segunda edição).

Direcções, que apresentam as duas partes do axophito (raiz e caule).

Theorias, porque se tem querido explicar todos os phenomenos do crescimento e direcções oppostas do eixo. Juizo critico d'ellas, conclusão, que d'ellas devemos inferir.

ORGÃOS DE REPRODUCÇÃO

Flôr.—Considerações geraes ácerca d'ella.

Denominação dos verticillos; de que deve constar para ser perfeita, ou para ser completa. Origem dos orgãos floraes; (metamorphose em geral).

Pedunculo.—O que é, d'onde provém, e quaes as denominações, que lhe competem segundo o seu ponto de inserção, numero de flores, que contém, modificação de formas et cœtera.

Pedicello.—Ou ramificação do eixo primario (do pedunculo) em eixos secundarios, terciarios.

Bracteas.—De onde provém e differença entre ellas e folhas floraes. Differentes denominações, que lhes competem, segundo seus caracteres e até da reunião d'ellas, constituindo os involucros—involucellos—caliculos—e cupulos.

Leis da symetria da flôr, e casos, em que ella parece alterada; por exemplo pela apparição de um disco, ou de o nectarios, ou de estames parecendo epi, ou periginicos, quando são sempre hypogenicos.

Prefloração.—Ou Estivação dos verticillos floraes antes da anthese da flôr. Das nove especies de prefloração admittidos por Cauvet.

Diagramas.—O que são e suas denominações.

INFLORESCENCIAS

Sua definição e divisão em axillar e terminal.

Os typos das axillares, que o compendio estabelece são deduzidos da existencia de um só eixo, ao qual estão ligados as flores, ou da ramificação d'este eixo em secundarios, terciarios.

1.º *Typo.*—Flores seceis sobre o eixo primario (espiga, amentilho, spadice, cone, capitulo, e syconio).

2.° *Typo.*—Flores sustentadas por eixos secundarios (cacho, corymbo simples, e sertula).

3.° *Typo.*—Flores dispostas em eixos terciarios (panicula, corymbo composto e umbella composta).

A inflorescencia terminal tem por nome geral o de cymeira, que póde ser simples, dichotonica e unipara.

Definição de todas estas inflorescencias, e conhecimento prático d'ellas por figuras e typos naturaes.

DA FLÔR

Receptaculo da flôr, o que é, e differença que ha entre elle, torus e phovantho, ou clinantho.

Gynophoro, guiandrophoro e anthophoro, o que são.

Calix.—O primeiro verticillo da flôr, quando ella é perianthada, é formado de Sepalas.

Estudo de cada sepala considerada isoladamente, sua structura anatomica, e organogenia.

Calix ganosepalo e dialysepalo, o que são, denominações, que lhe competem segundo são regulares ou irregulares, e a modificação de fórma, que apresenta.

Corolla.—Verticillo das petalas. Estudo de cada petala isoladamente, e das duas partes, de que é formada (lamina e unha). Caracteres deduzidos d'estas duas partes, da fórma, proporção e soldadura das petalas entre si, constituindo asgamopetalas, nas quaes se distingue o tubo, fauce e limbo.

Estudo por figuras e typos naturaes de todas as *corollas.*

Androceo.—Ou verticillo estaminal. Denominações que competem á flôr, segundo o numero, proporção relativa, posição, soldadura dos estames entre si, quer pelos filetes (supporte da antera), quer pelas anteras (lojas continentes do pollen).

Pollen.—Sua organographia e distincção dos caracteres das *intina* e *exina,* que tomam na dehiscencia da antera o nome de tubo pelinico, e a parte contida de materia fecundante, ou *fovilla.*

Formação da antera, do pollen, e constituição do mesmo.

Estames singenesicos, ginandricos e symphisandros, o que são.

Gyneceo ou verticillo carpelar. Detida exposição dos: *ovario—estilete—estigma—ovulo e placentação.*—Denominações que competem á flôr seguindo o numero de carpelos, posição, inserção relativa, fórma e soldadura d'estas partes entre si e com as outras da flôr. Modo de formação e organisação dos carpelos. Meios de reconhecer se o ovario é inferior, superior ou parietal.

Partes da flôr accessorias ou transformadas. Disco, nectarios e estamminodos, o que são e como contam na symetria da flôr.

FECUNDAÇÃO

Breve historia da descoberta d'esta funcção, e phenomenos que se manifestam antes, no acto e depois da fecundação.

Marcha da fecundação. Apparelho filamentoso, Vesiculas embrionarias e cellulas antipodas, em que logar existem dentro do sacco embrionario?

Formação do embryão na extremidade do seu filete suspensor e das partes, de que consta este embryão. Formação do *endosperne* (quando existe). Sua direcção e meios de reconhecer se elle é antitropo, homotropo, amphytropo ou heterotropo.

Arilo, Arilodo, e Strophiolo; de onde provém.

CIRCUMSTANCIAS QUE FAVORECEM A FECUNDAÇÃO

A anto-fecundação é sempre possivel nas flores estamino-pistiiadas? O que são plantas dicogamas protandrias e dicogamas protegimicas?

O Dimosphismo vegetal em que consiste? Accusará elle uma tendencia nos vegetaes monoclinos a passarem a diclinos divicos? A Gravidade, o Vento e os Fusectos como auxiliam a fecundação? A fecundação das plantas aquaticas como se realisa?

Digemese ou gerações alternadas. Comprovação da sua existencia pelas observações de Tulasne e exposição das ideias de J. Sachs a tal respeito.

Parthenogenese, ou geração virgem. O que pretendem ser.

Heterogenia, ou gerações (ditas) espontaneas. Existem ellas?

Hybridos e Mestiços, o que são e como se obtém.

FRUCTO

O que é e partes, de que é constituido. Fructos induviados, o que são?

Do pericarpo, e sua deluiscencia. Distribuição methodica dos fructos, seguindo-se o mesmo compendio.

O grão, composto de episperme e da amendoa.

Episperme, membranas, de que se formou, tomando agora o nome de Tegmen e Testa.

Meios práticos de reconhecer os ovulos. Ortotropos e Campylotropos pela posição do chalazio em relação ao hilo, e dos anatropos, não só por esta relação, como pela existencia do raphe, ou vasiducto.

Amendoa, o que é, casos, em que o embryão é perispemico, ou aperispermico.

Embryão, descripção detalhada de sua gemûla, corpo cotyledonar e radicula.

Movimentos das plantas tanto phanerogamicas, como cryptogamicas.

PALEONTOLOGIA

Importancia do estudo das floras, que se tem succedido durante os differentes periodos geologicos. Distribuição dos vegetaes d'estes periodos em cinco reinos, tendo-se em vista sempre o compendio.

Historia e theoria da evolução dos vegetaes.

GEOGRAPHIA

Origem das especies, e das formas actuaes. Causas e agentes exteriores influentes da distribuição dos vegetaes á superficie do Globo. Estações. Habitações. Localidades e patrias. O que são.

TAXONOMIA

Classificações práticas, ou casuaes—artificiaes—naturaes, ou methodos, o que são.

Systema. Suscinta historia dos mais notaveis, e com especialidade dos de Taurnefort e de Linnen.

Methodo — Preliminares e importancia relativa dos orgãos, ordem de caracteres d'elles deduzidos.

Claves, o que são, exposição das de Jussieu, de De Candolle e outros, bem como a do compendio.

PHYTOGRAPHIA

Familias naturaes.—Revista de varias d'ellas, comparando a sua descripção com alguns typos existentes na escóla botanica da Academia.

PRÁTICA

Depois de bem conhecedores os ouvintes de todos os orgãos dos vegetaes, são obrigados a fazerem por escripto e na aula, descripções das plantas que ali se lhes apresentam, indicando todos os caracteres, que lhes é possivel examinar, e em seguida a classifical-as, ou, pela Flora elementar dos Jardins e dos Campos dos E. le Maout e J. Decaisne (obra de que são obrigados a fazer acquisição) ou pela Flora de Brotero, quando são plantas indigenas.

São tambem obrigados, digo, convidados a formarem hervarios em sua casa para apresentarem na sua ultima prova prática e oral, para este fim, fazendo-se-lhe conhecer a utilidade d'estes trabalhos, e mostrando-se-lhes o modo do os formar, se lhes faculta algumas obras de classificação, de que a escóla já dispõe, isto para bem etiquetarem seus hervarios.

OBSERVAÇÕES MICROSCOPICAS

Com o fim de aos ouvintes se mostrar o uso do Microscopio, e certifical-os tambem da verdade e nitidez das estampas intercaladas no texto das varias obras, de que se lhes aconselha a consulta, empregam-se dois dias lectivos para lhes mostrar em preparados, n'este mesmo acto feitos pelo primeiro official do jardim (e logo em seguida ás lições de histologia) os objectos, que na lição anterior se haviam estudado, como por exemplo — a

fecula como se apresenta no vegetal e depois colorida pelo iodo — uma porção de tecido cellular, do qual depois se isolam algumas cellulas pela acção do acido azotico—alguns vasos e sempre, com preferencia, os laticiferos e as tracheas — os raphidos — et cœtera.

XI Cadeira — **Zoologia**

Lente *M. A. Gonçalves*

PRIMEIRA PARTE

PRELIMINARES

1. Corpos inorganicos e corpos organisados. Caracteres intermediarios entre os primeiros e os segundos, representados nos corpos colloides.
2. Animaes e plantas. — Critica dos seus caracteres distinctivos.
3. Considerações geraes sobre o desenvolvimento dos animaes. Individuo. — Orgão. — A symetria na estructura animal.
4. Cellula animal. — Sua morphologia e physiologia.
5. Tecidos animaes. — Classificação e caracteres morphologicos e physiologicos.

SEGUNDA PARTE

ZOOLOGIA DESCRIPTIVA

PROTOZOARIOS

6. *a*) Moneras. — *b*) Amibos.—*c*) Foraminiferos. — *d*) Radiolarios. — *e*) Gregarinas. — *f*) Infusorios: undulinos, flagellados, ciliados e tentaculiferos.
7. Resumo e considerações geraes sobre os caracteres e classificação dos Protozoarios.

METAZOARIOS

8. Organisação do ovo dos metazoarios. — Fecundação. — Processos geraes de desenvolvimento do ovo.
9. *Celenterados.* — *a*) Espongiarios. — *b*) Hydrozoarios: Hydrophoros, Siphonophoros, Discophoros e Ctenophoros. — *c*) Actinozoarios.
10. Resumo e considerações geraes sobre os caracteres e classificação dos Celenterados.

11. *Vermes.* — 1.° *Plathelminthos.* — *a*) Turbellarios. — *b*) Trematodes. — *c*) Cestoides. — *d*) Orthonectidios. — *e*) Dicyemidios.

12. *Vermes* (continuação). — 2.° *Nemathelminthos.* — *a*) Nematoides. — *b*) Acanthocephalos.

13. *Vermes* (continuação). — 3.° *Annelidios.* — *a*) Chetopodos. — *b*) Hyrudineos. — *c*) Enteropneustos.

14. *Vermes* (continuação). — 4.° *Rotiferos.* — 5.° *Gehirios.* — 6.° *Bryozoarios.* — 7.° *Brachiopodos.*

15. Resumo e considerações geraes sobre os caracteres dos vermes. Principios que devem presidir á sua classificação.

16. *Echinodermes.* — *a*) Crinoides. — *b*) Ophiurideos. — *c*) Asteridios. — *d*) Echinidios. — *e*) Holuthuridios.

17. *Molluscos.* — *a*) Pteropodos. — *b*) Gasteropodos. — *c*) Cephalopodos. — *d*) Lamellibranchios.

18. *Arthropodos.* — 1.° *Peripatidios.* — 2.° *Crustaceos:* *a*) Merostomas. — *b*) Entomostraceos. — *c*) Edriophtalmos. — *d*) Podophtalmos.

19. *Arthropodos* (cont.) — 3.° *Arachnidios.* — 4.° *Myriapodos.*

20. *Arthropodos* (cont.) — 5.° *Insectos:* *a*) Orthopteros. — *b*) Nevropteros. — *c*) Hemipteros. — *d*) Dipteros. — *e*) Lepidopteros. — *f*) Hymenopteros. — *g*) Coleopteros.

21. Estudo comparado dos Arthropodos.

22. *Tunicados* — *Leptocardios.* — Discussão do logar que estes organismos devem occupar na classificação.

23 *Vertebrados.* — 1.° *Peixes:* *a*) Cyclostomas. — *b*) Chondropterigios. — *c*) Ganoides. — *d*) Teleosteos. — *e*) Dipnoicos.

24. *Vertebrados* (cont.) 2.° *Amphibios.* — *a*) Apodos. — *b*) Urodelos. — *c*) Anuros.

25. *Vertebrados* (cont.) — 3.° *Reptis.* — *a*) Ophidios. — *b*) Saurios. — *c*) Hydrosaurios. — *d*) Chelonios.

26. *Vertebrados* (cont.) — 4.° *Aves.* — *a*) Palmipedes. — *b*) Pernaltas. — *c*) Gallinaceas. — *d*) Pombos. — *e*) Trepadoras. — *f*) Passaros. — *g*) Aves de rapina. — *e*) Corredoras.

27. *Vertebrados* (cont.) — 5.° *Mammiferos* — 1.° Monotremas. — 2.° Marsupiaes. — 3.° Monodelphos. — Estudo de todas as ordens dos Monodelphos até ao Homem.

TERCEIRA PARTE

TAXONOMIA

28. Classificações zoologicas. — Especie. — Raça. — Variedade. — Theoria *da selecção natural.* — Fundamentos: Emigrações. — Factos morphologicos. — Anatomia comparada. — Embryologia. — Distribuição Geographica. — A phylogenese estudada nos documentos paleontologicos. — Selecção sexual. — etc. (N'esta parte o ensino deve aproveitar todos os elementos fornecidos pelo estudo da 2.ª parte, a fim de conseguir fixar melhor os factos da zoologia descriptiva).

QUARTA PARTE

PHYSIOLOGIA

29. Funcções physiologicas no reino animal.—Estudo comparado das seguintes funcções:—*Respiração.*—*Digestão.*—*Circulação e Secreção.*—Funcção da Assimilação.—Definições de vida e sua critica.

30. Funcções de reproducção.

31. Funcções de locomoção.—Apparelho vocal.

32. Sentidos.—*Tacto.*—*Gosto.*—*Olfacto.*—*Sentido do calor.*—*Sensação muscular do pezo.*—*Ouvido.*—*Vista.*

33. Constituição do systema nervoso.—Suas funcções.

34. O Instincto e a Intelligencia dos animaes.—A Intelligencia no homem.—Sua superioridade.—Influencia da linguagem.

XII Cadeira—**Resistencia de materias e estabilidade de construcções**

Lente (interino) *M. Terra Pereira Vianna.* Seis horas semanaes.

PRIMEIRA PARTE

MATERIAES DE CONSTRUCÇÃO

1. Considerações geraes.—Classificação dos materiaes de construcção.

2. *Pedras.*—Naturesa e propriedades das pedras de construcção.—Pedras naturaes.—Pedras artificiaes.—Exploração das pedreiras.—Conservação e silicatisação das pedras calcareas.

3. Tijolos.—Telhas.—Manilhas.—Azulejos.—Ladrilhos.

4. *Cal.*—Classificação das caes.—Cosedura da pedra calcarea.—Fabrico da cal hydraulica artificial.—Extincção da cal.

5. Areias.—Pozzolanas.—Cimentos.

6. *Argamassas.*—Composição, dosagem e preparação das argamassas.—Revestimentos.

7. Béton.—Fabrico do béton.—Béton agglomerado.

8. Gesso.—Estuques.

9. Betume e asphalto.—Betumes diversos.

10. *Madeiras de construcção.*—Propriedades e principaes qualidades das madeiras.—Serragem e conservação das madeiras.—Materiaes accessorios d'origem vegetal.

11. *Metaes empregados nas construcções.*—Propriedades e emprego

do ferro fundido, do ferro forjado, e do aço. — Zinco, chumbo, cobre e estanho. — Ligas. — Soldas.

12. Tintas e vernizes.

13. Experiencias sobre a resistencia dos materiaes.

SEGUNDA PARTE

RESISTENCIA DOS MATERIAES

1. *Introducção.* — Objecto e methodo do curso de resistencia dos materiaes. — Definições.

2. *Extensão e compressão das peças prismaticas.* — Leis da extensão e compressão simples. — Trabalho devido ao alongamento. — Contracção e flexão lateral. — Determinação das constantes especificas para os diversos materiaes de construcção. — Distribuição das pressões na secção d'um solido prismatico. — Deformação do solido. — Exemplos de distribuição das pressões. — Distribuição das pressões nos massiços d'alvenaria.

3. *Flexão plana das vigas rectas.*

a) *Flexão das vigas rectas solicitadas por forças normaes.*—Esforço transverso, momento de flexão e momento d'elasticidade. — Deformação da fibra média. — Formulas fundamentaes e suas applicações. — Vigas rectas apoiadas em dois pontos. — Vigas rectas encastradas. — Vigas apoiadas e encastradas. — Vigas apoiadas em tres pontos. — Theoremas sobre a flexão das vigas rectas. — Trabalho da flexão. — Momentos d'inercia das secções usuaes das vigas.

b) *Flexão das vigas rectas solicitadas por forças obliquas.* — Curvatura e equação da fibra média. — Applicações. — Vigas armadas. — Peças carregadas de topo. — Supportes isolados.

c) *Solidos d'egual resistencia.* — Viga apoiada em dois pontos. — Viga encastrada. — Vigas d'altura constante ou variavel.

d) *Vigas apoiadas n'um numero qualquer de pontos* — Ideia geral do problema, e methodos empregados para o resolver. — Theorema dos tres momentos. — Construcção geometrica dos momentos sobre os apoios. — Determinação directa do momento de flexão n'um apoio qualquer. — Formulas aproximadas. — Esforços transversos, e reacções dos apoios. — Distribuição das cargas.

4. *Flexão plana das peças curvas.* — Condições geraes d'equilibrio. — Equação da fibra média deformada. — Determinação da constante das equações principaes. — Distribuição das cargas. — Methodo rapido para o calculo das peças curvas.

5. *Torsão dos prismas.* — Leis da torsão — Demonstração theorica e prática das leis de Coulomb. — Extensão das leis de torsão dos cilindros a prismas quaesquer.

6. Resistencia das superficies. — Resistencia dos vasos cylindricos ou esphericos. — Calculo da espessura das caldeiras.

7. *Equilibrio dos systemas articulados.* — Systemas articulados simples. — Catenaria. — Pontes suspensas. — Systemas articulados complexos. — Asnas. — Rotula simples. — Vigas de rotula. — Equações geraes. — Discussão e

applicação das formulas. — Flexão da viga. — Vigas americanas. — Vigas do systema de Howe.

8. *Equilibrio e estabilidade dos massiços.*

a). *Theoria da estabilidade das abobadas.* — Noções preliminares. — Exposição e critica dos principaes methodos de verificação da estabilidade das abobadas. — Methodos práticos.

b). *Theoria do impulso das terras.* — Estabilidade d'um massiço de terra. — Determinação do prisma de maximo impulso. — Reacção maxima do muro. — Distribuição dos impulsos. — Applicação d'esta theoria á determinação da estabilidade dos muros de supporte. — Muros de revestimento. — Muros de reservatorios.

TERCEIRA PARTE

APPLICAÇÃO DA GRAPHO-ESTATICA ÁS CONSTRUCÇÕES

1. *Flexão.* — Determinação dos esforços que solicitam as vigas rectas, suppondo a sobrecarga fixa ou movel, concentrada ou distribuida, nos casos de serem as vigas. — 1.°, apoiadas nos extremos; 2.°, encastradas n'um extremo e livres no outro; 3.°, apoiadas em dous pontos intermedios.

2. *Extensão e compressão.* — Determinação dos esforços que solicitam as vigas simples, duplas, ou multiplas sujeitas unicamente á tracção ou compressão.

3. Applicação dos estudos precedentes aos vigamentos, asnas, vigas de rotula, etc.

4. Determinação do centro de gravidade e dos momentos d'inercia das superficies planas.

QUARTA PARTE

PROCESSOS GERAES DE CONSTRUCÇÃO

1. *Movimento de terras.* — Excavações e aterros. — Dragagens. — Transporte de terras.

2. *Fundações.* — Estudo do terreno. — Sondagens. — Classificação dos systemas de fundações. — Fundações em terreno incompressivel. — Fundações em terreno compressivel sobreposto a terreno incompressivel. — Fundações em terreno indefinidamente compressivel. — Meios de proteger as fundações. — Enrocamentos. — Ensecadeiras. — Esgoto.

3. *Cantaria e alvenaria.* — Córte e apparelho das pedras. — Execução das obras de cantaria e alvenaria.

4. *Emprego das madeiras nas construcções.* — Córte e apparelho das madeiras. — Madeiramentos em geral. — Andaimes. — Estacarias.

5. Emprego dos metaes nas construcções.

6. Organisação dos trabalhos. — Marcação das obras.

XIII Cadeira — **Hydraulica e machinas**

Lente *Roberto Rodrigues Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

1.º Anno.—Hydraulica.—Machinas em geral.—Machinas hydraulicas.
2.º Anno.—Thermodynamica.—Machinas thermicas.—Motores electricos.—Machinas diversas.—Construcção de machinas.

2.º ANNO

I — Thermodynamica

1. Theoria mecanica do calor. Principios fundamentaes. Equações geraes. Applicação aos gazes e aos vapores.
2. Machinas thermicas. Rendimento theorico maximo.
3. Applicação á machina de vapor. Machina de vapor perfeita. Rendimento calorifico d'esta machina. Machinas ordinarias. Determinação do trabalho e do rendimento. Problemas relativos á machina de vapor. Coefficiente economico d'esta machina.

II — Machinas thermicas

a)—*Machinas de vapor*

1. *Introducção.* — Historia das machinas de vapor.
2. *Classificação e trabalho das machinas de vapor.* — Composição geral d'uma machina de vapor. Classificação das machinas de vapor. Determinação do trabalho e comparação das differentes classes de machinas.
3. *Apparelhos de combustão.* — Combustão e combustiveis. Fornalhas. Chaminés. Apparelhos fumivoros.
4. *Geradores.* — Differentes especies de caldeiras e sua comparação. Accessorios das caldeiras. Prova das caldeiras. Incrustações. Explosão das caldeiras.
5. *Distribuição do vapor.* — Distribuição normal. Distribuição d'expansão fixa ou variavel. Distribuições aperfeiçoadas. Distribuição nas machinas de dous cilindros. Regulamento dos obturadores. Orgãos de mudança de marcha.
6. *Cilindros e embolos.* —Cilindro e seus accessorios. Embolos. Empacamentos.
7. Reguladores. Volantes.
8. *Apparelhos d'alimentação.* — Bombas. Injectores. Alimentação automatica.
9. *Apparelhos de condensação* — Condensação por injecção. Condensação por superficie.
10. *Systemas de machinas de vapor.* — Machinas industriaes: fixas,

semi-fixas, oscillantes, rotativas e locomoveis. Machinas locomotivas: de grande velocidade, de pequena velocidade e mixtas. Machinas maritimas.

11. Machinas de vapores combinados.

b) — Machinas d'ar e de gaz

12. Machinas d'ar quente. Machinas de gaz. Theoria d'estas machinas. Estudo dos typos principaes. Comparação d'estas machinas entre si, e com as machinas de vapor.

III — Motores electricos

1. Geradores mecanicos d'electricidade. Typos principaes. Emprego da electricidade como força motriz. Transmissão electrica da força a grandes distancias.

IV — Machinas diversas

1. Machinas d'ar comprimido.
2. Machinas para levantar pesos. Guinchos, guindastes, elevadores.
3. Machinas ferramentas, — especialmente para o trabalho das madeiras e dos metaes.

V — Construcção das machinas

1. *Construcção.* — Materiaes empregados na construcção das machinas. Meios d'execução. Construcção das caldeiras. Construcção dos orgãos das machinas. Resistencia applicada ás machinas.
2. *Estabelecimento.* — Problema geral do estabelecimento das machinas. Indicações geraes. Condições práticas. Escolha da machina attendendo ao seu fim industrial.
3. Compra, experiencias e emprego das machinas.

XIV Cadeira — Construcções e vias de communicação

Lente (interino) *R. Mendes*

(Curso biennal)

(6 horas semanaes)

1.º Anno. — Edificios. — Abastecimento d'agua e esgotos. — Hydraulica agricola. — Rios e canaes. — Portos de mar e pharoes.

2.º Anno. — Estradas e caminhos de ferro. — Pontes.

2.º ANNO

I — Estradas e caminhos de ferro

a) — Introducção

1. Considerações preliminares sobre as vias de communicação. Classificação geral.
2. Estudo do traçado d'uma via de communicação. Considerações ad-

ministrativas, topographicas, commerciaes e economicas. Phases diversas por que passa o estudo d'um traçado. Traçados directos e indirectos. Traçados excepcionaes. Comparação dos traçados. Escolha definitiva do traçado.

3. Movimentos de terra.

a) — *Calculo dos volumes d'escavação e aterro.* — Composição e calculo das terraplenagens. Calculo das áreas das secções transversaes. Calculo dos volumes. Classificação e distribuição dos materiaes de terraplenagem. Transporte das terras.

b) — *Execução dos trabalhos.* — Abertura das trincheiras. Construcção dos aterros. Consolidação dos taludes.

4. Obras d'arte. Aqueductos: typos diversos. Muros de supporte: sua fórma e espessura. Tunneis: modos de execução, poços e galerias, revestimento, testas. Pontões.

5. Obras accessorias. Drenagem. Revestimento. Enrocamento.

b) — *Estradas*

1. *Generalidades.* — Classificação das estradas ordinarias. Condições d'estabelecimento d'uma estrada.

2. *Traçado e perfilamento.* — Estudo do traçado. Escolha da directriz. Rampas e declives. Curvas.

3. *Perfil transversal.* — Perfis typos. Faixa empedrada. Bermas. Valetas. Taludes.

4. Construcção. Systemas de calçadas. Empedrados. Differentes methodos d'execução.

5. *Comparação e reparação.* — Organisação do serviço. Cantoneiros.

6. Tracção. Experiencias sobre a tracção. Formulas diversas. Viaturas.

7. Organisação d'um projecto d'estrada.

c) — *Caminhos de ferro*

1. *Generalidades.* — Historia das vias ferreas. Comparação com as outras vias de communicação. Condições geraes do estabelecimento das vias ferreas.

2. Traçado e perfilamento. Estudo da linha. Escolha da directriz. Situação das estações. Rampas e declives. Curvas.

3. *Via.*—Diversos systemas de vias ferreas. Perfis typos. Carris. Travessas. Ballastro. Mudanças de via. Crusamentos. Accessorios da via. Signaes. Passagens de nivel. Passagens superiores e inferiores. Assentamento da via.

4. *Estações.* — Estações extremas. Estações intermédias. Disposição geral das estações. Serviço de passageiros. Serviço de mercadorias. Serviço das machinas e viaturas. Officinas.

5. *Material de transporte.* — Carruagens. Wagons. Accessorios.

6. *Tracção.* — Estudo da resistencia dos comboios á tracção. Deducção das formulas que dão as resistencias. Formulas empyricas. Marcha das loçomotivas. Apparelhos diversos para facilitar a passagem das curvas. Systemas propostos para vencer as rampas excepcionaes. Motores diversos.

7. *Exploração.* — Serviço de via e obras. Serviço de tracção. Serviço de movimento e trafego. Administração central.

II—Pontes

a)—Introducção

Historia e classificação das pontes. Situação, direcção e largura das pontes. Vasão dos rios. Secção de fluxo das pontes. Vãos das pontes. Embocaduras e avenidas. Systemas especiaes de fundações.

b) — Pontes de pedra

1. *Arcos das pontes.* — Numero, abertura e flecha dos arcos. Diversas fórmas d'abobadas. Condições d'estabilidade. Espessura no fecho e nas impostas.

2. *Pilares e encontros.* — Condições d'estabilidade. Espessura. Talhamares.

3. *Construcção.* — Construcção dos arcos de cantaria e alvenaria. Assentamento das abobadas. Apparelho das abobadas e das testas. Chapas. Esgoto das aguas. Perfil da calçada. Passeios. Guardas. Construcção dos pilares e encontros.

4. *Simples das pontes.* Simples abertos. Simples apoiados. Descintramento.

c)—Pontes de madeira

1. *Apoios.* — Estacadas simples e em andares. Apoios d'alvenaria.

2. *Tramos.* — Vigas simples. Vigas armadas. Vigas em arco. Vigas americanas.

3. *Montagem* — Taboleiro. Guardas.

d)—Pontes metallicas

1 *Generalidades.* — Diversas qualidades de ferro empregadas na construcção das pontes. Classificação das pontes metallicas.

2. *Systemas de pontes metallicas* — Vigas simples. — Vigas armadas. Vigas de rotula. Vigas americanas. Pontes em arco.

3. *Construcção.* — Pilares e encontros. Montagem. Taboleiro. Guardas. Placas e rolos de fricção. Arrebitagens.

e)—Pontes suspensas

1. *Generalidades.*

2. *Cadeias de suspensão.* Apoios. Amarração dos cabos.

3. *Construcção.* — Fabrico e collocação dos cabos. Taboleiro. Guardas.

f)—Pontes moveis

1. *Generalidades.*

2. *Systemas de pontes moveis.* — Pontes levadiças. Pontes rolantes. Pontes girantes.

g)—Conclusão

1. Comparação dos differentes systemas de pontes.
2. Provas das pontes.
3. Organisação dos projectos de pontes.

XV Cadeira — **Montanistica e docimasia**

(Curso biennal)

1.º anno: — 1.ª parte — Docimasia; 2.ª parte — Metallurgia
2.º anno: — Arte de minas

(6 horas semanaes).

I. — ARTE DE MINAS

Noções geraes e trabalhos de pesquisa e exploração. a).—Classificação e relações geologicas dos jazigos.

b). — Modos de pesquisa e exploração. Sondagens e apparelhos n'ellas usados.

c). — Regimen dos jazigos e suas irregularidades. Meios de reconhecimento quando essas irregularidades desviarem o jazigo, principalmente no caso dos filões.

d). — Meios de avaliar a riquesa de um jazigo e as condições economicas da sua lavra.

Desmontes. a). — Por meio de ferramenta usada geralmente nas terraplanagens.

b). — Emprego de meios auxiliares, como a agua, o fogo e os diversos agentes explosivos.

c). — Apparelhos mecanicos usados nos desmontes e perfurações subterraneas.

Galerias e poços. a). —Perfuração de galerias. — Suas dimensões e revestimento, segundo a naturesa do solo e materiaes disponiveis.

b). — Escolha dos pontos de collocação dos póços, condições a que teem de satisfazer estes ultimos. Dimensões.

c). — Methodos de perfuração dos póços segundo a natureza do terreno. Processos de Guiball, Triger, Kind e Chandron.

d). — Revestimento dos póços.

Methodos de lavra. a). — Condições a que deve satisfazer uma boa disposição dos trabalhos de lavra.

b). — Divisão do jazigo em andares e rede de galerias em cada andar.

c). — Descripção dos diversos methodos de lavra, sua critica e applicação aos diversos typos de jazigos, segundo as suas condições e regimen.

Transportes no interior das minas. a). — Da frente de ataque até ás galerias, meios antigos e modernos.

b). — Transporte nas galerias. Vias ferreas, condições do seu traçado e installação.

c). — Material rolante. Typos dos vehiculos e detalhes das suas differentes partes.

d). — Canaes no interior das minas.

Tracção. a). — Applicação dos motores de sangue e casos em que se torna dificiente.

b). — Motôres mecanicos.

c). — Diversos modos de tracção.

d). — Planos inclinados automotores e bis-automotores.

Extracção. a). — Movimentos nos póços; condições a que devem satisfazer.

b). — Motores empregados, e sua discripção e critica.

c). — Orgãos de transmissão, taes como tambores, bobinas, roldanas, polés e cabos metallicos e não metallicos.

d). — Influencia do peso do cabo na marcha do serviço de extracção. Meios de reduzir aquelle peso. Cabos atenuados ou de secção variavel.

e). — Vehiculos em que é tirado o minereo, taes como baldes, baldes-wagões e wagões propriamente ditos, suas dimensões e capacidade. Emprego das jaulas, sua utilidade e manobra.

f). — Communicação do machinista com os diversos andares da mina. Signaes e meios que lhe indiquem a marcha das jaulas no interior do poço e que evitem o choque das mesmas contra as polés.

Circulação dos operarios nos póços. a). — Escadas fixas, sua installação e influencia sobre o trabalho e a saude dos operarios. Escadas moveis simples e duplas. Circulação nos baldes de extracção, seus perigos e inconvenientes.

b). — Emprego das jaulas para a subida e descida dos operarios. Meios de segurança para evitar a queda de uma jaula no caso de ruptura de um cabo. Varios typos de para-quedas e sua critica.

Esgôtos. a). — Infiltrações, causas que as produzem e meios de as combater.

b). — Camadas aquiferas internas, revestimentos e obras a fazer n'este caso. Galerias de esgôto.

c). — Bombas de esgôto, seus differentes typos e installação. Outros apparelhos de esgôto.

Ventilação. a). — Necessidade da renovação do ar nos trabalhos subterraneos. Casos em que essa renovação se póde fazer naturalmente e meios de dirigir e distribuir a corrente.

b). — Casos em que é forçoso recorrer á ventilação forçada. Ventilação por meio de fócos calorificos. Injecção de vapores e chuva artificial.

c). — Ventilação por meio de apparelhos compressores e aspiradores. Ventiladores de força centrifuga.

Illuminação. a). — Precauções a tomar no serviço de illuminação das minas. Lampadas ordinarias. Lampadas de segurança.

b). — Illuminação electrica. Focos fixos e lampadas moveis.

Installações especiaes no interior das minas taes como: machinas fixas, focos calorificos para a ventilação, estribarias, etc.

Incendios e accidentes nas minas; meios de soccorro.

Transporte exterior. a). — Transporte do minereo ou para os ateliers de preparação mecanica, ou para caes de embarque ou estações de caminho

de ferro, por onde tem de transitar até o seu destino. Condições em que esse transporte tem de ser effectuado.

Trabalhos de lavra a céo aberto. — Casos em que a lavra póde ser feita a céo descoberto. — Exploração de pedreiras e jazigos superficiaes.

Aguas mineraes, sua exploração, captagem e canalisação.

Preparação mecanica dos minereos (parte supplementar). a). — A preparação mecanica é essencial para o tratamento metallurgico dos minereos. Condições a attender para se obter uma boa preparação mecanica e serie de operações a realisar.

b). — Descripção dos apparelhos usados na trituração, lavagem, separação e classificação dos minereos.

c). — Disposição dos apparelhos de preparação mecanica de modo a tornar-se economica essa preparação.

II — METALLURGIA

METALLURGIA GERAL

a). — *Definições. Processos metallurgicos* em geral e sua distribuição em 3 classes: — 1.ª via secca; 2.ª via humida; 3.ª electrolyse. Serie de operações que envolvem.

b). — *Apparelhos metallurgicos* e sua divisão em:

1.° — Fórnos, sua classificação, fórmas, modo de construcção e de funccionar.

2.° — Machinas soprantes, seus diversos typos e modo de funccionar.

3.° — Apparelhos para o aquecimento do ar e insuflar nos fórnos.

c). — *Agentes metallurgicos*:

1.° — Combustiveis naturaes. Estudo dos diversos combustiveis vegetaes e mineraes sob o ponto de vista da sua natureza e poder calorifico.

2.° — Combustiveis artificiaes; diversos meios de os preparar e seu uso.

3.° — Agentes oxidentes, sua natureza e usos.

4.° — Agentes reductores, sua natureza e usos.

5.° — Agentes chlororantes, sulfurantes e dissolventes em geral; agentes de gazeificação.

6.° — Fundentes; sua theoria e emprego. Productos da acção dos fundentes.

METALLURGIA ESPECIAL

Ferro. a). — Resumo historico da metallurgia do ferro; propriedades, usos e minereos.

b). — Processos que dão o ferro ductil pelo methodo directo: 1.° processo catalão; 2.° processo de Finlandia.

c). — Processos que dão o ferro ductil pelo methodo indirecto: — 1.° Fusão nos altos fórnos e sua theoria. Marcha geral da operação. 2.° Conversão do ferro coado em ferro doce. Afinação franceza. Puddlagem a braço e mecanica. Fórnos rotatorios de Danks e Pernot.

d). — Fabricação do aço em forjas, por cementação, pelo processo Bessemer, e pelo processo Martin.

Cobre. *a*). — Propriedades e usos do cobre; seus minereos. Resumo historico da metallurgia do cobre.

b). — Tratamento dos minereos de cobre por via secca. Processo continental. Processo do paiz de Galles. Processo americano (de Boston).

c). — Tratamento dos minereos de cobre por via humida, considerações geraes em que se funda. Processos por sulfatisação. Processos por chlororação. Processos mixtos e fundados sobre as reacções do acido acetico e outros reactivos.

d). — Processos electrolyticos de Elkington, Cobley, Keith, Roesing, Blas & Miest.

e). — Ligas de cobre e suas applicações industriaes.

Chumbo. *a*). — Usos do chumbo e seus minereos.

b). — Tratamento dos minereos sulfurados de chumbo em fórnos de reverbero, pelos processos corinthio, inglez, hespanhol e francez.

c). — Tratamento dos minereos sulfurados em fórnos de cuva: — 1.º sem calcinação prévia (processos do alto Hartz, de Tarnowitz, de Harggerode); 2.º com calcinação prévia (processos do baixo Hartz, de Przibram, de Pontgibaud, de Pisa e de Freiberg).

d). — Processos mixtos. (Ustulação e precipitação).

e). — Processos do Cornwall.

f). — Tratamento dos minereos oxydados do chumbo pelos processos do Altai e de Cartagena.

g). — Afinação do chumbo (pela oxidação parcial ao reverbero, pela acção de reactivos chimicos, pela liquatação seguida de oxidação parcial).

Prata. *a*). — Extracção da prata nos chumbos de obra pelos processos de patinsonagem, copellação e zincagem.

b). — Separação da prata no cobre bruto e mattas cupro-argentiferas (pelo processo da liquatação, pela amalgamação, e processos de Augustin e Ziervogel e de dissolução directa).

c). — Extracção da prata dos seus minereos propriamente ditos por fusão com chumbo (antigo processo de Freiberg), e por amalgamação (europea e americana).

d). — Processos de extracção por via humida, taes como o de Joachimsthal.

e). — Processos de afinação da prata.

Ouro. *a*). — Minereos de ouro e seus jasigos.

b). — Tratamento dos minereos de ouro por amalgamação, por fusão e pelo chloro.

c). — Separação final do ouro pelo sulfureto d'antimonio, pelo enxofre e lithargyrio, por cimentação e por inquartação.

Estanho. *a*). — Tratamento da cassiterite em fórnos de manga pelos processos saxão, bohemio, e inglez.

b). — Tratamento em fórnos de reverbero.

c). — Refinação do estanho.

Antimonio. *a*). — Extracção do antimonio pelo processo da liquatação em cadinhos e em fórnos.

b). — Processos, sem prévia liquatação, em fórnos de reverbero e em fórnos de manga.

c). — Refinação do antimonio.

Zinco. *a*). — Minereos de zinco e seu tratamento pelos processos: belga, silesiano, inglez, corinthio e hungaro.

b). — Refinação do zinco.

III — DOCIMASIA

GENERALIDADES

a). — *Objecto da docimasia. Processos docimasticos* em geral e sua classificação em: — 1.° Processos por via secca; 2.° — Processos por via humida; — 3.° Processos electrolyticos.

b). — *Apparelhos* usados nos processos por via secca, a saber: — Maçarico. — Fornos e vasos diversos, seu uso.

c). — Vasos usados nos processos por via humida, taes como chupetas, galhetas, balões e frascos graduados; sua descripção e uso.

d). — Apparelhos usados nos processos electrolyticos, especialmente os elementos galvanicos de Meidinger, de Kruger, de Pineus, etc.

e). — Reactivos e reagentes empregados nos processos docimasticos, seu uso e meios de verificação.

PARTE ESPECIAL

Ferro. *a*). — Principaes minereos do ferro e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem do ferro nos seus principaes minereos por via secca: — processo allemão, processo inglez.

c). — Dosagem do ferro nos seus principaes minereos por via humida: processos volumetricos oxydantes de Margueritte, Penny, etc.; processos volumetricos reductores de Mohr, Ondemans, Fresenius, Winkler, Weil; methodo ponderal de Fuchs.

d). — Analyses do ferro coalhado, do ferro doce e do aço. Dosagem do carbono, do silicio, do enxofre, do phosphoro e do manganesio contidos n'estes productos.

Cobre. *a*). — Minereos do cobre e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem do cobre nos seus principaes minereos por via secca: — processo allemão, processo inglez.

c). — Dosagem do cobre por via humida: — pelos processos volumetricos de Galleti, Pelouze, Vollhard, Mohr, Haen, Weyl, Parkes e Steinbeck: pelos processos colorimetricos; pelos processos ponderaes.

d). — Dosagem do cobre pelos processos electrolyticos.

e). — Dosagem e separação do cobre nas ligas mais usuaes.

f). — Dosagem do enxofre, arsenio, carbono no cobre metallico.

Chumbo. *a*). — Minereos do chumbo e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem do chumbo por via secca.

c). — Dosagem do chumbo por via humida (processos volumetricos e ponderaes).

d). — Processos electrolyticos.

e). — Analyse do chumbo do commercio, do chumbo de obra e dos productos industriaes do chumbo.

Prata. *a*). — Minereos de prata e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem da prata por via secca (copellação).

c). — Dosagem pelos processos por via humida de Gay-Sussac, Vollhard, Pisani.

d). — Dosagem da prata nos productos industriaes, nas moedas e no chumbo.

Ouro. *a*). — Dosagem do ouro por via secca.

b). — Dosagem do ouro por via humida.

c). — Dosagem do ouro por via secca e via humida combinadas.

d). — Dosagem do ouro nos productos industriaes. Separação do ouro e da prata. Inquartação.

Estanho. *a*). — Minereos de estanho e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem do estanho na *cassiterite* por via secca, e por via secca e humida combinadas.

c). — Processos volumetricos de dosagem do estanho.

d). — Ensaio do estanho metallico e dosagem do antimonio, arsenio e tungsteno n'elle contidos.

e). — Dosagem do estanho nas suas principaes ligas.

Zinco. *a*). — Minereos de zinco e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem do zinco por via secca.

c). — Dosagem do zinco pelos processos volumetricos de Galleti, Kieffer, Schwarz.

d). — Dosagem pelo methodo ponderal de Hampe.

e). — Dosagem pela electrolyse.

f). — Dosagem do zinco metallico e do ferro n'elle existente.

Antimonio. *a*). — Seus minereos e caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem por via secca.

c). — Dosagem por via humida (processos volumetricos e ponderal de Becquer).

d. — Dosagem do arsenico no antimonio metallico.

Manganesio. *a*). — Minereos de manganesio e seus caracteres ao maçarico.

b). — Dosagem da pyrolusite, sob o ponto de vista industrial, pelos processos volumetricos e ponderaes.

c). — Dosagem dos differentes oxidos de manganesio existentes n'um mesmo minereo de manganesio.

d. — Dosagem do manganesio no ferro e seus minereos.

PARTE SUPPLEMENTAR

a). — Analyse do ar no interior das minas.

b). — Apparelhos especiaes para a dosagem rapida do grisou.

c). — Apparelhos para a dosagem rapida dos gazes dos fórnos metallurgicos.

d). — Analyse de aguas potaveis. Hydrotimetria.

e).—Ensaio e analyse de aguas a empregar em machinas a vapor.

f).—Analyse qualitativa e dosagem de aguas mineraes. Trabalhos a fazer nas nascentes. Trabalhos nos laboratorios.

XVI Cadeira — **Economia politica; estatistica; principios de direito publico, administrativo e commercial; legislação.**

Lente *A. Lobo*. (Seis horas semanaes)

PRIMEIRA PARTE

ECONOMIA POLITICA

1.—Definições de economia politica, riqueza, valor, utilidade e suas especies.

2.—Producção. Em que consiste o aperfeiçoamento da producção. Agentes da producção. Intervenção dos agentes naturaes em toda a producção.

3.—Trabalho, productivo e improductivo. Divisão do trabalho, limites naturaes, vantagens e inconvenientes da divisão do trabalho. Cooperação. Classificação das industrias, e influencia geral de cada uma d'ellas na producção.

4.—Cabedaes, materiaes e immateriaes, productivos e improductivos, activos e inactivos. Capital fixo e circulante. Influencia dos cabedaes na producção.

5.—Cabedaes (continuação). Machinas, suas vantagens e inconvenientes. Moeda, sua funcção economica.

6.—Moeda (continuação). Qualidades que deve ter a mercadoria intermediaria das trocas. Metaes preciosos. Unidade monetaria. Moeda subsidiaria. Cunhagem. Legislação patria acerca de moeda.

7.—Moeda (continuação). Papel moeda, seus inconvenientes.

8.—Cabedaes (continuação). Cabedaes immateriaes: instrucção, bons costumes, credito. O credito é um cabedal como a moeda, a qual não tem outro fim senão supprir a falta ou as dificiencias do credito. Especies de credito, real e pessoal.

9.—Credito (continuação). Credito pessoal, instrumentos de credito.

10.—Credito (continuação). Estabelecimentos de credito. Bancos, operações bancarias, especies de bancos. Notas de banco, sua utilidade, differença entre as notas e o papel-moeda. Limites naturaes da emissão. Monopolio ou liberdade de bancos.

11 e 12.—Cabedaes (continuação). Formação, conservação, renovação e transmissão dos cabedaes materiaes. Liberdade. Propriedade. Segurança. Direito de testar. Direitos de transmissão.

13.—Formação dos cabedaes materiaes. Caixas economicas. Seguros.

14.—Cabedaes (continuação). Formação e realisação dos cabedaes pessoaes ou immateriaes.

Propriedade litteraria, artistica e de invenções.

15.—Continuação. Associação, seus principaes typos, sua força.

16.—Continuação da doutrina da realisação dos cabedaes pessoaes. Seguro de vidas. Monte-pios. Da instrucção tratar-se-ha no direito administrativo.

17 e 18.—Distribuição das riquezas. Theoria dos mercados. Dos preços. Leis dos preços. Tendencia para o equilibrio.

19.—Preços (continuação). Crises alimenticias.

20.—Preços (continuação). Crises commerciaes e industriaes.

21.—Lucros e aluguer dos cabedaes. Lei geral. Do juro, lei natural, taxa legal.

22 e 23.—Aluguer da terra. Discussão da theoria da renda de David Ricardo. Direitos da sociedade a respeito das terras incultas; discussão ácerca do direito de occupação.

24 e 25.—Salario. Leis naturaes dos salarios. Causas perturbadoras.

26.—Salario (continuação). Do supposto antagonismo entre o salario e o capital. Remuneração das funcções publicas.

27.—Emprego da riqueza. Consumo reproductivo e não reproductivo. Consumo não reproductivo, luxo e prodigalidade, leis sumptuarias.

28.—Consumo reproductivo; recapitulação das materias dadas a respeito da formação e renovação dos cabedaes.

29 e 30.—Consumos publicos. Do Estado, sua missão. Principios mais importantes ácerca dos impostos. (A doutrina dos impostos será desenvolvida no direito administrativo).

31.—População — Exame da lei de Malthus. Verdadeiros principios.

32.—População (continuação). Emigração e colonias.

33 e 34.—Provas e contraprovas dos principios expostos. Organisação natural do trabalho. Harmonias economicas (resenha das principaes leis expostas durante o curso).

Organisação natural (continuação). Liberdade de commercio.

35 e 36.—Organisação artificial, systema protector, balança de commercio, etc.

37 e 38.—Organisação artificial (continuação). Cooperações, restricções, regulamentos.

39.—Organisação artificial (continuação). Communismo e socialismo. Creta e Esparta. Platão.

40.—Communismo (continuação). Communidades asceticas. Anabaptistas.

41.—Communismo e socialismo (continuação). Thomas Morus. Campanella. Morelly.

42.—Communistas modernos, Babeuf, La Mennais, Cabet, Pedro Lerox.

43.—Socialismo. S. Simão, Roberto Owen, Fourier.

44.—Socialismo. — Luiz Blanc, direito ao trabalho. Proudhon.

SEGUNDA PARTE

PRINCIPIOS DE DIREITO ADMINISTRATIVO

1.—Formas de governo. Breve historia do governo parlamentar em Portugal. A carta, o acto addicional, e a reforma de 1885.

Divisão dos poderes politicos. Poder legislativo; duas camaras; camara dos senadores; camara dos deputados.

2.—Attribuições principaes das côrtes. Privilegios dos membros de uma e outra camara.

3.—Poder executivo. Do rei, irresponsabilidade do rei, responsabilidade dos ministros. Attribuições principaes do poder executivo. Secretarias d'Estado, e indicação geral dos serviços que pertencem a cada uma.

4.—Poder moderador, sua missão e attribuições. Até que ponto são os ministros responsaveis pelos actos do poder moderador.

5.—Conselho d'Estado.

Poder judicial. Organisação. Em que consiste a independencia d'este poder. Da camara dos senadores como Tribunal de justiça.

6.—Do ministerio publico.

7.—Principaes garantias dos cidadãos, especialmente da liberdade de imprensa.

8.—Poder constituinte. Artigos constitucionaes e formalidades para a sua reforma. Delegação do poder legislativo. Suspensão de garantias.

Dictaduras, *bills* d'indemnidade. Modificações dos principios geraes de direito publico quanto ás provincias ultramarinas.

9.—Direito eleitoral. Systema da Carta, systema do acto addicional. Indicação das leis em vigor. Capacidade eleitoral activa e passiva. Recenceamento, recursos. Disposições mais importantes para manter a liberdade eleitoral.

10.—Administração. Natureza das funcções administrativas. Organisação do ministerio do reino. Divisão do territorio. Determinação dos limites, annexação e desannexação de freguezias ou parte d'ellas.

11.—Synopse da organisação administrativa. Juntas de parochia, organisação, lugar que occupam na administração, attribuições, regedores de parochia.

12.—Camaras, sua constituição. Rapida exposição das attribuições das camaras. Força e execução das suas posturas. (A exposição das attribuições das camaras tem só por fim dá a conhecer a natureza e importancia d'estas corporações; nos logares competentes se determinará mais amplamente a parte que lhe cabe em cada ramo da administração).

13.—Administradores de concelho ou bairro. Nomeação, gratificação, attribuições, delegação de attribuições nos regedores de parochia, e attribuições ordinarias dos mesmos regedores.

14.—Districtos. Governadores civis, nomeação, vencimentos, attribuições. Secretaria dos governos civis.

15.—Juntas geraes de districto, sua organisação, e attribuições. Commissão districtal. Concelhos de districto, sua constituição, e natureza das suas funcções em geral.

16.—Concelhos de districto (continuação); attribuições consultivas e contenciosas.

17.—Concelhos de districto (continuação), attribuições contenciosas. Principios geraes ácerca do contencioso administrativo. Generalidades ácerca do contencioso fiscal, de que se tratará mais amplamente nas lições sobre a fazenda publica.

18.—Supremo tribunal administrativo, sua constituição. Principaes termos do processo contencioso administrativo.

19.—Deveres da administração para com as pessoas, portuguezas e estrangeiras, definição. Dos estrangeiros, direito de azylo, extradicção, titulo de ligitimação e bilhetes de residencia, liberdade de cultos, direitos e deveres em materia civil, criminal e tributaria, naturalisação e seus effeitos.

20.—Deveres da administração para com as pessoas (continuação). Registo civil e ecclesiastico. Protecção aos incapazes, tutelas; abandonados, rodas, conselhos de beneficencia pupillar.

21.—Deveres (continuação). Protecção aos ausentes: no reino — curadoria; no estrangeiro — consulados, corpo diplomatico.

21.—Deveres (continuação). Pessoas moraes, sua capacidade civil. Leis de amortisação e desamortisação. Tutela administrativa, especialmente quanto aos actos das camaras municipaes e juntas de parochia.

22.—Deveres. Beneficencia. ¿A caridade legal considerada economicamente. Soccorros publicos. Conselho geral de beneficencia. Estabelecimentos de beneficencia sujeitos immediatamente á administração publica ou subsidiados pelo Estado.

23.—Beneficencia (continuação). Estabelecimentos particulares e associações de piedade e beneficencia; principios da legislação que os rege, comprehendendo as leis vigentes de amortisação e desamortisação. Intervenção das auctoridades administrativas nos estabelecimentos de beneficencia de piedade; juntas de parochia. Principios legislativos ácerca dos legados pios.

24.—Deveres da administração quanto á segurança publica. Policia e suas divisões. Policia administrativa, funcções dos governos civis. Commissario de policia, e administradores de concelho. Corpos de policia. Guardas municipaes. Requisição de força publica. Considerações ácerca da policia preventiva: passaportes, restricções do direito á associação, etc.

25.—Policia sanitaria. Organisação d'este serviço. Junta consultiva de saude, serviço de saude nos districtos, concelhos e parochias.

Condições para o exercicio da medicina e pharmacia; deveres dos que exercem estas profissões. Boticas, armazens, lojas, etc.

26;—Saude publica (continuação). Vacina; prostituição, estabelecimentos insalubres, incommodos e perigosos; cemiterios e sua policia; pantanos e arrozaes.

27.—Saude publica (continuação). Estações maritimas de saude; lazaretos, quarentenas; providencias sanitarias a respeito dos navios que levam passageiros. Policia administrativa municipal, attribuições das camaras municipaes; partidos de medicina; guardas campestres.

28.—Policia judicial e correccional. Commissarios de policia e administradores de concelho. Termos principaes do processo criminal e correccional.

29.—Policia judicial (continuação). Classificação geral dos crimes; systema penal, penitenciarias e estabelecimentos penaes; prisão preventiva, fianças.

30 e 31.—Deveres da administração a respeito dos interesses moraes dos cidadãos. Instrucção e educação. Direcção geral e conselho superior de instrucção publica. Liberdade de ensino, restricções legaes.

Graus d'instrucção. Instrucção primaria, sua organisação em Portugal, comparada com a das outras nações cultas. Questões do ensino gratuito e obrigatorio.

32 e 33.—Instrucção (continuação). Instrucção real secundaria e superior. Instrucção classica secundaria e superior. Instrucção especial. Estabelecimentos diversos. Espectaculos publicos, sua influencia na instrucção e costumes, deveres das auctoridades administrativas a respeito dos espectaculos publicos.

34 e 35.—Deveres da administração quanto aos interesses moraes dos cidadãos (continuação). Religião, religião do Estado, liberdade de consciencia, casamento civil. Padroado. Beneplacito. Recurso á corôa. Concordatas.

36.—Religião (continuação). Dotação do culto catholico. Bulla da crusada. Congruas; leis de desamortisação a respeito dos bens ecclesiasticos. Deveres das juntas de parochia com relação ao culto catholico. Instrucção do clero.

37.—Deveres da administração a respeito dos interesses materiaes da sociedade. Organisação do ministerio das obras publicas, commercio e industria. Direcção dos correios e telegraphos. Serviço postal e telegraphico interno e internacional.

38.—Interesses materiaes (continuação). Obras publicas. Engenharia civil e militar. Expropriação por utilidade publica.

39.—Estradas e ruas das povoações. Classificação das estradas.

Relações do estado, dos districtos e dos concelhos com a viação publica.

40.—Caminhos de ferro, sua historia em Portugal. Policia dos caminhos de ferro.

41.—Principios fundamentaes da legislação patria ácerca de minas.

42, 43 e 44.—Regulamentos geraes para os serviços de obras publicas e minas; regulamentos de administração e contabilidade de obras publicas.

45.—Força publica. Organisação do exercito e marinha.

Recrutamento.

46 e 47.—Fazenda publica. Simples indicação das fontes de receita publica. Organisação do ministerio da fazenda. Pessoal das repartições de fazenda. Classificação legal das contribuições e ideia geral de cada uma d'estas. Questões economicas do imposto unico ou multiplo, do capital ou rendimento, proporcional ou progressivo.

48.—Contribuição predial. Se deve ser preferido o systema de quota, se o de repartição. Systema legal. Matrizes, sua formação, isempções, annullações e cobrança; reclamações e recursos. Deveres das diversas auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição predial.

Contribuição industrial. Pessoas subjeitas a ella, isempções e excepções; taxas fixas, taxas variaveis, ordens de terras e classes d'industrias. Juntas de repartidores da contribuição industrial; gremios. Matrizes, lançamento e repartição, annullações, cobrança, reclamações e recursos. Attribuições das auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição industrial. Imposto de pescado e de minas.

49.—Contribuição de renda de casas. Contribuição de registo, actos sobre que recahe, isempções, importancia do imposto nos diversos casos em que é devido, datas das leis e regulamentos ácerca d'esta contribuição. Au-

ctoridades que intervem no serviço da contribuição do registo. Contencioso fiscal.

50.—Contribuição bancaria; imposto de rendimento. Principaes disposições das leis vigentes sobre estes impostos.

Decima de juros, sua base, manifesto, recursos. Imposto de sello, noções geraes, legislação que as rege. Matriculas e cartas. Direitos de mercê. Emolumentos das secretarias d'Estado.

51.—Contribuições indirectas. Breves noções sobre ellas.

52.—Monopolios do Estado: moeda e casa da moeda; correios e telegraphos.

Divida publica.

53.—Contabilidade publica, e seu objecto e divisão em legislativa, administrativa e judiciaria. Contabilidade legislativa, lei annual de despeza, orçamento geral do Estado, sua formação, apresentação, approvação e effeitos, anno economico, creditos ordinarios, supplementares e extraordinarios.

Orçamento rectificado. Contabilidade administrativa. Repartições de contabilidade nos ministerios, repartição dos creditos legislativos, distribuição de fundos, liquidação, ordenamento e pagamento das despezas publicas, centralisação de contabilidade.

54.—Contabilidade judiciaria. Tribunal de contas, seu regimento. Contas dos ministerios, periodos de gerencia e de exercicios. Contas geraes do Thezouro e dos ministerios ás côrtes, encerramento difinitivo das contas dos exercicios findos, lei annual para o encerramento difinitivo dos exercicios findos, prescripção dos creditos legislativos.

55.—Organisação da fazenda publica nos districtos, comarcas e concelhos. Attribuições dos governadores civis, delegados do thezouro, thezoureiro pagador, administrador do concelho, escrivão de fazenda, recebedor e seus propostos.

Cobrança voluntaria, cobrança coerciva. Fiscalisação.

56.—Fazenda das corporações tanto administrativas como de piedade e beneficencia. Orçamentos geraes, orçamentos supplementares, despezas obrigatorias e facultativas; contas.—Da fazenda municipal em particular; despezas obrigatorias e facultativas e sua analyse.

57.—Fazenda municipal (continuação). Receitas ordinarias e extraordinarias, exame legal e economico de cada fonte de receita municipal. Bens municipaes, requesitos para a sua alienação. Questões com as Juntas de parochias ácerca de baldios, pastos e logradouros communs. Questões de limites.

58.—Fazenda municipal (continuação). Orçamento, formação, approvação, effeitos. Contabilidade municipal.

QUARTA PARTE

PRINCIPIOS DE DIREITO COMMERCIAL

1.—Divisão das materias do direito commercial — commercio terrestre, commercio maritimo, juiso commercial. Difinição do direito civil, caracter da lei mercantil. Relações entre o codigo civil e o commercial; disposições commerciaes em rasão das pessoas, e por effeito de certos actos; 1.º

em rasão das pessoas, commerciantes, requisitos para ser commerciante, capacidade legal, matricula, exercicio habitual de commercio; liberdade de exercer commercio, direito antigo e moderno ácerca da liberdade de commercio, restricções quanto aos corretores, despachantes etc.; licenças, menores, mulheres, estrangeiros. Vantagens de que gosam os commerciantes.

2.—Obrigações communs a todos os que professam o commercio. Registo publico do commercio, o que é, quem escreve n'elle, e seus fins em geral. Escripturação e correspondencia mercantil. Prestação de contas.

3.—Actos commerciaes, noção geral de cada um dos actos mencionados nos artigos 203 e 204 do codigo commercial.

4.—Contractos. Noções do mutuo e usura, commodato e aluguer, deposito e penhor, differenças entre estes contractos. Do mutuo commercial, nomenclatura do codigo civil, differenças entre a legislação commercial e civil, requisitos para que o mutuo seja mercantil, liberdade na estipulação dos juros segundo o codigo civil, falsa liberdade segundo o codigo commercial; juros legaes; differença essencial entre o mutuo e os outros contractos de credito mercantil nos seus effeitos a respeito de terceiro.

5.—Commodato, locação, conducção. Requisitos para que seja mercantil cada um d'estes contractos, direitos e obrigações que d'elles resultam.

Legislação especial ácerca das impreitadas contractadas com o governo ou com a administração do districto, municipio ou parochia.

6.—Deposito, penhor, fianças commerciaes.

Da troca e da compra e venda, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações resultantes d'estes contractos.

7.—Lettras de cambio, definições e requesitos, origem e utilidade das lettras de cambio, sello das lettras. Direitos e obrigações que resultam d'ellas. Livranças, cheques, lettras de terra, cartas de credito.

8.—Mandato e commissão, gestão de negocios, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações que resultam d'estes contractos. Negociantes de commissão, feitores, caixeiros, correctores.

9.—Associações commerciaes. Differentes especies d'ellas, principios communs a todas.

10.—Sociedades anonymas, sua utilidade, natureza, designação, constituição, administração, fiscalisação, dissolução e liquidação, direitos e obrigações dos accionistas, das sociedades e da direcção. Sociedades anonymas estrangeiras. Deveres do governo a respeito das sociedades anonymas.

11.—Sociedades cooperativas. Historia e indole d'estas associações. Exame da lei de 2 de julho de 1867.

12.—Sociedades com firma, de capital e industria, tacita, associação em conta de participação, parceria mercantil, associação de terceiro á parte de um socio. Consignação em conta de participação e á commissão. Noções geraes.

13.—Sociedade (continuação). Formalidades da sociedade mercantil. Dos que podem ser socios e dos que são reputados socios commerciaes. Administração social, direitos e deveres dos socios entre si, para com a sociedade e para com terceiros.

14.—Sociedades (continuação). Dissolução e liquidação das sociedades. Arbitramento em sociedades.

15—Principios geraes ácerca das obrigações commerciaes e modos porque se dissolvem as provas.

16—Fallencias. Quebras, sua abertura, qualificação e effeitos, medidas provisorias, funcções do curador fiscal provisorio.

17—Fallencias (continuação). Ajuntamento dos credores, concordata, administradores da quebra, preferencias, rateio, rehabilitação do fallido, moratorias.

18—Commercio maritimo.—Embarcações, sua natureza, capacidade para as adquirir, modos de adquirição e seus effeitos, matricula, vistorias para que o navio possa ser apparelhado, ou tomar carga; embargos d'embarcação, privilegios; commercio entre portos nacionaes.

19—Parceria maritima, modos porque se faz. Responsabilidade e direitos dos donos, compartes, caixas, capitães, contra-mestres, pilotos, e sobre-cargas dos navios.

20—Ajuste e soldadas dos officiaes e gentes da tripulação, seus direitos e obrigações.

21—Fretamentos e conhecimentos, fórma e objecto dos contractos de fretamento, e direitos que d'elles resultam. Conhecimentos, seus requisitos e effeitos.

22—Abalroação; quem, quando e como responde pelo damno causado por abalroação. Naufragio, varação e fragmentos naufragos, varas forçadas.

23—Contractos de risco, sua definição e requesitos, transferencia da lettra de risco. Seguro, natureza, objecto e fórma d'este contracto. Pessoas e objectos que podem segurar e ser segurados. Direitos e obrigações do segurador e segurado.

24—Seguros (continuação). Seguro de vidas, breve historia dos estabelecimentos de seguros de vidas em Portugal, tabellas de mortalidade, differentes fórmas porque se póde effectuar este seguro.

25—Avarias, definição, especies, regulação de avarias, repartição e contribuição. Extincção das obrigações em materia de commercio maritimo.

XVI Cadeira — Commercio

Lente *J. J. Rodrigues de Freitas*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

2.ª PARTE

I

GEOGRAPHIA COMMERCIAL

O interior do globo, a superficie da terra, a atmosphera. Condições da vida vegetal, regiões vegetaes, naturalisação das plantas. Condições da vida animal, regiões zoologicas, acclimação e acclimamento.

Condições da vida humana. Acção reciproca do mundo externo e do homem. População do globo e das suas grandes divisões. Chrematogenia: utilidade e valor; riquesa; industria. Evolução industrial: o capital. Orga-

nisação social do trabalho; divisão d'elle; funcções economicas; o valor social e a moeda; as fórmas da distribuição. Raças humanas. Superficie e população das principaes nações commerciaes. Centros de producção; praças e portos mais importantes; vias de communicação; importação e exportação.

Geographia de Portugal. Situação, limites, dimensões. A terra e as aguas; a atmosphera. O homem e a sociedade (população, industria em geral, instituições economicas, riquesa publica). Resumo da historia economica de Portugal.

Emigração e colonisação. A emigração propriamente dita e o desenvolvimento quantitativo e qualitativo do homem; a emigração e a miseria. Acclimabilidade, acclimação, acclimamento. Diffusão e combinação das civilisações; forças attrahentes e repulsivas. A emigração, os paizes de origem e os de destino. Tres especies de colonias; regimen de cada uma d'ellas. Preparativos de colonisação. As colonias e a sua transformação em nações independentes. Resumo da historia da colonisação portugueza. Estado actual das nosssas colonias.

II

ECONOMIA COMMERCIAL

Commercio; distincção entre elle e a industria transportadora. Commercio por grosso e de retalho; ordinario e de especulação; activo e passivo; geral e especial; por conta propria e alheia; reexportação e transito.

Organisação das emprezas commerciaes; applicação da lei do maximo effeito. Recursos reaes: dinheiro, e mercadorias em geral; titulos, valores fundiarios. Recursos pessoaes: probidade, instrucção, economia, amor do trabalho, methodo. A grandesa dos recursos e a amplitude da empresa. Multiplicidade dos ramos do negocio. Direcção superior da empresa; exame directo. Estabelecimento de relações com os productores e consumidores. Claresa nos contractos; publicidade. Transacções a dinheiro e fiado.

O credito e os recursos proprios. Os gastos pessoaes e a economia. Perigo de attingir os limites do credito.

Exame dos elementos do preço de custo. Gastos geraes e especiaes.

Caravanas, feiras e exposições. Bolsas. Camaras e associações commerciaes. Circulares, estatisticas mercantis. Consulados. Escolas commerciaes.

Alfandegas. Pautas e sua organisação. Direitos: especificos e *ad valorem*, estatisticos, protectores, fiscaes, prohibitivos, addicionaes, differenciaes. Disposições especiaes sobre tecidos mixtos e bordados. Regimen de excepção. Isenções e restituições (*drawbacks*). Taras. Prohibições e restricções. Formalidades do despacho. Armazenagem. Emolumentos. Pautas convencionaes.

Impostos de tonelagem. Arqueação de navios. Nacionalisação das embarcações. Quarentenas. Direitos sanitarios.

Contestações sobre despacho de mercadorias. Ommissões. Conselho das alfandegas.

Exposição e critica das doutrinas sobre commercio internacional:

a) Balança de commercio. Systema mercantil.

b) Systema proteccionista, particularmente o de List e o de H. Carey.

c) Liberdade de commercio. As reformas aduaneiras variando em cada estado social. Os fundadores da sciencia economica e o livre cambio. A escóla historica. Erro de Bastiat.

Principaes reformas aduaneiras em Portugal desde as pautas de 10 de janeiro de 1837. O principal fim d'estas pautas não foi a *protecção*. Opiniões de Passos Manoel a este respeito. Representações de fabricantes do Porto contra essas pautas. Relatorio da commissão de pautas.

Principaes reformas aduaneiras no estrangeiro.

Resumo da legislação colonial sobre importação e exportação de mercadorias.

Impostos de consumo; real de agua, pauta da alfandega de consumo em Lisboa; imposto sobre o vinho no Porto. Impostos especiaes para melhoramentos de portos, obras da Bolsa e do Tribunal do Commercio no Porto.

Imposto do pescado.

Legislação sobre caminhos de ferro, correios, telegraphos, pesos e medidas.

Seguros. Mutuos e por premio. De vidas; contra fogo, sinistros maritimos e fluviaes. Seguro de gados.

Moeda. Systema monetario portuguez. Porque se adoptaram as bases do systema inglez. Estado da circulação monetaria em 1854. Estatistica da cunhagem. Importação e exportação de moeda. Influencia do direito de exportação; variação d'elle desde 1837. A massa monetaria circulante em Portugal (Calculos dos snrs. Barros Gomes e Ottomar Haupt). Variação do valor do real de ouro e de prata desde o seculo 15.º

Moeda de cobre e bronze; notas de cobre. Legislação a este respeito desde o seculo 17.º

Legislação monetaria das ilhas adjacentes. A moeda nas provincias ultramarinas.

Systemas monetarios estrangeiros.

Uniformidade monetaria; trabalhos diplomaticos e legislativos a este respeito.

O bimetallismo. A baixa do valor da prata precedeu a reforma allemã. Augmento da producção da prata e diminuição da do ouro nos ultimos tempos. Influencia d'aquella reforma. O *Bland-bill* e seus effeitos. As conferencias de Paris e a de Colonia; exame das doutrinas ahi expostas. Effeitos provaveis do bimetallismo sobre a producção do ouro. Producção dos metaes preciosos em geral. Producção em Portugal. Importação de ouro do Brazil. Exame dos dados estatisticos sobre variação dos preços segundo Soetbeer, Ervin Nasse e Giffen.

Technica da moeda: as materias primas, a liga, o peso, a forma, o corte ou a divisão, a tolerancia, o gasto.

Cambios: as transacções internacionaes e os meios de pagamento. Elementos do preço do cambio, e seus limites. O regimen monetario e o cambio; factos occorridos em Portugal e no Brazil. Exemplos de grandes operações cambiaes: a indemnisação paga pela França á Allemanha.

Erro da lei cambial de Lefèvre.

Breves noções historicas do commercio cambial.

Credito; suas operações e instituições. Collectores e distribuidores de dinheiro.

Caixas economicas; historia das portuguezas; aperfeiçoamentos introduzidos nas estrangeiras.

Bancos de commercio, e suas operações. Importancia da relação entre as dividas activas e as passivas; disponibilidade dos capitaes; emprestimos a curto e a longo praso; depositos á vista com abono de juro e sem elle.

Systemas bancarios. Principaes bancos estrangeiros. Exame historico e critico dos bancos portuguezes.

Exame especial das doutrinas sobre emissão de notas e da legislação europea e americana e este respeito.

Credito predial. Exame da legislação portugueza e da Companhia de Credito Predial. Credito agricola. Credito movel. Bancos populares.

Emprestimos publicos: modos de os realisar.

Divida publica, perpetua, amortisavel, fluctuante; conversão e consolidação. Reducção do juro. Junta do Credito Publico. Caixa de Depositos. Noções historicas sobre a nossa divida.

Operações de Bolsa. As Bolsas de Londres, Paris e Lisboa.

Papel moeda; diversas denominações. Relação entre a quantidade d'este papel e as necessidades da circulação. Applicação da lei de Gresham. O curso forçado, os cambios e os preços no interior. Restabelecimento das condições physiologicas da circulação monetaria; a elevação do curso e a diminuição do valor nominal.

Resumo da historia do papel moeda em Portugal.

Moeda fiduciaria emittida pelo thesouro; curso legal, e convertibilidade d'ella.

Perturbações economicas do mercado. Crises commerciaes; historia das mais notaveis desde o seculo 15.º, e especialmente das de Portugal em 1846 e 1876.

Doutrinas de J. B. Say, Caquelin, Wilson, Stuart Mill e Peshine Smith. A periocidade das crises, e as observações de Juglar. As manchas do sol e as crises (doutrina de Stanley Jevons); exame da critica de Foville. Doutrina de Rodbertus e sua critica. O cambio e as crises, segundo Juglar e Laveleye. Comparação do abatimento economico de 1819-1830 com o estado actual do mercado. Opinião de Laveleye; critica a este respeito.

Crises financeiras no estrangeiro, especialmente a de Law e dos assignados.

Augmento da solidariedade economica entre os individuos, e entre as nações; constituição de uma especie de *estado* universal. Poder crescente do individuo e da sociedade para combater as crises.

---

§ 16

Plano dos estudos dos diversos cursos da Academia Polytechnica

(*DECRETO DE 10 DE SETEMBRO DE 1885*)

I — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE OBRAS PUBLICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica...........	6	.
4. Geometria descriptiva I.................	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo....	4	.
46. Desenho................................	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I......	.	2
	16	8
	24	
4.° ANNO		
8. Astronomia e geodesia..................	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia.....	6	.
18. Botanica geral.....	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II.....	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
5.° ANNO		
9. Topographia...........................	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções..........................	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II...........	6	.
30. Construcções I ou II	6	.
23. Projectos de construcções...............	.	2
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
Exercicios praticos de topographia........	.	2
Missões.		
	20	10
	30	

6.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas I ou II...........	6	.
32. Construcções II ou I....................	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas,		.
de minas e industrial....................	2	.
33. Projectos de construcções II ou I........	.	6
27. Projectos de machinas II ou I...........	.	6
Missões.		
	14	12
	26	

II — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE MINAS

1.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica....................	6	.
12. Chimica inorganica geral.................	6	.
44. Desenho..............................	.	6
Exercicios de mathematica..............	.	2
Chimica prática........................	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
2.º ANNO	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
37. Montanistica e docimasia I ou II	6	.
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
38. Projectos de arte de minas	.	6
Exercicios praticos de topographia	.	2
Missões.		
	20	14
	34	

6.º ANNO	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
34 e 35. Montanistica e docimasia II ou I	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
27. Projectos de machinas	.	6
36. Projectos de metallurgia	.	2
Exercicios de docimasia	.	2
Missões.		
	14	10
	24	

III — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS INDUSTRIAES

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	2	.
14. Chimica organica e biologica	4	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicio de geometria descriptiva I	.	2
Chimica prática	.	2
	16	10
	26	
4.º ANNO		
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
20. Zoologia geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
13. Chimica inorganica industrial	2	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 6.º)	2	.
28. Projectos relativos a machinas e a chimica industrial	.	6
Missões.		
	18	6
	24	

6.º ANNO

	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
16. Chimica organica industrial	2	.
11. Physica industrial	2	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 5.º)	2	.
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial	.	6
Missões.		
	16	6
	22	

IV — CURSO DE COMMERCIO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
10. Physica geral	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
Physica prática, especialmente trabalho com o microscopio	.	2
Chimica prática	.	2
	12	4
	16	
2.º ANNO		
13. Commercio I ou II	6	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
15. Chimica analytica	2	.
Chimica prática	.	2
	10	2
	12	
3.º ANNO		
41 e 42. Commercio II ou I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial	4	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
47. Analyse chimica commercial	.	2
	12	2
	14	

V — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCÓLA DO EXERCITO

a. Para officiaes de estado maior e de engenheria militar; e para engenheria civil.

		Numero de horas semanaes	
		Lições	Exercicios
	1.º ANNO		
1.	Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12.	Chimica inorganica geral	6	.
14.	Desenho	.	6
	Exercicios de mathematica	.	2
	Chimica prática	.	2
		12	10
		22	
	2.º ANNO		
2.	Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10.	Physica geral	6	.
15.	Chimica analytica	2	.
45.	Desenho	.	6
	Exercicios de mathematica	.	2
	Physica prática	.	2
	Chimica prática	.	2
		14	12
		26	

	Numero dc horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
24		
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
24		

b. Para officiaes de artilheria.

	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
22		

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
2.° ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
43. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva	.	2
	16	8
	24	

VI—CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA NAVAL

a. Para officiaes de marinha.

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
10. Physica geral	6	.
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
	12	4
	16	

b. Para engenheiros constructores navaes.

1.º ANNO

	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
14. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO

	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
Physica prática	.	2
	18	10
	28	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
18. Botanica geral	6	.
16. Desenho	.	6
	12	6
	18	

VII — CURSO PREPARATORIO PARA AS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
10. Physica geral. Physica prática	6	2
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica, Chimica prática	6	2
20. Zoologia geral	6	.
18. Botanica geral	6	.
	30	6
	36	

VIII — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DE PHARMACIA NAS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática....................	6	2
18. Botanica geral......	6	.
	18	4
	22	

O numero de horas de exercicios, projectos e trabalhos praticos é, no começo de cada anno, fixado pelo conselho academico.

§ 17

Livros que servem de texto e aconselhados para consulta nas diversas cadeiras no anno lectivo de 1885-1886

1.ª Cadeira.

Francœur (L. B.). — Geometria analytica por —, novamente traduzida, correcta e augmentada por Francisco de Castro Freire e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto; 3.ª edição. Coimbra, 1871. 1 vol. in-4.º de 272 pag. e 5 est.

— Algebra superior por —, novamente traduzida, correcta e augmentada por Francisco de Castro Freire e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto; 3.ª edição. Coimbra, 1871. 1 vol. in-4.º de 311 pag. e 1 est.

Gomes Teixeira (F.), — Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal (em publicação).

2.ª Cadeira.

GILBERT (Ph.). — Cours d'analyse infinitésimale. Partie élementaire. 2ᵉ édition; 1 vol. in-8°. Paris et Louvain, 1878.

3.ª Cadeira.

LAURENT (H.). — Traité de Mécanique rationelle, à l'usage des candidats à l'Aggrégation et à la Licence. 2ᵉ édition, 2 vol. in-8°. Paris, 1877-1878.

4.ª Cadeira.

LA GOURNERIE (JULES DE). — Traité de Géometrie descriptive. 2ᵉ ed., in-4°, en *trois parties.*

Première partie: Texte de XIX-143 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1873.

Deuxième partie: Texte de XIX-222 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1880.

Troisième partie: Texte de XX-230 p. et atlas de 46 planches. Paris, 1885.

5.ª Cadeira.

FAYE (H.). — Cours d'Astronomie de l'Ecole Polytechnique, 2 vol. in-8°. Paris, 1881-1883.

I PARTIE: *Astronomie sphérique. — Descriptions des instruments. — Théorie des erreurs. — Géodésie et géographie mathématique,* 1881. — 1 vol. in-8° de VIII — 374 p.

II PARTIE: *Astronomie solaire. — Théorie de la lune. — Navigation.* 1883.

6.ª Cadeira.

JAMIN (J.). — Petit traité de physique, à l'usage des établissement d'Instruction, des aspirants au baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. Nouveau tirage, augmentée de *Notes sur les progrès récents de la physique,* par M. E. BOUTY. 1 vol. in-8°. Paris, 1882.

GANOT (A.). — Traité élémentaire de physique. — 19ᵉ édition, entièremente refondue, par Georges Maneuvrier, 1 vol.

in-8º de 1160 pag., contenant 1014 gravures intercalées dans le texte et deux planches en couleur. Paris, 1884.

7.ª e 8.ª Cadeiras.

Agenda du chimiste à l'usage des ingenieurs, physiciens, chimistes, etc. Paris, Librairie Hachette, ultima edição.

BERTHELOT (M.). — Traité élémentaire de chimie organique, 2e ed. avec la collaboration de Jungfleisch. 2 vol. in-8º de xx-483 e xv-489 pag. Paris, 1880.

LAPA (J. I. FERREIRA). — Technologia rural ou artes chimicas, agricolo-florestaes.

Primeira parte: Productos fermentados. 3.ª edição. 1 vol. in-8.º de 734 pag. Lisboa, 1885.

Segunda parte: Azeites lacticinios, cereaes, farinhas, pão e feculas. — 2.ª edição; 1 vol. in-8.º de 221 pag. Lisboa, 1875.

Terceira parte: Productos saccharinos, florestaes, textis, animaes e salinos, 1 vol. in-8.º Lisboa.

PAYEN (A.). — Précis de chimie industrielle, à l'usage: 1º des écoles d'arts et manufactures et d'arts et metiers; 2º des écoles préparatoires aux professions industrielles; 3º des fabricants et de agriculteurs; — 6e edition, révue et mise au courant des dernières découvertes scientifiques par Camille Vincent. — 2 tomes in 8º de 832 e 1014 pag. et 1 atlas dè XLIV planches. Paris, 1877—1878.

SILVA (A. J. FERREIRA DA). — Tratado de chimica elementar.

I. Chimica mineral. — 1 vol. in-8.º de xv-580 pag. Porto, 1883.

9.ª Cadeira.

LAPPARENT (A. DE). — Cours de minéralogie. 1 vol. in-8º de XII-560 avec 519 gravures dans le texte et une planche chromolithographiée. Paris, 1884.

GONÇALVES GUIMARÃES (DR. A. J.). — Tratado elementar de mineralogia — Principios geraes. Porto, 1883. — 1 vol. in-8.º de 239 pag. e 1 atlas de XXII est.

10.ª Cadeira.

CAUVET (D.) Cours élémentaire de botanique.

I. Anatomie et physiologie végétales; paléontologie végetale, geographie botanique.—1 vol. in-18, de VIII-316 pag. avec 404 figures. —Paris, 1883.

II. Les familles des plantes. — 1 vol. in-18.° de 468 pag. avec 363 figures.— Paris, 1883.

LE MAOUT (EMMANUEL) et DECAISNE (J.). — Flore élementaire des jardins et des champs, acompagnée de clefs analytiques, conduisant promptement à la determination des familles et des genres, et d'un vocabulaire des termes techniques. —Paris, 1 vol. in-18 de 963 pag.

BROTERO (F. AVELLAR). — Flora lusitanica, seu plantarum, quæ in Lusitania vel sponte crescunt, vel frequentius coluntur, ex florum præsertim sexubus systematice destributarum, synopsis.

Pars I.—Olissipone, 1804; 1 vol. in-4.° de XVIII 607.

Pars II.—Olissipone, 1804; 1 vol. in-4.° de 558 pag.

11.ª Cadeira.

LANESSAN (J. L. DE). — Manuel d'histoire naturelle mèdicale.— T. II. Zoologie médicale, 2ᵉ edition.— 1 vol. in-18, de 972 pag., avec 703 fig. dans le texte. Paris, 1885.

12.ª Cadeira.

CALLIGNON. — Résistence des matériaux; 3ᵉ ed. — Paris.

13.ª Cadeira.

CALLON (J.). — Cours de machines, 3 t. in-8°. Paris.

T. I: *Principes généraux, machines hydrauliques et à gaz*. 1 vol. in-8° et atlas.

T. II: *Machines à vapeur*. 1 vol. in-8° et atlas.

T. III: *Résistence de matériaux* appliquée aux machines. 1 vol. in-8° et atlas.

14.ª Cadeira.

DURAND-CLAYE (CH. L.) et L. MARX. — Routes et chemins vicinaux. 1 vol in-8° — Paris, 1885.

DEBAUVE—Manuel de l'engénieur des ponts et chaussées. Paris.
10ᵉ *fascicule* — Ponts en maçonnerie. 1 vol. in-8° et atlas.
11° *fascicule* — Ponts et viaducs en bois et en métal. 1 vol. in 8° et atlas.
13ᵉ *fascicule* — Chemins de fer. 1 vol, in 8° et atlas.

15.ª Cadeira.

BALLING. — Manuel pratique de l'art de l'essayeur; guide pour l'essai des minerais, des products métallurgiques et des combustibles, traduit de l'allemand par le dr. L. Gautier — Paris, 1881. 1 vol. in-8° de VIII-607 p.

CALLON (J.). — Cours d'explotation des mines, professé à l'École des mines, t. I et II, 2 vol. in 8° et atlas.
T. III Préparation mécanique, publié par M. Boutan. 1 vol. in-8° et atlas.

GRUNER — Traité de métallurgie; T. I e II, 1ᵉ partie, 2 vol. in-8°, avec atlas et 40 planches.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE — Cours d'exploitation des mines. 2 vol. in-8°, avec nombreuses vignettes intercalées dans le texte.

16.ª Cadeira.

RODRIGUES DE FREITAS (J. J.) Principios de economia politica. Porto, 1883. 1 vol. in-8.° de 344 pag.
Codigo administrativo, approvado por carta de lei de 6 de maio de 1878, seguido d'um reportorio alphabetico e de um appendice, contendo toda a legislação relativa ao mesmo codigo, publicada até hoje. Porto, 1886.
Codigo Commercial Portuguez, seguido de um appendice que contém a legislação que tem alterado alguns dos seus artigos, publicados até ao fim do anno de 1878. Coimbra, 1879. 1 vol. de 784 pag.

17.ª Cadeira.

PERY (GERARDO A.). — Geographia e estatistica geral de Portugal e colonias com um atlas e oito estampas. Lisboa, 1875. 1 vol. in-8.º de XVI-404.

LOBO DE BULHÕES (M. E.). — Les colonies portugaises: court exposé de leur situation actuelle. 1 vol in-8º de 137 pag. Lisbonne, 1878.

III

FREQUENCIA — ESTATISTICAS

§ 1.º

Lista alphabetica dos alumnos da Academia, indicando a sua filiação, naturalidade, e as cadeiras em que se matricularam

1—Abilio Ribeiro de Miranda, filho de Joaquim Correia de Miranda, natural de Santo Thyrso — 1.ª cadeira, 7.ª e 18.ª (1.º anno);

2—Abilio da Silva Carvalho, filho de Luiz da Silva Carvalho, natural da Regua — 11.ª cadeira (1.ª parte);

3—Accacio de Sampaio Telles e Paiva, filho de José de Paiva Cardoso, natural de Leiria — 6.ª e 7.ª cadeira;

4—Adolfo Augusto de Vasconcellos Artayette, filho de José Augusto de Vasconcellos Artayette, natural do Porto —8.ª e 11.ª (1.ª parte);

5—Adolfo Maria Barbosa, filho de Antonio Joaquim Rodrigues Barbosa, natural de S. Salvador, concelho de Villa Pouca d'Aguiar — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte):

6—Adriano d'Abreu Bandeira, filho de José Maria Bandeira Monteiro, natural de Rezende— 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte):

7—Adriano Soares Dias Moreira, filho de Joaquim Soares Dias, natural d'Oldrões, concelho de Penafiel — 8.ª, 11.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte);

8—Albano Annibal de Barros, filho de Francisco Augusto de Barros, natural de Bragança — 2.ª cadeira, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 4.ª (1.ª parte);

9—Albano Augusto d'Oliveira, filho de Delfina da Rocha Oliveira, natural de Recarei, concelho de Paredes — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

10—Alberto d'Almeida Magro, filho de Victorino Pereira Magro, natural de Santa Maria d'Assumpção, concelho de Monte Alegre —8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

11—Alberto Alvaro d'Armada, filho de Joaquim Alvaro d'Armada, natural da freguezia de S. José, da cidade do Rio de Janeiro — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

12—Alberto Augusto Gomes d'Almeida, filho de José Gomes d'Almeida, natural de Castellões de Cambra, districto de Aveiro — 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

13—Alberto Barbosa de Queiroz, filho de Antonio Barbosa de Queiroz, natural d'Ancede, concelho de Baião — 8.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte):

14—Alberto Goulard de Medeiros, filho de Manoel Francisco Medeiros, natural da Horta (Ilha do Fayal) — 11.ª (1.ª parte);

15—Alberto José Hypolito, filho de Sebastião José Hypolito, natural do Porto—5.ª cadeira, 4.ª (2.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

16—Alberto Maria Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—1.ª cadeira e 6.ª;

17—Alberto Nunes de Figueiredo, filho de Agostinho José de Figueiredo, natural do Porto—1.ª e 6.ª;

18—Alberto Pereira Pinto d'Aguiar, filho de Anna Emilia d'Aguiar, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

19—Alberto Pimenta Castel'Branco, filho de Albino Pimenta d'Aguiar Castel'Branco, natural de Braga—2.ª, 3.ª, 4.ª (1.ª e 2.ª parte);

20—D. Alexandre de Castro Pamplona, filho do conde de Rezende, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

21—Alfredo Araujo d'Almeida Campos, filho de Antonio d'Almeida Querido, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

22—Alfredo Augusto Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—1.ª, 7.ª e 18.ª (1.ª parte);

23—Alfredo Barros Leal, filho de José Joaquim de Barros, natural de Penafiel—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

24—Alfredo da Costa Rodrigues, filho de Antonio da Costa Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

25—Alfredo Djalme Martins d'Azevedo, filho de Antonio Maria d'Azevedo, natural do Porto—4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª e 18.ª (3.ª parte);

26—Alfredo de Sousa Azevedo, filho de João Baptista de Sousa Azevedo, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

27—Alipio Augusto Trancôso, filho de Firmino Antonio Trancôso, natural de Bragança—8.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

28—Alvaro Augusto Ferreira, filho de Antonio Bernardo Ferreira, natural do Porto—1.ª, 6.ª, 8.ª (2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

29—Alvaro Martins Sequeira, filho de Francisco Martins Sequeira, natural de S. Jeronymo de Real, concelho de Braga—3.ª, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte), 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

30—Annibal Augusto Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—1.ª, 7.ª e 18.ª (1.ª parte);

31—Annibal Barbosa de Pinho Lousada, filho de Luiz Barbosa de Pinho Lousada, natural de Irivo, concelho de Penafiel—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª parte);

32—Antonio Augusto d'Almeida, filho de João Antonio d'Almeida, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

33—Antonio Augusto d'Aguiar Cardoso, filho de Silvestre d'Aguiar Bizarro, natural da Villa da Feira—8.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

34—Antonio Augusto de Castro Soares, filho de José Bonifacio do Carmo Soares, natural d'Oleiros, concelho da Villa da Feira—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

35—Antonio Augusto Pereira Cardoso, filho de João Pereira Cardoso, natural de Armamar—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª parte);

36—Antonio Baptista Alves de Lemos, filho de Joaquim Baptista Alves de Lemos, natural do Porto—8.ª (1.ª parte);

37—Antonio Caetano Ferreira de Castro, filho de Caetano José Ferreira, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 11.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte);

38—Antonio de Carvalho Rebello Teixeira de Sousa Cyrne, filho de Manoel de Carvalho Rebello Teixeira de Sousa, natural do Porto — 1.ª e 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

39—Antonio Coutinho d'Araujo Pimenta, filho de José Coutinho d'Araujo Pimenta, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

40—Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de S. Miguel de Bairros, concelho de Castello de Paiva — 2.ª cadeira e 4.ª (1.ª parte), 9.ª e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

41—Antonio Ferreira Pinto da Motta, filho de José Ferreira da Motta, natural de Fiães, concelho da Feira — 11.ª cadeira (1.ª parte);

42—Antonio Ferreira da Silva Barros, filho de José Ferreira da Silva Barros, natural de S. Mamede de Infesta, concelho de Bouças — 3.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

43—Antonio Francisco Ramalho, filho de Domingos de Mira Ramalho, natural de Amarelleja, concelho de Murça — 8.ª cadeira (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

44—Antonio Homem da Silva Rosado, filho de Joaquim Homem de Moraes Rosado, natural de Vizeu — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 6.ª e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

45—Antonio João da Silva, filho de Domingos João da Silva, natural de Ramalde, concelho de Bouças — 11.ª (1.ª parte);

46—Antonio José de Lima, filho de José Antonio de Lima, natural de Pereiro, concelho de Barcellos — 2.ª e 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

47—Antonio José Teixeira Junior, filho de Antonio José Teixeira, natural de Casaes do Douro, districto de Vizeu — 2.ª e 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

48—Antonio Julio Ferreira de Barros, filho de Sabino Ferreira de Barros, natural de Murça, districto de Villa Real — 6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

49—Antonio Julio Salgado, filho de João Augusto Salgado, natural de Carrazeda de Monte-Negro, concelho de Valpassos — 11.ª (1.ª parte);

50—Antonio Lopes Baptista, filho de João Lopes Baptista, natural do Porto — 1.ª cadeira e 6.ª (1.ª parte);

51—Antonio Luiz Soares Duarte, filho de Manoel Francisco Duarte, natural do Porto — 3.ª cadeira e 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

52—Antonio Manoel Botelho, filho de Francisco de Paula Botelho, natural de Belem — 1.ª cadeira e 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª e 2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

53—Antonio Manoel Pelleias, filho de Luiz Manoel Pelleias, natural da Torre de Dona Chamma, concelho de Mirandella — 1.ª cadeira e 18.ª (1.ª parte);

54—Antonio Maria Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Provezende, concelho de Sabrosa — 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

55—Antonio Pedro d'Ascenção, filho de Antonio Pedro d'Almeida Maldonado, natural de Alvaiazere — 11.ª (1.ª parte);

56—Antonio Pinto Rodrigues Fernandes, filho de Joaquim Pinto Fer-

nandes, natural de Ancede, concelho de Baião — 2.ª e 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª parte):

57—Antonio Rigaud Nogueira, filho de Francisco Rodrigues Nogueira, natural da Bahia (Brazil) — 3.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte), 9.ª;

58—Antonio Salgado de Miranda, filho de Antonio Joaquim Pinheiro de Miranda, natural de Guimarães — 11.ª (1.ª parte);

59—Antonio dos Santos Pinto, filho de Manoel dos Santos Pinto, natural de S. Bartholomeu de Paramos, concelho de Carrazeda d'Anciães — 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

60—Antonio de Sousa Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 5.ª, 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

61—Antonio Thomaz Ferreira Cardoso, filho de Antonio Joaquim Santiago, natural d'Oliveira d'Azemeis — 2.ª e 7.ª (1.ª parte), 18.ª (3.ª parte);

62—Antonio Venancio da Gama Pimentel, filho de José Manoel da Gama, natural de Sedães, concelho de Mirandella — 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

63—Antonio Xavier Gomes dos Santos, filho de Antonio Gomes dos Santos, natural de S. Miguel do Souto, concelho da Feira — 2.ª cadeira, 10.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

64—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira, filho de João Antonio Lourenço Gomes Ferreira, natural de Villarinho de Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte);

65—Arthur Alberto Vaz Pereira, filho de Antonio Pereira, natural de Valença do Minho — 11.ª (1.ª parte);

66—Arthur Augusto d'Albuquerque Seabra, filho de Armando Arthur Ferreira de Seabra da Motta e Silva, natural do Porto — 3.ª e 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte);

67—Arthur Hygino Soares, filho de José Victorino Soares, natural de Angra do Heroismo — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

68—Arthur Maria da Silva Ramos, filho de Antonio Maria Guilherme da Silva Ramos, natural de Braga — 4.ª (2.ª parte), 5.ª, 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

69—Arthur Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 5.ª e 8.ª (2.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

70—Augusto Pereira Nobre, filho de José Pereira Nobre, natural do Porto — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª parte);

71—Augusto Velloso Ferreira, filho de Augusto Alberto da Silva Ferreira, natural do Porto — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

72—Aurelia de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª parte);

73—Bellarmino Baptista de Vasconcellos, filho de Antonio Soares Moreira de Vasconcellos, natural de Cepellos, concelho d'Amarante — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

74—Bento de Carvalho Miranda, filho de José de Carvalho Miranda Leite, natural do Porto — 1.ª cadeira e 18.ª (1.ª parte);

75—Bernardino José d'Azevedo Mourão, filho de José João d'Azevedo Mourão, natural de Canêdo, concelho de Celorico de Basto — 11.ª cadeira (1.ª parte);

76—Bernardo José Borges, filho de Manoel José Borges, natural da Regua — 1.ª e 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

77—Bomfilho Diniz, filho de Antonio Diniz, natural de Macau — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte), 12.ª, 14.ª (2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

78—Caetano Maria d'Amorim, filho de José Joaquim d'Amorim, natural de Vianna do Castello — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 9.ª, 18.ª (2.ª parte);

79—Carlos Affonso da Silva Rios, filho de Rodrigo da Silva Rios, natural do Rio Grande do Sul (Brazil) — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

80—Carlos Alberto de Lima, filho de Antonio Joaquim de Lima, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

81—Carlos Alberto Vianna Pedreira, filho de Joaquim Maria Pedreira, natural de Vianna do Castello — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

82—Carlos d'Andrade Villares, filho de Antonio Joaquim d'Andrade Villares, natural do Porto — 2.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

83—Carlos Augusto Afflalo Carneiro Geraldes, filho de José Carneiro Geraldes, natural do Porto — 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte):

84—Carlos Fernandes Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa — 1.ª cadeira e 6.ª (1.ª parte):

85—Carlos Frederico Braga, filho de Frederico Ernesto Braga, natural do Porto — 1.ª cadeira e 6.ª (1.ª parte);

86—Carlos Henriques Coisne, filho de Pedro Francisco José Coisne, natural de Steeniverk (França) — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

87—Carlos Henriques Meneres Caldeira, filho de Justino Henriques Caldeira, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

88—Carlos José Gomes Brandão, filho de José Antonio Gomes Brandão, natural do Rio de Janeiro (Brazil) — 1.ª cadeira, 8.ª (2.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

89—Casimiro Augusto Lobo Ramalho, filho de Victorino Teixeira Ramalho e Rocha, natural de Bragança — 3.ª cadeira, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

90—Casimiro Jeronymo de Faria, filho de Jeronymo Domingos de Faria, natural de Galafura, concelho da Regua — 2.ª cadeira, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

91—Cesar Augusto Gonçalves da Costa Lima, filho de Francisco Gonçalves da Costa Lima, natural do Porto — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

92—Christovão Teixeira Machado, filho de Francisco Teixeira Machado, natural do Rio de Janeiro — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

93—David Ferreira da Rocha, filho de Antonio Frederico d'Albuquerque e Rocha, natural de Macinhata de Vouga, concelho d'Agueda — 2.ª cadeira, 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

94—Delfim Ferreira da Silva, filho de Antonio Joaquim Ferreira da Silva, natural do Couto de Cucujães, concelho de Oliveira d'Azemeis — 10.ª cadeira (1.ª parte);

95—Diolindo Ferreira de Mello e Sousa, filho de José Ferreira de Mello, natural de Margaride, concelho de Felgueiras — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

96—Eduardo Augusto da Cunha, filho de Antonio Vicente da Cunha Pereira, natural de S. Bartholomeu da Esperança, concelho da Povoa de Lanhoso — 11.ª (1.ª parte);

97—Eduardo de Barros, filho de Adelaide Candida de Barros, natural do Porto — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

98—Eduardo Gonçalves de Mattos, filho de José Gonçalves de Mattos, natural do Porto — 6.ª cadeira (1.ª parte);

99—Eduardo Moreira Lopes, filho de Antonio Simões Lopes, natural do Cartaxo — 6.ª cadeira (1.ª parte), 17.ª;

100—Eduardo Teixeira Leite, filho de Antonio Teixeira Leite, natural do Rio de Janeiro (Brazil) — 3.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 9.ª, 16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

101—Emygdio José Gomes, filho de Alexandre José Gomes, natural da Guarda — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

102—Ernesto Achilles de Fontes, filho de Antonio Francisco de Fontes, natural do Porto — 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

103—Ernesto Augusto de Castro Guimarães, filho de João Jeronymo da Fonseca Guimarães, natural do Porto — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 17.ª e 18.ª (1.ª parte);

104—Ernesto Eugenio Alves de Sousa Junior, filho de Ernesto Eugenio Alves de Sousa, natural do Porto — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 12.ª, 13.ª e 14.ª;

105—Feliciano Moreira Alves, filho de Manoel Moreira Alves, natural de Capêllo, concelho de Penafiel — 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

106—Fernando José d'Almeida, filho de Francisco José d'Almeida, natural de S. Pedro do Sul — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

107—Fernando de Miranda Monterroso, filho de Manoel Monteiro da Silva Ribeiro de Miranda, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

108—Fernando de Sousa Magalhães, filho de Antonio Ignacio de Sousa, natural de Jugueiros, concelho de Villa do Conde — 3.ª, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 18.ª (3.ª parte);

109—Filippe de Sousa Carneiro Canavarro, filho de Cypriano de Sousa Carneiro Canavarro, natural da Regua — 5.ª, 9.ª 4.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte);

110—Flavio Norberto de Barros, filho de Manoel Antonio de Barros natural de Valença do Minho — 6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

111—Floriano de Freitas, filho de Manoel José de Freitas, natural de Misquel, concelho de Carrazeda d'Anciães — 1.ª cadeira e 16.ª (1.ª parte);

112—Fortunato d'Azevedo Varella, filho de Antonio d'Azevedo Varella, natural de Infias, concelho de Guimarães — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

113—Francisco Antonio de Magalhães, filho de Antonio Manoel de Magalhães, natural de Sarzedinho, concelho de S. João da Pesqueira — 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

114—Francisco Augusto de Castro, filho de Joaquim Leite Alves de Castro, natural de Grijó, concelho de Gaya — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

115—Francisco Bernardino Pinheiro de Meirelles Junior, filho de Fran-

cisco Bernardino Pinheiro de Meirelles, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

116—Francisco Forbes de Bessa, filho de Joaquim de Bessa Pinto, natural do Porto — 1.ª cadeira e 18.ª (1.ª parte);

117—Francisco da Rocha e Cunha, filho de Manoel da Rocha e Cunha, natural de Pedorido, concelho de Paiva — 1.ª cadeira, 9.ª e 18.ª (1.ª parte);

118—Francisco da Silva Monteiro, filho de Francisco da Silva Monteiro, natural de Guimarães — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 12.ª, 14.ª, 15.ª, 16.ª (1.ª e 2.ª parte), 18.ª (3.ª parte);

119—Francisco Xavier d'Abreu Couto Amorim Novaes, filho de Manoel Ignacio Amorim Novaes, natural de Balugães, concelho de Barcellos — 11.ª (1.ª parte);

120—Francisco Xavier Esteves, filho de Alberto Xavier Esteves, natural d'Ilhavo — 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 12.ª, 14.ª, 16.ª (1.ª e 2.ª parte);

121—Francisco Xavier de Sousa Pinto Leitão, filho de Jeronymo Pinto Leitão, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

122—Gabriel Affonso Ribeiro, filho de João Pedro Ribeiro, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

123—Gaspar José Tavares de Castro, filho de Antonio Tavares, natural de Castellões de Cambra — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

124—Guilherme Lousada Marcenal, filho de Francisco Lousada Marcenal, natural do Rio de Janeiro (Brazil) — 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

125—Guilherme Nunes Godinho, filho de Manoel Nunes Godinho, natural de Almeirim — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

126—Heitor Correia da Silva Sampaio, filho de João Correia da Silva Sampaio, natural de Braga — 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

127—Henrique Guedes de Vasconcellos, filho de José de Vasconcellos Noronha e Menezes, natural de Lamego — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

128—Henrique José Martins Ferreira, filho de Antonio José Martins Ferreira, natural do Porto—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

129—Humberto Pinto de Castro Araujo, filho de Manoel Rodrigues Sequeira Araujo, natural do Porto — 6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

130—Isolino Aurelio Ferreira Ennes, filho de José Augusto Ennes, natural do Porto — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

131—Jayme Augusto da Graça Falcão, filho de José Maria da Graça, natural de Bragança — 1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

132—João Alves Martins, filho de José Alves Martins, natural de Fontes, concelho de Santa Martha de Penaguião — 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte); 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

133—João Antunes Leite, filho de João Antunes Leite, natural de Lamego — 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

134—João Baptista Barreira Junior, filho de João Baptista Barreira, natural da Chamusca — 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

135—João Chrisostomo Baptista Alves Novaes, filho de José Antonio da Silva Baptista, natural de Villa Real — 11.ª (1.ª parte);

136—João Chrisostomo d'Oliveira Ramos, filho de João d'Oliveira Ramos, natural de Vallega, concelho de Ovar—2.ª cadeira—8.ª (2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

137—João Dias Pereira da Graça, filho de Januario Dias Pereira da Graça, natural de Sôsa, concelho de Vagos.—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

138—João Gomes da Silva Osorio Junior, filho de João Gomes da Silva Osorio, natural de Lamego—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

139—João Leite de Castro, filho de Domingos Leite de Castro, natural d'Idães, concelho de Felgueiras—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª, (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

140—João Leme de Sande e Castro, filho de Antonio Paes de Sande e Castro, natural de Faro—2.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 4.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

141—João Luiz de Magalhães, filho de Adrião Luiz de Magalhães, natural de Penafiel—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª) e 10.ª (1.ª parte);

142—João Machado d'Araujo, filho de Joaquim da Costa Araujo, natural de Landin, concelho de Famalicão—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte);

143—João Manoel Machado Tavares, filho de Francisco Teixeira Machado de Meirelles, natural de Villa-Nume, concelho de Cabeceiras de Basto —4.ª (1.ª e 2.ª parte), 15.ª—16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

144—João Manoel Pires, filho de Domingos Pires, natural de Moledo, concelho de Caminha—2.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

145—João Maximino de Carvalho, filho de Manoel Antonio de Carvalho, natural de Lamego—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

146—João Pacheco de Castro Corte Real, filho de João Pacheco Godinho de Castro Corte Real, natural d'Avanca, concelho d'Estarreja—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

147—João Pereira Vasco, filho de Manoel Pereira Vasco, natural de Olhão—1.ª cadeira—7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

148—João da Silveira Pinto da Fonseca, filho de Bernardo da Silveira, natural do Porto—1.ª cadeira, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) 18.ª (2.ª parte);

149—Joaquim Antonio Augusto Ferreira de Vasconcellos, filho de Antonio Guedes de Carvalho Vasconcellos, natural de Villa Real—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

150—Joaquim Augusto de Macedo Freitas, filho de Joaquim José de Macedo Freitas, natural da freguezia de Nossa Senhora da Madre de Deus do Rio de Janeiro (Brazil)—4.ª (1.ª e 2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) 12.ª, 14.ª, 16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

151—Joaquim Baptista Alves de Lemos, filho de Joaquim Baptista de Lemos, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

152—Joaquim Couto dos Santos, filho de Miguel Couto dos Santos, natural da freguezia de Sant'Anna do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª cadeira, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

153—Joaquim Dias de Sousa Arôso, filho de Joaquim Dias de Sousa Arôso, natural de Mathosinhos, concelho de Bouças—8.ª (2.ª parte) e 5.ª;

154—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco, filho de Antonio Pereira Rodrigues Pacheco d'Almeida, natural de Sande, concelho de Lamego—4.ª (1.ª e 2.ª parte), 5.ª, 9.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

155—Joaquim Monteiro d'Andrade, filho de Luiz Antonio de Sousa Monteiro, natural de Santo Thyrso—1.ª cadeira, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

156—Joaquim Pereira de Macedo, filho de José Pereira de Macedo, natural da Covilhã—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

157—Joaquim Raymundo da Fonseca, filho de Joaquim Antonio da Fonseca, natural d'Olhão—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

158—Joaquim da Silva Junior, filho de Joaquim da Silva, natural de Salreu, concelho d'Estarreja—1.ª cadeira, 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

159—José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello—4.ª (1.ª e 2.ª parte), 5.ª, 15.ª, 12.ª, e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

160—José Antonio de Castro, filho de Francisco Antonio de Castro, natural de Villa Nova de Fozcôa—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

161—José Augusto Vieira da Fonseca, filho de José Augusto Vieira da Fonseca, natural de Chaves—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

162—José Baptista Cid, filho de José Baptista Cepêda Cid, natural do Porto—1.ª cadeira, 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte):

163—José Baptista Gonçalves Dias Junior, filho de José Baptista Gonçalves Dias, natural do Porto—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

164—José Caetano Ferreira Pinto dos Reis, filho de José Caetano dos Reis, natural de Lamas, concelho da Feira—11.ª (1.ª parte);

165—José Chrispiniano da Fonseca Junior, filho de José Chrispiniano da Fonseca, natural d'Aveiro—2.ª cadeira, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

166—José Correia Pinto da Fonseca, filho de José Francisco Correia Pinto, natural de Samodães, concelho de Lamego—3.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

167—José Eduardo Vaz Pinto, filho de José Augusto Vaz da Fonseca Pinto, natural d'Arouca—11.ª (1.ª parte);

168—José Estevão Coelho de Magalhães, filho de José Estevão Coelho de Magalhães, natural de Lisboa—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

169—José Gonçalves da Costa, filho de Manoel Gonçalves da Costa, natural de Balazar, concelho de Povoa de Varzim—4.ª (1.ª e 2.ª parte), 5.ª, 13.ª, 11.ª, e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

170—José Guedes Junior, filho de José Guedes de Carvalho, natural de Ervedosa, concelho da Pesqueira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte);

171—José Henriques Meirelles Pinto, filho de Manoel Antonio Meirelles, natural da freguezia de S. Bartholomeu, concelho de Villa-Flôr—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

172—José Machado Pinto Saraiva, filho de Felix Tristão Pinto Saraiva, natural de Villa Real—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

173—José Maria Bivar Paula Robertes, filho de Antonio Agostinho de Paula Robertes, natural de Lisboa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

174—José Maria Claro Outeiro, filho de José Maria de Almeida Outeiro, natural do Porto—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

175—José Maria Marreiros, filho de Francisco Maria Marreiros, natural de Villa do Bispo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (2.ª parte);

176—Jose Maria Pacheco da Silva Lemos, filho de José Narciso Pacheco da Silva Lemos, natural de Villela, concelho de Paredes—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

177—José Maria Rebello da Silva, filho de José Antonio Rebello da Silva, natural de Braga—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

178—José Maria Rebello Valente de Carvalho, filho de João Nepomuceno Rebello Valente, natural d'Oliveira d'Azemeis—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

179—José Moreira d'Assumpção, filho de Vicente Moreira d'Assumpção, natural de S. Mamede de Coronado, concelho de Santo Thyrso—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

180—José d'Oliveira Serrão d'Azevedo, filho de José d'Oliveira Serrão, natural de Sernancelhe—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

181—José Pinto de Queiroz Magalhães, filho de Bernardo Pinto de Magalhães, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

182—José Rodrigues Gonçalves Curado, filho de Miguel Gonçalves Curado e Silva, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

183—José dos Santos Andrade, filho de José dos Santos Andrade, natural de Fradellos, concelho de Famalicão—11.ª cadeira (1.ª parte):

184—José Vicente d'Araujo, filho de Antonio Vicencio d'Araujo, natural de Villa do Conde—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª e 2.ª parte);

185—José Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

186—Julio Baptista da Cunha Braga, filho de João Baptista Braga, natural de Braga—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

187—Lauriano Pereira de Castro e Brito Junior, filho de Lauriano Pereira de Castro e Brito, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

188—Laurinda de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

189—Lucindo Martins d'Oliveira, filho de Francisco Moreira d'Oliveira, natural de Sousa, concelho de Gondomar—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

190—Lucio da Fonseca, filho de Manoel Alvares Martins Fonseca, natural d'Ovar—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

191—Lucio Gonçalves Nunes, filho de José Gonçalves Nunes, natural da Guarda—1.ª cadeira, 11.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

192—Luiz José de Lima, filho de Antonio José de Lima Junior, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

193—Luiz Pinto Ribeiro da Fonseca, filho de Manoel Ribeiro da Fonseca, natural de Villar do Paraizo, concelho de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte):

194—Luiz de Sousa Lemos, filho de Antonio Alves de Sousa, natural de Castello de Vide—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

195—Manoel Augusto Dias Milheiro, filho de Francisco José Milheiro, natural de Grijó, concelho de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

196—Manoel Augusto Gomes de Faria, filho de João Gomes de Faria, natural d'Arnôso, concelho de Famalicão—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

197—Manoel Augusto de Queiroz e Castro, filho de Joaquim Augusto de Queiroz, natural de S. Cosmado, concelho de Armamar—8.ª (1.ª, 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

198—Manoel Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves d'Araujo, natural do Porto—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

199—Manoel José Aguia, filho de Francisco Aguia, natural de Candêdo—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

200—Manoel José Pinhal, filho de Sebastião Lourenço Pinhal, natural d'Oliveira do Bairro—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

201—Manoel Marques de Lemos, filho de Margarida Ferreira dos Santos, natural d'Albergaria-Velha—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

202—Manoel de Medeiros Tavares, filho de Viriato de Freitas Tavares, natural de Pernambuco (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

203—Manoel de Sousa Lima, filho de José de Sousa Lima, natural de Fulgosa, concelho da Maia—1.ª cadeira, e 18.ª (1.ª parte);

204—Manoel de Sousa Machado Junior, filho de Manoel de Sousa Machado, natural do Porto—2.ª cadeira, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

205—Maria Leite da Silva Tavares Paes Moreira, filha de Manoel José Paes Moreira, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

206—Miguel Albano Cerqueira Coimbra, filho de Joaquim Augusto Rodrigues Coimbra, natural d'Amarante—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

207—Olympio Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—1.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 7.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

208—Otto Reimer von Hafe, filho de Jacob Eduardo von Hafe, natural do Porto—1.ª cadeira, 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

209—Pedro Eugenio de Moura Coutinho Almeida d'Eça, filho de Vicente de Moura Coutinho Almeida d'Eça, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

210—Quintino d'Almeida Azevedo Vasconcellos Gramacho, filho de José d'Andrade Gramacho, natural do Porto—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte;

211—Raymundo Ferreira dos Santos, filho de Antonio Ferreira dos

Santos, natural do Porto—3.ª cadeira, 4.ª (1.ª e 2.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

212—Ricardo Augusto Ferreira, filho de Antonio José Ferreira, natural do Porto—11.ª cadeira, (1.ª parte);

213—Ricardo de Lemos e Castro, filho de Miguel Zeferino de Castro, natural d'Agueda—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

214—Ricardo Severo da Fonseca Costa, filho de José Antonio da Fonseca Costa, natural de Lisboa — 2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

215—Rodolfo Ferreira Dias Guimarães, filho de Augusto Dias Guimarães, natural do Porto—3.ª, 4.ª, (1.ª e 2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª e 2.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

216—Romão José Braz Fernandes, filho de José Braz Fernandes, natural da Regua—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte), 18.ª (1.ª parte);

217—Ruy da Rocha e Castro, filho de Agostinho da Rocha e Castro, natural do Porto—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

218—Scipião José de Carvalho, filho de Sebastião José de Carvalho, natural de S. Cosmado, concelho de Armamar—11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

219—Theodorico Teixeira Pimentel, filho de João Rodrigues Pimentel, natural d'Alijó—1.ª cadeira, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

220—Victor Manoel de Jesus Martins, filho de Manoel Vicente de Jesus, natural de Lisboa—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte).

§ 2

Quadro estatistico dos alumnos matriculados em 1885-1886, distribuidos segundo a sua naturalidade.

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
Porto	Amarante	2	87	111
	Baião	2		
	Bouças	3		
	Felgueiras	2		
	Gondomar	1		
	Maia	1		
	Paredes	2		
	Penafiel	5		
	Porto	60		
	Povoa de Varzim	1		
	Santo Thyrso	3		
	Villa do Conde	2		
	Villa Nova de Gaya	3		
Aveiro	Agueda	2	24	
	Albergaria Velha	1		
	Arouca	1		
	Aveiro	4		
	Castello de Paiva	2		
	Estarreja	2		
	Ilhavo	1		
	Oliveira d'Azemeis	3		
	Ovar	2		
	Vagos	1		
	Villa da Feira	5		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
Transporte				111
Beja	Moura	1	1	
Braga	Barcellos	2	17	
	Braga	6		
	Cabeceiras de Basto	1		
	Celorico de Basto	1		
	Guimarães	3		
	Povoa de Lanhoso	1		
	Villa Nova de Famalicão	3		
Bragança	Bragança	4	11	
	Carrazeda d'Anciães	3		
	Mirandella	2		
	Moncorvo	1		
	Villa Flor	1		46
C. Branco	Covilhã	1	1	
Faro	Faro	2	4	
	Olhão	2		
Guarda	Guarda	2	3	
	Villa Nova de Foz-Côa	1		
Leiria	Alvaiazere	1	3	
	Leiria	2		
Lisboa	Lisboa	6	6	

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				157
Portalegre ..	Castello de Vide...........	1	1	
Santarem ...	Almeirim.................	1	3	
	Chamusca.................	1		
	Cartaxo..................	1		
V. do Castello	Caminha..................	1	6	
	Valença do Minho.........	2		
	Vianna do Castello	3		
Villa Real...	Alijó	1	18	
	Chaves	1		
	Mont'alegre	1		
	Murça	2		
	Peso da Regua............	5		
	Sabroza	1		
	Santa Martha de Penaguião.	1		
	Valle-Passos..............	1		
	Villa Pouca d'Aguiar.......	1		
	Villa Real................	4		
Vizeu	Armamar	3	19	
	Lamego	9		
	Rezende	1		
	S. Pedro do Sul	1		
	S. João da Pesqueira......	2		
	Sernancelhe	1		
	Vizeu.....................	2		
				47

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos: por conc.	por dist.	Total
Transporte				204
	ILHAS ADJACENTES			
Fayal	Fayal	1	1	
A. Heroismo	Angra do Heroismo	1	1	
	POSSESSÕES ULTRAMARINAS			
E. G. da India	Macau	1	1	16
	PAIZES ESTRANGEIROS			
França	Steenwesk	1	1	
Brazil	Bahia	1	12	
	Pernambuco	1		
	Rio Grande do Sul	1		
	Rio de Janeiro	9		
	Total geral			220

§ 3.

Quadro do exercicio dos cursos no anno lectivo de 1884-1885

DESIGNAÇÃO DOS CURSOS	ABERTURA DO CURSO	ENCERRAMENTO DO CURSO	N.º total das lições e exercicios	Duração das lições	N.º de horas semanaes de cada curso
Geometria analytica no plano e no espaço: trigonometria espherica; algebra superior	27 d'outubro de 1884	10 de junho de 1885	69	2	6
Calculo differencial e integral	28 » »	11 » »	75	2	6
Mecanica racional e cinematica	27 » »	13 » »	74	2	6
Desenho	28 » »	30 de maio de 1885	76	2	6
Astronomia e geodesia	4 de novembro de 1884	13 de junho »	70	2	6
Mineralogia e geologia	27 d'outubro de 1881	10 » »	68	2	6
Zoologia	28 » »	9 » »	72	2	6
Physica	27 » »	10 » »	68	2	6
Chimica mineral	28 » »	11 » »	77	2	6
» organica	27 » »	12 » »	74	2	6
Botanica	27 » »	10 » »	60	2	6
Commercio	27 » »	16 » »	80	2	6
Economia politica e principios de direito administrativo e commercial	28 » »	11 » »	69	2	6
Mecanica applicada; construcções civis	14 de novembro de 1884	10 » »	67	2	6

§ 4

Alumnos premiados e distinctos nas cadeiras dos cursos da Academia, no anno lectivo de 1884 a 1885, proclamados em sessão solemne de 20 de outubro de 1885.

1.ª CADEIRA

Accessit. — Manoel de Sousa Machado Junior, filho de Manoel de Sousa Machado, natural do Porto.

2.ª CADEIRA

Accessit. — Rodolfo Ferreira Dias Guimarães, filho de Augusto Dias Guimarães, natural do Porto.
Distincto. — Raymundo Ferreira dos Santos, filho de Antonio Ferreira dos Santos, natural do Porto.

3.ª CADEIRA

Accessit. — José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello.

4.ª CADEIRA

Premio pecuniario. — Antonio de Sousa Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria.
» honorifico. — Rodolfo Ferreira Dias Guimarães.
Distincto. — Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de Castello de Paiva.
» — João Maximino de Carvalho, filho de Manoel Antonio de Carvalho, natural de Lamego.
» — Fernando de Sousa Magalhães, filho de Antonio Ignacio de Sousa, natural de Villa do Conde.

7.ª CADEIRA

1.º Accessit. — Joaquim Francisco Vieira, filho de José Maria Vieira, natural de Braga.

2.º Accessit. — Francisco Pessanha, filho de Manoel da Silva Feliz, natural de Beja.

Distincto. — José Gonçalves Martins, filho de José Gonçalves Martins, natural de S. Fins de Tamel, concelho de Barcellos.

» — Julio Maximo do Nascimento Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo.

» — Severiano José da Silva, filho de Joaquim da Silva, natural de Salreu, concelho de Estarreja.

8.ª CADEIRA

1.º Accessit. — Antonio Caetano Ferrreira de Castro, filho de Caetano José Ferreira, natural do Porto.

» — José Chrispiniano da Fonseca, filho de José Chrispiniano da Fonseca Pinto, natural de Aveiro.

» — José d'Oliveira Serrão d'Azevedo, filho de José d'Oliveira Serrão, natural de Sernancelhe.

2.º Accessit. — Alberto d'Almeida Magro, filho de Victorino Pereira Magro, natural de Mont'alegre.

» — João Leite de Castro, filho de Domingos Leite de Castro, natural de Idães, concelho de Felgueiras.

» — Joaquim Pereira de Macedo, filho de José Pereira de Macedo, natural da Covilhã.

Distincto. — Antonio Venancio da Gama Pimentel, filho de José Manoel da Gama, natural de Lidães, concelho de Mirandella.

» — Fernando de Miranda Monterroso, filho de Manoel Monteiro da Silva Ribeiro Miranda, natural do Porto.

9.ª CADEIRA (CHIMICA MINERAL)

Premio honorifico. — José d'Oliveira Serrão d'Azevedo.
Accessit. — Alberto d'Almeida Magro.
» — Antonio Coutinho d'Araujo Piménta, filho de José Coutinho d'Araujo Piménta, natural do Porto.
» — Antonio Venancio da Gama Pimentel.
» — Fernando de Miranda Monterroso.
» — João Leite de Castro.
» — Joaquim Pereira de Macedo.
» — José Maria Pacheco da Silva Lemos, filho de José Narciso Pacheco da Silva Lemos, natural de Villela, concelho de Paredes.
» — Antonio Caetano Ferreira de Castro.
Distincto. — Carlos Affonso da Silva Rios, filho de Rodrigo da Silva Rios, natural do Rio Grande do Sul (Brazil).
» — Francisco Xavier de Sousa Pinto Leitão, filho de Jeronymo Pinto Leitão, natural do Porto.
» — Ricardo de Lemos e Castro, filho de Miguel Zeferino e Castro, natural d'Agueda.
» — Alypio Augusto Trancôso, filho de Firmino Antonio Trancôso, natural de Bragança.
» — Carlos Alberto de Lima, filho de Antonio Joaquim de Lima, natural do Porto.
» — Diolindo de Mello Ferreira e Sousa, filho de José Ferreira de Mello, natural de Margaride, concelho de Felgueiras.
» — Ernesto Achilles de Fontes, filho de Antonio Francisco de Fontes, natural do Porto.
» — Gaspar José Tavares de Castro, filho de Antonio Tavares, natural de Castellões, concelho de Cambra.

9.ª CADEIRA (CHIMICA ORGANICA)

Accessit. — Joaquim Francisco Vieira.
» — José dos Santos Andrade, filho de José dos Santos Andrade, natural de Fradellos, concelho de Villa Nova de Famalicão.
» — Augusto José de Castro, filho de José Joaquim de Castro Junior, natural do Rio de Janeiro (Brazil).
Distincto. — Julio Maximo do Nascimento Trigo.

10.ª CADEIRA

Accessit. — Alberto Perry de Sampaio, filho de Antonio de Sampaio Pereira, natural do Porto.
Distincto. — Aloysio José Moreira, filho de José Luiz Moreira, natural de Santa Marinha de Figueira, concelho de Penafiel.
» — Augusto José de Castro.
» — Joaquim Francisco Vieira.
» — José Gonçalves Martins.

12.ª CADEIRA

Accessit. — Estevão Torres.

§ 5

Designação dos alumnos que tiraram carta de capacidade de cursos da Academia no anno lectivo de 1884 a 1885.

Nomes e designação do curso	Data em que foi conferida a carta do curso
Pontes e Estradas	
Julio Pinto da Costa Portella......	17 de dezembro de 1884.
Saturnino de Barros Leal.........	11 de maio de 1885.
Henrique Carvalho d'Assumpção...	20 de julho de 1885.
Estevão Torres..................	13 de agosto de 1885.
José Maria Pinto Camello.........	19 de agosto de 1885.
João José Lourenço d'Azevedo....	2 de setembro de 1885.
Antonio Villela d'Oliveira Marcondes.	23 de setembro de 1885.
Minas	
Antonio Villela d'Oliveira Marcondes.	23 de setembro de 1885.

§ 6 — Mappa estatistico do movimento dos alumnos da Academia no anno lectivo de 1884 a 1885

CADEIRAS	Alumnos matriculados por cadeiras		Approvados		Reprovados	Não examinados	Alumnos distinctos com			Total dos distinctos
	1.ª classe	2.ª classe	n. d.	simp.			premio	accessit.	m. honrosa	
1.ª	7	28	7	3	3	22		1		1
2.ª	4	11	8		1	6		1	1	2
3.ª	3	3	4		1	1		1		1
4.ª	22	40	31	5		26	pecun. 1 honor. 1		3	5
5.ª	5	3	6	1		1				
6.ª	8	5	6			7				
7.ª	44	29	31	5		37		2	3	5
8.ª	18	52	33	17		20		6	2	8
9.ª (chimica mineral)	22	61	45	11		27	honor. 1	8	8	17
9.ª (chimica organica)	26	31	33	16		8		3	1	4
10.ª (botanica)	31	40	47	15		9		1	4	5
10.ª (agricultura)	26	18	22			22				
11.ª	7		2			5				
12.ª	23	32	19			36		1		1
13.ª	10	3	8	3		2			3	3

IV

A REFORMA DA ACADEMIA

PELA

CARTA DE LEI DE 21 DE JULHO E DECRETO DE 10 DE SETEMBRO DE 1885

I.—A CARTA DE LEI DE 21 DE JULHO DE 1885

§ 1

Origem: projecto de lei n.º 28-K de 1885

Senhores. — De entre os estabelecimentos nacionaes consagrados ao ensino superior é a academia polytechnica do Porto, o que se acha em condições menos adequadas a satisfazer aos fins da sua creação. Destinada pelo decreto de 13 de janeiro de 1837 a desempenhar no nosso paiz o papel de uma *polytechnica industrial*, não recebeu da sua primitiva organisação, nem obteve das modificações posteriores as condições indispensaveis para o bom desempenho de sua missão.

Se este facto até hoje tem sido de consequencias nòcivas e muito para lastimar, é certo que os males d'elle resultantes de ora para futuro se aggravarão por fórma que não permittem, sem criminosa incuria, perda de tempo em vãs espectativas, e o protelar de melhoramentos, que sem implicarem modificação na indóle d'este estabelecimento, ou constituirem assumpto, que bem mereça titulo de reformação do seu plano de estudos, não deixarão comtudo de lhe adduzir grande melhoria. E isto em condições viaveis, porquanto, com prazer o declaramos, e para este ponto particularmente chamamos a vossa esclarecida attenção, pela conversão em lei do projecto que submettemos ao vosso estudo não serão augmentados os encargos ao thesouro.

Senhores. O mal estar das nossas industrias é por tal fórma evidente, que desnecessario se torna esboçar-vos aqui a sombra de uma demonstração. Infelizmente ella cerca-nos, envolve-nos, asphyxia-nos. A isto têem attendido os poderes publicos procurando no fomento ao ensino industrial remedio para males que, bem póde dizer-se, interessam tudo quanto ha de mais vital n'uma nacionalidade — o seu organismo productor. Mas, se é certo que o ensino industrial elementar tem recebido do estado auxilio que ha-de agradecer com generosa remuneração, é facto que o ensino industrial superior tem jazido no mais completo abandono.

A elle não auctorisam nem o exemplo das nações de quem somos tributarios no campo industrial, nem o que é sabido das condições da industria moderna. O ensino elementar póde crear o bom artifice, e fomentar a pequena industria; mas é impotente perante a grande, hoje dominante, que carece de vastos conhecimentos, de homens profundamente instruidos, que por via de regra só das escolas superiores podem sahir. Por isso, se applaudimos a creação dos museus industriaes e escolas elementares, suppomos inadiavel attender ao ensino superior technologico. Se não houvesse escóla que lhe fosse consagrada, necessario se tornava creal-a; havendo-a, importa melhoral-a.

Senhores. A' fugaz passagem pelas cadeiras do poder do insigne patriota Passos Manoel devemos a polytechnica do Porto, onde entre nós se fundou o ensino industrial superior. Por motivos que pouco importa agora considerar, não pôde aquelle grande estadista vasar nos amplos moldes, que de certo se antolharam ao seu luminoso espirito, o ensino que inaugurou no nosso paiz. Não o fez pelo decreto de 1837; e não o conseguiram a posterior reforma de 1844 e subsequentes medidas legaes. Nasceu fraco, e não tem progredido em robustez aquelle malfadado estabelecimento scientifico, destinado a preencher uma lacuna importantissima da nossa educação nacional, e collocado na capital da zona mais populosa, emprehendedora e activa de todo o reino. A isso se tem opposto a hostilidade das circumstancias, feita de malquerenças e indiffe-

rentismos, cuja paternidade e responsabilidade não queremos apurar, mas que obriga os seus cursos a ministrarem-se ainda hoje n'um edificio em parte incompleto, em parte arruinado, e ainda assim applicado aos mais heterogeneos destinos, com dotações sempre miseravelmente minguadas e uma penuria de cadeiras que orça pelo ridiculo; e a contar-se tão sómente como força benefica para a academia com a boa vontade já hoje tradicional dos seus professores, que desde a sua fundação constantemente têem luctado pela prosperidade do estabelecimento a que pertencem com um zêlo e dedicação, condignos do sacerdocio que exercem, mas nunca devidamente reconhecidos e apreciados.

Attenuar na medida do possivel os defeitos apontados emquanto se não deparar occasião azada para reformar convenientemente esta ordem de cousas é prestar um serviço importante á educação profissional superior.

E sendo indiscutivel que, sem sacrificios monetarios, póde attender-se ás necessidades mais instantes da academia, convencemo-nos que não recusarieis a vossa approvação a projecto de lei que visasse a esse fim. N'esta fé passamos a expor-vos as suas bases.

A propina de matricula e addicionaes na academia polytechnica são do valor de 1$556 réis. Nada justifica a cobrança de imposto tão insignificante, muito menor do que o incidente sobre os alumnos de instrucção secundaria. Por isso vos propomos que se restabeleça a antiga propina de matricula, determinada pelo artigo 163.º do decreto de 13 de janeiro de 1837, com os addiccionaes sanccionados pelas leis posteriores, uniformisando-se d'este modo as propinas de matricula na academia polytechnica e nas escólas medico-cirurgicas, e se determine a propina de 4$500 réis, a exemplo do que se pratíca na universidade, para a concessão de licenças de repetição de acto sem frequencia, acto final fóra da epocha competente e de transito entre classes differentes. O augmento de receita resultante d'estas providencias ascenderá a quantia muito superior a 4:000$000 réis.

Com esta verba póde conseguir-se, sem aggravamento das

nossas finanças o que não deixará de concorrer para a sua melhoria, isto é, vantajosas modificações nos cursos da academia, pelo desdobramento da 3.ª, 6.ª, 9.ª e 13.ª cadeiras, e augmento das dotações dos estabelecimentos academicos.

Para fazerdes idéa do modo como se acham sobrecarregadas as mencionadas cadeiras e da impreterivel necessidade de as desdobrar, por-vos-hemos em parallelo, perante o mesmo quadro de disciplinas, o seu numero na academia e na escóla central de Paris, a qual tem servido de typo e modelo a outras da mesma ordem no estrangeiro e a cujo grupo pedagogico a nossa polytechnica pertence.

O ensino da geometria descriptiva e suas applicações, da mechanica geral e da cinematica, materias todas professadas na 3.ª cadeira da academia polytechnica, está confiado na escóla central aos cuidados de dois professores, dois repetidores e um chefe de trabalhos. As disciplinas, que actualmente abrange a 6.ª cadeira, mineralogia, geologia, metallurgia e lavra de minas, são explicados na mesma escóla por tres professores e tres repetidores, sendo de dois annos o curso de exploração de minas. Para o ensino da chimica, que constitue o da 9.ª cadeira, ha quatro professores, quatro repetidores e dois chefes de trabalhos praticos. Emfim as variadissimas doutrinas ensinadas em dois annos na 13.ª cadeira por um só professor (mechanica applicada e construcções civis) são entregues na escóla central aos assiduos cuidados de onze professores e dez repetidores.

As necessidades da academia, que bem podeis avaliar quaes sejam em presença do que vos deixámos exposto, não ficam de certo satisfeitas com as medidas que vos propomos. A creação de novas cadeiras, a de repetidores para cada cadeira, ou grupo de cadeiras affins, e a de chefes de trabalhos, etc., fica ainda recommendando-se á consideração de quem pretender reformar convenientemente este ramo de serviço publico.

Impozemo-nos, porém, o dever de traçar o nosso plano de melhoramentos dentro dos limites da receita creada, e d'esse proposito nos não apartamos, embora a isso nos concitassem considerações do mais elevado alcance.

Quizemos que este projecto nascesse sem o peccado original do augmento de receita, para que mais facilmente podesse obter salvação.

Terminámos por aqui a já longa exposição dos nossos propositos, pedindo-vos que em nome do optimo que de futuro possa fazer-se não recuseis a vossa approvação ao que porventura haja de bom no seguinte

PROJECTO DE LEI

Artigo 1.° A geometria descriptiva e suas applicações, mechanica geral e cinematica actualmente professadas por um só lente na 3.ª cadeira da academia polytechnica do Porto, serão lidas de ora ávante em duas cadeiras; por igual fórma se procederá ácerca da mineralogia, geologia, metallurgia e lavra de minas (6.ª cadeira), e da chimica inorganica e organica (9.ª cadeira); as disciplinas da 13.ª cadeira (mechanica applicada e construcções civis) serão distribuidas por tres cadeiras.

§ 1.° O conselho academico procederá immediatamente á revisão dos programmas dos cursos legaes da academia polytechnica, ordenando e distribuindo as suas materias pelas dezoito cadeiras que ficam constituindo o seu quadro, estabelecendo o ensino biennal n'aquellas que julgar conveniente, e fixando o numero de annos de cada um dos cursos legaes da academia, de accordo com o maior desenvolvimento dos estudos. Estes programmas, depois de approvados pelo governo, serão postos em vigor no anno lectivo immediato ao da approvação d'esta lei.

§ 2.° Para occorrer ás despezas creadas pelas disposições precedentes, cobrar-se-ha a propina de 11$520 réis e respectivo addicional, designado no decreto de 26 de junho de 1880, por cada matricula nos cursos da academia polytechnica, e a verba de 4$500 réis por cada licença de repetição de acto sem frequencia, exame final fóra da epocha competente, ou transito entre differentes classes. O excedente da receita será applicado ao augmento das dotações dos gabinetes, aos museus do

referido estabelecimento scientifico, e ás despezas dos alumnos em missão.

Art. 2.º Ficam revogados o artigo 121.º § 3.º do decreto de 29 de setembro de 1836, artigo 143.º do decreto de 20 de setembro de 1844, e mais legislação em contrario.

Sala das sessões, em 26 de março de 1885. — *W. de Lima, Albino Montenegro, José Augusto Correia de Barros.*

§ 2

Parecer n.º 36 da commissão de instrucção superior da camara dos deputados e parecer da commissão de fazenda da mesma camara sobre o projecto anterior

Senhores. — A' vossa commissão especial de instrucção superior foi presente o projecto de lei n.º 28-K, de iniciativa dos snrs. deputados Wenceslau de Lima, Albino Montenegro e José Augusto Correia de Barros, tendente a reorganisar os estudos da academia polytechnica do Porto.

Já de ha muito se pensa em melhorar o ensino official superior no paiz. Têem-se empenhado, por mais uma vez, os governos em lançar as bases geraes de uma reforma, que colloque os nossos estabelecimentos de ensino superior nas condições, que imperiosamente exigem os rapidos progressos das sciencias. Para esse effeito têem sido consultados os diversos conselhos escolares, como as corporações mais competentes, para indicarem as modificações aconselhadas pelas modernas conquistas mentaes, e pelas circumstancias do paiz.

Apesar d'estes esforços, d'esta laboração, imposta por uma indeclinavel necessidade, ainda até hoje nada se levou a effeito.

As circumstancias quasi sempre apertadas do thesouro, o estudo dos importantissimos melhoramentos materiaes executados no paiz, o sem numero de problemas de administração

publica que diariamente se apresentam, as exigencias de uma complicação crescente, nos varios negocios da governação do estado, tudo tem impedido a reforma da nossa instrucção superior, desviando para outros assumptos, sem duvida urgentes, a attenção dos governos e dos corpos legislativos.

Mas vae-se avizinhando o momento critico, em que será inadiavel a remodelação dos estabelecimentos scientificos, aos quaes está incumbida a elevada missão de transmittir a educação mental á mocidade hodierna, que ha-de ser a sociedade de ámanhã. Todos sabem e comprehendem que este é o mais importante e nobre dos misteres sociaes, porque inuteis serão as leis, os preceitos de administração publica, os progressos materiaes, os aperfeiçoamentos das industrias e das artes, a riqueza do commercio, tudo emfim que constitue a actividade humana e a vida collectiva das nações, sem a instrucção que é a sua base fundamental, que vivifica e anima aquella actividade, que é emfim a unica origem dos progressos do espirito e das conquistas da sciencia, das riquezas materiaes e do aperfeiçoamento moral.

Progresso sem instrucção não se comprehende; prosperidade sem vida intellectual não existe; felicidade, na alta comprehensão moderna d'esta palavra, sem elevados dotes psychicos não póde haver; moralidade e ignorancia repugnam.

Não podemos resignar-nos, sem a perda da nossa dignidade, como homens, e da nossa autonomia como nação, a continuar no desempenho do papel passivo de admiradores da civilisação dos paizes cultos, de espectadores inconscientes do complexo, e ao mesmo tempo maravilhoso drama, que constitue a vida moderna, de assimiladores mediocres das idéas alheias, de imitadores mesquinhos dos processos estranhos em toda a ordem de concepção e de prática, de colleccionadores infecundos das conquistas do espirito investigador dos outros, de ridiculos comparsas, fidalgamente inhabeis ou estupidamente inuteis, amontoados em beatifica contemplação n'um canto da terra, ignorado e desprezado até ao momento em que os que trabalham e avançam se lembrem, em nome da utilidade e até da justiça universal, de nos expropriar o solo

abençoado da patria, e nos decretar a tutela que se estabelece aos menores e aos incapazes.

O povo portuguez dotado naturalmente de agudeza de espirito, de excellentes faculdades mentaes, de sagacidade prática, e ao mesmo tempo das mais pacientes e benignas disposições moraes, merece bem um alto logar no convivio das nações civilisadas.

Já que não é possivel realisar de uma só vez a reforma de todos os nossos estabelecimentos superiores de instrucção, procuremos ao menos ir provendo de remedio, a pouco e pouco, ora n'um ora n'outro, ás necessidades que, á força de serem instantes e imperiosas, transformarão dentro em pouco esses mesmos estabelecimentos em instituições exoticas, desprestigiadas, inuteis e ridiculas, se não nos apressarmos a valer-lhes emquanto é tempo.

No excellente relatorio que precede a proposta de lei a que nos referimos, se mostra com toda a clareza e exacção o estado actual da academia polytechnica do Porto, e se faz a comparação d'este instituto com a escóla central de Paris, cuja indole é da mesma natureza.

Não mira a proposta a equiparar a nossa academia á escóla de Paris, nem a vossa commissão vos proporia tal medida, porque a exiguidade dos nossos dinheiros publicos não se compadeceria com as avultadas despezas que para isso seria necessario fazer.

Se não hesitamos em solicitar a vossa approvação para esta reforma, é porque, no estudo que d'ella fizemos, começamos por averiguar primeiro que tudo a sua parte economica.

Effectuar o melhoramento e ampliação de qualquer serviço publico, sem augmentar a despeza que com elle presentemente se faz, é um problema cuja solução parece impossivel. Comtudo a boa vontade chega muitas vezes a superar os maiores obstaculos e a tornar exequivel o que se antolhava como absurdo.

E' de ver que, em taes casos, não póde deixar de se transigir um pouco quanto á perfeição da obra; mas em todas as

cousas e para todos os effeitos, sempre valeu mais possuir um instrumento relativamente bom, e, em caso de necessidade, recompol-o e melhoral-o, a conservar outro que na sua genuidade primitiva não se preste ao uso para que se destina.

A academia polytechnica do Porto é composta actualmente de treze cadeiras, que fornecem a materia dos seguintes cursos:

Engenheiros de pontes e estradas.
Engenheiros de minas.
Engenheiros geographos.
Agricultores.
Mestres de fabricas, etc.

As disciplinas da grande maioria das cadeiras são ensinadas n'um anno apenas, e portanto pouca latitude se lhes póde dar. Por outro lado com tão limitado quadro de cadeiras, os cursos são imperfeitos e perfunctorios.

Propõe-se a creação de cinco novas cadeiras, proveniente do desdobramento da 3.ª, 6.ª, 9.ª e 13.ª, nas quaes se ensinam respectivamente a geometria descriptiva, a mechanica, a chimica, a mineralogia, a geologia, a arte de minas e a mechanica applicada.

E' impossivel impulsionar o ensino das citadas sciencias, e preparar convenientemente os alumnos não só com os conhecimentos praticos proprios de cada uma, como com as habilitações technicas que são indispensaveis nas diversas profissões para que habilita a academia, sem dotar melhor os seus laboratorios, alargando a esphera dos trabalhos que n'elles devem executar-se, e sem proporcionar aos alumnos por via de excursões, ou de missões de estudo prático, os conhecimentos de facto que não podem aprender-se nos livros, nem dentro do edificio da academia.

E' por isso forçoso dotar com alguns recursos, embora modestos, os diversos serviços que se ligam com as missões e o estudo nos laboratorios. Para isso lembra-se, e com justiça, a elevação das propinas de matricula a 11$520 réis como

nas outras escolas do paiz, e o pagamento de 4$500 réis por cada transito de uma para outra classe, licença ou exame extemporaneo, como se pratica na universidade. Calcula-se que estes recursos deverão fornecer á academia um rendimento annual superior a 4:000$000 reis, que serão destinados para os fins que ficam expostos.

Não ha, na verdade, razão alguma que aconselhe ou justifique a excepção que, com respeito ás propinas de matricula, se dá na academia polytechnica do Porto, e por isso a vossa commissão acha legitimo o alvitre que se propõe, por meio do qual se póde ampliar não só o ensino oral e theorico, mas tambem o estudo prático e technologico, que constitue a indole essencialmente industrial d'este instituto.

Desnecessario é abonar com mais detidas considerações, que a vossa proficiencia suppre e dispensa, os motivos que levaram a vossa commissão especial de instrucção superior a considerar a proposta de reforma a que nos referimos, tão util quanto inadiavel, ao mesmo passo que não exige o mais pequeno sacrificio do thesouro.

Por isso é a vossa commissão de parecer, de accordo com o governo, que a referida proposta deve converter-se no seguinte projecto de lei:

Artigo 1.º A geometria descriptiva e suas applicações, mechanica geral e cinematica, actualmente professadas por um só lente na 3.ª cadeira da academia polytechnica do Porto, serão lidas d'ora ávante em duas cadeiras; por igual fórma se procederá ácerca da mineralogia, geologia, metallurgia e lavra de minas (6.ª cadeira) e da chimica inorganica e organica (9.ª cadeira); as disciplinas da 13.ª cadeira (mechanica applicada e construcções civis) serão distribuidas por tres cadeiras.

§ 1.º O conselho academico procederá immediatamente á revisão dos programmas dos cursos legaes da academia polytechnica, ordenando e distribuindo as suas materias pelas desoito cadeiras que ficam constituindo o seu quadro, estabelecendo o ensino biennal n'aquellas que julgar conveniente, e fixando o numero de annos de cada um dos cursos legaes da academia, de accordo com o maior desenvolvimento dos estu-

dos. Estes programmas, depois de approvados pelo governo, serão postos em vigor no anno lectivo immediato ao da approvação d'esta lei.

§ 2.º Para occorrer ás despezas creadas pelas disposições precedentes, cobrar-se-ha a propina de 11$520 réis e respectivo addicional designado no decreto de 26 de junho de 1880, por cada matricula nos cursos da academia polytechnica, e a verba de 4$500 réis por cada licença de repetição de acto sem frequencia, exame final fóra da epocha competente, ou transito entre differentes classes. O excedente da receita será applicado ao augmento das dotações dos gabinetes, aos museus do referido estabelecimento scientifico, e ás despezas dos alumnos em missão.

Art. 2.º Ficam revogados o artigo 121.º § 3.º do decreto de 29 de dezembro de 1836, o artigo 143.º do decreto de 20 de setembro de 1844 e mais legislação em contrario.

Sala das sessões, em 9 de abril de 1885. — *Avelino Cesar A. Calixto, Ignacio Francisco Silveira da Motta, Bernardino Machado, Alfredo da Rocha Peixoto, João J. d'Antas Souto Rodrigues, W. de Lima, João Augusto Teixeira, F. A. Correia Barata*, relator. Tem voto dos snrs. deputados: *Marianno de Carvalho, Lopes Vieira.*

A commissão de fazenda conforma-se, ouvido o governo, com o precedente parecer da illustre commissão de instrucção superior.

Em commissão, 13 de abril de 1885. — *Antonio Maria Pereira Carrilho, Marçal Pacheco, Franco Castello Branco, Moraes Carvalho, João Marcellino Arroyo, Augusto Poppe, A. C. Ferreira de Mesquita, Pedro Roberto Dias da Silva, Pedro Augusto de Carvalho, Correia Barata, L. Cordeiro*, relator. Tem voto dos snrs. deputados: *Manoel d'Assumpção, Adolpho da Cunha Pimentel.*

§ 3

Parecer n.º 17 das commissões reunidas de instrucção publica e de fazenda da camara dos dignos pares

Senhores. — As vossas commissões reunidas de instrucção publica e de fazenda examinaram, com a minuciosa e demorada attenção que o caso requeria, o projecto de lei n.º 14, vindo da camara dos senhores deputados, o qual tem por objectivo principal o desdobramento de algumas cadeiras da academia polytechnica do Porto, e vem hoje dar-vos conta resumida e succinta dos resultados d'esse consciencioso estudo.

Senhores. Não se propozeram os auctores do projecto tão elevado designio como o de reconstruir de um só jacto, sobre novas e mais largas bases, de harmonia com mais amplos e modernos planos, a já tão antiquada, carcomida e acanhada fabrica da nossa instrucção superior e especial.

Não os guiou mesmo o intuito de reconstruir de prompto sob uma fórma, se não definitiva e perfeita, ao menos notavelmente duradoura e completa, uma das partes mais importantes d'esse edificio, transformando desde já a academia polytechnica do Porto em uma verdadeira *polytechnica industrial*, modelada sobre o organismo das suas similares em outros paizes mais adiantados na resolução do problema da instrucção publica, dando-lhe assim e a final uma feição technica bem caracteristica e distincta que faria d'ella um dos orgãos mais essenciaes e proficuos da nossa instrucção superior.

Não é que aos auctores do projecto fallecesse o animo, ou não sobrasse a intelligencia e cultura para tão altos commettimentos, nem que a algum d'elles escapasse esta verdade já agora banal e como que axiomatica, de que «uma instrucção solidamente organisada é fundamento essencial de toda a moderna actividade social, e a mais segura garantia do progressivo desenvolvimento das nações».

A historia, nas suas paginas mais recentes, como o racio-

cinio *à priori*, ensinaram por certo aos esclarecidos auctores do projecto, como aos membros das vossas commissões reunidas, como a nós todos, que o paiz que se não inspira d'esta verdade dá em breve a todos os outros o espectaculo lastimoso da irremediavel decadencia das suas instituições, da profunda viciação nos seus costumes, do fatal definhamento das suas industrias, e da consequente diminuição nas suas riquezas.

Convencidos, porém, os auctores do projecto, como as vossas commissões reunidas, de que a realisação de tão elevados planos, a resolução por completo de tão momentoso, complexo e difficil problema como o da reorganisação definitiva de todos ou de algum dos orgãos da nossa instrucção superior theorica e technica, mal cabe na iniciativa e nas forças de outros que não sejam os supremos representantes da sociedade, limitaram a proporções mais modestas, se bem que manifestamente uteis e immediatamente realisaveis, o objectivo do projecto de lei que ás vossas commissões reunidas incumbe estudar.

Antes, porém, de emprehender este estudo mais minucioso do projecto, as vossas commissões reunidas, convencidas de que, em Portugal, os governos, distrahidos porventura os seus cuidados e attenções para assumptos que se lhes afiguraram reclamar mais prompta solução, não têem feito em prol da instrucção nacional quanto fôra para desejar, jazendo de ha muito e quasi por completo abandonados um dos seus ramos e graus, a instrucção superior e technica, entenderam cumprir opportunamente um dever indeclinavel, aproveitando o ensejo proporcionado pelo estudo das linhas geraes d'este projecto para solicitar para tão momentoso assumpto a mais séria e cuidadosa attenção dos poderes publicos.

Isto posto entremos em mais minucioso exame do projecto.

Tem ellé por fim o desdobramento de tres das treze cadeiras que compõem actualmente o quadro de estudos da academia polytechnica do Porto.

São cinco as cadeiras creadas por virtude d'este desdo-

bramento; duas theoricas, a geometria descriptiva e a chimica organica e analyse chimica; tres technicas, a arte e lavra de minas, e duas de construcções civis; e as vossas commissões reunidas entendem que não só a creação d'estas cinco cadeiras é essencial para legitimar a existencia na academia da maior parte dos cursos technicos que n'ella actualmente se professam, como absolutamente necessaria para que os poderes publicos levantem com rasão bastante o como que interdicto que desde 1873 pesa sobre a academia do Porto no tocante a um dos seus fins legaes, o preparo de alumnos para os cursos das armas scientificas professados na escóla do exercito.

De resto, a natureza das cadeiras creadas bem deixa ver que a parcial e modesta remodelação de estudos que actualmente se nos propõe é perfeitamente talhada de molde a não prejudicar qualquer futura reorganisação mais ampla no sentido acima indicado pelas vossas commissões.

O meio proposto pelos auctores do projecto, para que o objecto d'elle seja realisavel sem encargo para o thesouro publico, parece ás vossas commissões efficaz e acceitavel. Consiste este meio na elevação das propinas de matricula a um nivel ainda inferior ás que se pagam na universidade de Coimbra, approximadamente igual ás necessarias para cursar a escóla polytechnica de Lisboa, e de muito inferior ao que é exigido aos alumnos de escolas analogas, ainda nos paizes mais pobres da Europa.

Prova a média do numero de matriculas realisadas nos tres annos anteriores na academia, que ainda quando esse numero decrescesse de um quarto, a elevação proposta das propinas daria somma superior á quantia necessaria para cobrir a despeza a fazer com as cadeiras creadas, e á vossa commissão, nem repugna o principio de que as cartas dos cursos superiores, como instrumentos que são de interesse e proveito individual, devam ser conquistados á custa de um dispendio relativamente elevado, nem parece rasoavel que em escolas da mesma ordem sejam obtidas em tão diversas condições de despeza.

As vossas commissões são portanto de parecer que o projecto n.º 14, vindo da camara dos senhores deputados, seja approvado, para que, convertido em decreto das côrtes geraes, suba á regia sancção.

Sala das commissões, em 25 de maio de 1885. — *Antonio de Serpa, Mendonça Cortez, Barros e Sá, Augusto Xavier Palmeirim, Gomes Lages, José Pereira da Costa Cardoso, Thomás de Carvalho, João Baptista da Silva Ferrão de Carvalho Mártens, Couto Monteiro, Francisco Joaquim da Costa e Silva, Henrique de Macedo*, relator.

Tem voto dos exc.mos snrs.: *Conde de Ficalho, Conde de Gouveia, Visconde de Bivar, Telles e Vasconcellos.*

§ 4

Representação do conselho da academia polytechnica do Porto

Senhores! — Ha quarenta e oito annos que, por iniciativa de um illustre ministro da corôa, era creada no Porto a Academia Polytechnica. Esta creação satisfazia a uma necessidade publica de dia a dia tornada mais manifesta: a de formar com solida instrucção directores de emprezas industriaes e de obras civis. O pensamento de Manoel da Silva Passos foi de certo o dotar o paiz n'um dos seus centros mais populosos e activos, de um ensino analogo ao que na Escóla Central d'artes e manufacturas de Paris fôra iniciado, oito annos antes, pelos esforços e cooperação de Olivier, Péclet, Lavallée e Dumas; foi, n'uma palavra, o de crear n'esta cidade uma Escóla Polytechnica industrial.

E' certo, porém, que os meios fornecidos para realisar tal ensino foram por demais insufficientes para que os estudos tivessem a intensidade necessaria a uma solida instrucção technica; d'isto resultaram para o corpo escolar difficuldades quasi invenciveis na organisação dos programmas dos estudos.

E comtudo, apesar d'estas condições desfavoraveis, seja-lhe licito dizel-o, a Academia tem visto sahir dos seus cursos nomes vantajosamente conhecidos na engenheria e sciencia portugueza.

Não nos cumpre n'esta occasião insistir em todos os defeitos de organisação da Academia Polytechnica, sobre que aliás já se tem manifestado desde muito, a direcção e conselho escolares.

Citaremos sómente um dos capitaes, a falta de numero indispensavel de cadeiras onde fossem lidas as sciencias industriaes, a ponto tal que desde longo tempo um ou mais professores, para que não fosse vã a educação scientifica ministrada aqui, tem tomado sobre si, sem remuneração alguma, a regencia d'alguns cursos indispensaveis a que a lei não attendeu.

A insufficiencia de numero de cadeiras mais uma vez se tornou manifesta ao conselho quando, ao organisar em 1884 os quadros dos cursos legaes da Academia, de accordo com o que lhe fôra ordenado por portaria de 26 de junho de 1883, pretendeu attender ás justas exigencias do ensino moderno. Já então o conselho notava que as cadeiras mais sobrecarregadas de materias e onde, portanto, o ensino seria fatalmente incompleto, eram: a 3.ª cadeira, que comprehende a geometria descriptiva e suas applicações e a mecanica racional e cinematica; a 6.ª, na qual não só estão incluidas a mineralogia e a geologia, sciencias historico-naturaes, como tambem a metallurgia e a arte de minas, cujo ensino tem um caracter differente; a 9.ª, que comprehende não só a chimica mineral e organica mas ainda a chimica analytica, á qual cumpre dar grande desenvolvimento; e a 13.ª cadeira, que abrange quasi toda a sciencia do engenheiro civil, isto é, toda a mecanica applicada e todas as construcções civis, sciencias estas que na Escóla Central d'artes e manufacturas estão affectas a onze professores e dez repetidores, e que não devem ser lidas na nossa escóla por menos de tres professores. Esta simples exposição dispensa-nos de insistir, perante a vossa illustração, sobre a urgencia que ha-de ampliar n'estas quatro cadeiras o

ensino respectivo a fim de que a educação scientifica n'esses diversos ramos seja uma realidade.

Tendo sido apresentado n'essa camara, em sua sessão de 24 do corrente, pelo membro d'este conselho dr. Wenceslau de Lima, um projecto de lei no qual se attende ao aperfeiçoamento do ensino academico pelo seu maior desenvolvimento n'aquellas cadeiras em que elle é mais defficiente, vimos pedir-vos que sanccioneis com o vosso voto um melhoramento da mais alta valia não só para esta escóla, como em geral para o ensino publico.

Dar, com effeito, a devida amplitude ao ensino technico, nunca foi mais necessario do que hoje, em que os principios scientificos devem regular os processos industriaes, e em que é geralmente reconhecida a falta de engenheiros devidamente habilitados para os diversos ramos da nossa industria.

Este ensino technico superior impõe-se ainda mais pelo desenvolvimento que já tem no paiz o ensino elementar profissional nas escolas, institutos e museus industriaes; sendo, por isso, necessario dar-lhe o seu complemento indispensavel, a instrucção technica superior.

Realisados os melhoramentos consignados no projecto de lei e attendidas algumas outras necessidades que serão expostas ao governo de Sua Magestade, a Academia Polytechnica poderá então desempenhar desassombradamente e sem os obstaculos de todas as especies que até hoje lhe tem entorpecido a marcha, a missão que lhe compete na instrucção superior portugueza, missão que é especial e distincta da de todas as outras escolas do paiz; e o conselho espera que o fará em proveito publico. Porto, 30 de março de 1885. — *Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso, José Joaquim Rodrigues de Freitas, Dr. Adriano de Paiva Faria Leite Brandão, Joaquim de Azevedo Albuquerque, Antonio Joaquim Ferreira da Silva, Dr. José Diogo Arroyo, F. Gomes Teixeira, Luiz Ignacio Woodhouse, Manoel Amandio Gonçalves.*

Tem o voto dos lentes: *Francisco da Silva Cardoso, Adriano d'Abreu Cardoso Machado, Manoel da Terra Pe-*

reira Vianna, Roberto Rodrigues Mendes, Guilherme Antonio Correia, Antonio Alexandre d'Oliveira Lobo.

§ 5

Representação da Camara Municipal do Porto pedindo a approvação do projecto de lei

SENHORES DEPUTADOS DA NAÇÃO PORTUGUEZA. — Em sessão de 25 de março ultimo foi apresentada á vossa consideração pelo snr. deputado Wenceslau de Lima um projecto de lei assignado tambem pelos snrs. deputados Corrêa de Barros e Albino Montenegro, tendente a melhorar o ensino na Academia Polytechnica do Porto. Este projecto é da maxima vantagem e utilidade para collocar a Academia no pé em que deve estar, nunca inferior á Academia Polytechnica de Lisboa, e por isso a Camara Municipal do Porto em nome da cidade, e das provincias do Norte, de que é capital, pede aos snrs. deputados da Nação Portugueza que se dignem approvar o referido projecto de lei. E na verdade tudo que fôr beneficiar a organisação do ensino no primeiro estabelecimento scientifico do Porto, é prestar um serviço não só á instrucção em geral, que sempre lucra com o maior numero d'estabelecimentos scientificos, mas tambem, e especialmente, á cidade do Porto e provincias do norte, as mais bellas e as mais populosas de Portugal. É ao Porto que os filhos d'estas provincias veem buscar o baptismo da instrucção publica, que uma grande parte d'elles não alcançaria se tivesse de a ir buscar a cidades mais distantes, porque os recursos, de que muitos d'elles, e suas familias dispõem, lhes não chegariam para uma permanencia e habitação em cidade mais afastada, onde não encontrariam as condições favoraveis, que o Porto lhes offerece pela sua proximidade das localidades, e pelas relações commerciaes e outras circumstancias, que se não dão entre essas provincias e outra qualquer cidade.

E' por estas e outras considerações, que á vossa illustração parecerem justas e fundadas, que a Camara Municipal do Porto pede, como medida de vasto alcance, que o referido projecto de lei seja sem demora approvado.

Porto e Paços do Concelho, 9 d'abril de 1885. —*Alexandre Carneiro de Vasconcellos*, vice-presidente; *Antonio Ribeiro Moreira, Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, José Carneiro de Mello, Fulgencio José Pereira, Miguel Boaventura da Silva Rangel, Manoel Carneiro Alves Pimenta.*

§ 6

Representação da Associação Commercial do Porto

DIGNOS PARES DO REINO.—Perante essa muito digna assembléa está pendente uma proposta de lei, da iniciativa do snr. deputado dr. Wenceslau de Lima, e assignada tambem pelos illustres deputados Correia de Barros e Albino Montenegro, pelo qual se procura desenvolver, regularisar e aperfeiçoar até onde se julga possivel desde já, nas actuaes circumstancias, e sem gravame do thesouro, o ensino industrial superior que o estado fornece na academia polytechnica do Porto, por meio do desdobramento de algumas cadeiras, que faculte dar mais amplitude ao ensino das materias até agora inconvenientemente accumuladas, no intuito de tornar assim a instrucção mais proveitosa, prática e completa.

Em face d'esta tentativa de melhoramento para um dos institutos de ensino superior que o estado mantem n'esta cidade, a associação commercial não podia deixar de applaudir e apoiar a louvavel iniciativa da camara electiva.

Mas além d'este motivo geral que influe no animo dos abaixo assignados, para quem todos os melhoramentos, e em particular os de ensino publico, se afiguram poderosos elementos de progresso, ha um interesse muito especial que no

caso presente suscitou vivamente as attenções do corpo do commercio d'esta cidade.

Sabeis, senhores, que na academia polytechnica, a par do ensino superior industrial, ha organisado um curso superior de instrucção commercial, e esta instituição interessa directamente á classe a que os abaixo assignados se honram de pertencer, por isso que nos tempos de hoje a illustração e altura do espirito são precisas em todos os ramos da actividade humana, e em qualquer posição social.

Esta associação, como interprete das aspirações da sua classe, deseja ardentemente que esse curso de instrucção scientifica destinado ao commercio possa ser o mais altamente proficuo e fructuoso, e que os seus beneficos resultados se estendessem e alargassem ás mais amplas proporções.

Como, porém, se haja notado o facto pouco satisfactorio de ser o alludido curso sempre mediocremente concorrido, não obstante os reconhecidos meritos e competencia provada do illustre professor da cadeira de commercio, a associação commercial pensa que no momento de se remodelarem algumas partes da organisação do ensino na academia, fôra tambem opportuno e adequado que se effectuasse uma reforma no curso do commercio, por virtude da qual este ensino utilisasse largamente a respectiva classe, em cujo beneficio foi evidentemente instituido na nossa cidade; e n'este sentido, se tivesse voto na materia, proporia a creação de leituras e demonstrações praticas em um curso nocturno, ao qual certamente poderiam concorrer muitos ouvintes impossibilitados de frequentar as lições diarias.

Com isto não quer, porém, a associação por modo algum complicar ou estorvar o andamento da proposta, tal qual foi presente á assembléa dos illustres representantes da nação.

Antes deseja e pede á camara dos dignos pares que a approve com urgencia, convencida como está de que por essa fórma muito lucrará o ensino technologico na academia, e que dentro dos meios propostos se encontram disposições com as quaes bastante poderá aproveitar o curso commercial, que tanto interesse inspira a esta associação, e para cujo aperfei-

çoamento ella directamente contribuiria se os seus recursos financeiros lh'o permittissem no momento actual.

Certa, pois, esta associação de que o illustrado conselho academico não deixará de attender convenientemente este ponto dos melhoramentos reclamados no curso do commercio, logo que lhe seja dada auctorisação e concedidos os meios que se propõem no projecto, vem n'esta convicção secundar os esforços dos illustres proponentes, e — Pede respeitosamente a prompta approvação da referida proposta de lei, da qual justamente se esperam vantajosos resultados para o ensino publico e interesses economicos d'esta cidade. — E. R. M. — Porto e associação commercial, 29 de abril de 1885. — Presidente, *Ricardo Pinto da Costa*; — 1.º Secretario, *Antonio Manoel Lopes Vieira de Castro*; — 2.º Secretario, *João Baptista de Lima Junior*.

§ 7

Representação da Junta Geral do districto do Porto

Dignos pares do reino da nação portugueza. — A' vossa alta apreciação de assembléa legislativa foi presente um projecto de lei, já approvado na camara dos senhores deputados, onde a sua iniciativa foi tomada pelos illustres membros d'aquelle corpo politico, os snrs. Wenceslau de Lima, Correia de Barros e Albino Montenegro. A approvação d'esse projecto, referindo-se a um melhoramento de grandes resultados para o Porto, como seja a reforma da sua academia polytechnica, não póde ser indifferente á corporação composta dos signatarios da presente representação; e é por isso que a junta geral d'este districto vem respeitosamente perante vós sollicitar a approvação d'esse projecto, já por igual sollicitada por duas importantes corporações do Porto, a sua camara municipal e a sua associação commercial.

Collocar a academia polytechnica do Porto em condições de poder igualar-se o mais possivel em resultados praticos á escóla polytechnica de Lisboa é um altissimo serviço prestado

a toda a região do norte do reino e particularmente á cidade e ao districto do Porto, e é por taes motivos que esta junta geral sollicita a vossa altissima cooperação em regularisar e aperfeiçoar até onde fôr possivel por meio do desdobramento e creação de cadeiras novas o ensino d'aquelle importante estabelecimento, tendo todavia em consideração as actuaes circumstancias do thesouro, que em todas as questões, como muito bem sabeis, devem ser da maior ponderação.

Entendido, como fica dito, que a proposta de lei, de que se trata, importa um melhoramento de primeira ordem para os povos comprehendidos na area do districto, cujos interesses representa, esta junta geral — Pede respeitosamente a approvação da referida proposta de lei, cujos resultados são obvios para o desenvolvimento e economia do districto.

Porto e sala das sessões da junta geral do districto, em 15 de maio de 1885. — *Antonio Ribeiro da Costa e Almeida*, Presidente interino. — *Visconde de Barreiros, José Manoel da Costa Faria e Silva, Antonio Gonçalves Ribeiro, Alfredo A. Albergaria de Castro e Silva, Antonio Pinheiro Carneiro, José Torquato Teixeira Soares, Joaquim Nogueira Soares Vieira, Antonio Pinto de Mesquita Carvalho Magalhães, A. N. de Azevedo Magalhães, Henrique Maria Ferraz Vianna, Antonio Camello d'Almeida Carvalho, Joaquim Antonio d'Ascenção e Oliveira, Joaquim d'Araujo*, Vice-Secretario.

§ 8

Artigos extrahidos do «Commercio do Porto»

Porto 15 de abril.

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

Reformando a antiga Academia de Marinha e Commercio, quiz Manoel da Silva Passos dotar a cidade do Porto com um instituto onde fossem devidamente ensinadas as sciencias industriaes; assim o diz com toda a clareza no preambulo do decreto de 13 de janeiro de 1837.

Passos Manoel não foi ministro durante tempo sufficiente para realisar aquelle pensamento; e de todos os seus successores não houve um só que pozesse verdadeiro e efficaz empenho em dar ás provincias do norte uma boa escóla superior dedicada á industria; os varios decretos que modificaram a Academia Polytechnica não satisfizeram as principaes necessidades do ensino; de sorte que ainda hoje alli ha cursos que de modo algum correspondem ao fim a que se destinam.

Um projecto apresentado na camara dos snrs. deputados pelo snr. Wenceslau de Lima, e assignado tambem pelos snrs. Albino Montenegro e Corrêa de Barros, procura em parte preencher algumas das lacunas desde muito assaz notadas no quadro das cadeiras da Academia Polytechnica: o artigo 1.º diz assim:

«A geometria descriptiva e suas applicações, mechanica geral e cinematica, actualmente professadas por um só lente na 3.ª cadeira da Academia Polytechnica do Porto, serão lidas d'ora ávante em duas cadeiras; por igual fórma se procederá ácerca da mineralogioa, geologia, metallurgia e lavra de minas (6.ª cadeira); e da chimica organica e inorganica (9.ª cadeira); as disciplinas da 13.ª cadeira (mechanica applicada e construcções civis) serão distribuidas por tres cadeiras.»

O snr. Wenceslau de Lima fundamentou do seguinte modo esta disposição:

«Para fazerdes ideia do modo como se acham sobrecarregadas as mencionadas cadeiras e da impreterivel necessidade de as desdobrar, pôr-vos-hemos em parallelo perante o mesmo quadro de disciplinas o seu numero na Academia e na Escóla Central de Pariz, a qual tem servido de typo e modêlo a outras da mesma ordem no estrangeiro e a cujo grupo pedagogico a nossa polytechnica pertence.

«O ensino de geometria descriptiva e suas applicações, da mechanica em geral e da cinematica, materias todas professadas na 3.ª cadeira da Academia Polytechnica, está confiado na Escóla Central aos cuidados de 2 professores, 2 repetidores e 1 chefe de trabalhos.

«As disciplinas, que actualmente abrange a 6.ª cadeira,

mineralogia, geologia, metallurgia e lavra de minas, são explicadas na mesma Escóla por 3 professores e 3 repetidores, sendo de 2 annos o curso de exploração de minas. Para o ensino da chimica, que constitue o da 9.ª cadeira, ha 4 professores, 4 repetidores e 2 chefes de trabalhos práticos. Emfim, as variadissimas doutrinas ensinadas em 2 annos na 13.ª cadeira por um só professor (mechanica applicada e construcções civis) são entregues na Escóla Central aos assiduos cuidados de 11 professores e 10 repetidores!»

Seria, portanto, necessario augmentar muito as despezas para que a Polytechnica do Porto igualasse a Escóla Central de Pariz; mas se o estado de nossas finanças obriga a ser modestissimo nos gastos, e só os acrescentar no caso de extrema necessidade, o projecto agora apresentado ao parlamento ministra á Academia parte do que lhe é indispensavel e não aggrava a situação do thesouro; obedece ao principio de não acrescentar o dispendio sem melhorar equivalentemente a receita; para isso eleva a taxa das matriculas; segundo a estatistica da Academia, os novos recursos provaveis bastam com effeito a assegurar a quantia correspondente ás quatro cadeiras que serão creadas; até se julga que haverá excesso, o qual deverá destinar-se a melhoramentos de varias especies e a subsidiar os mais distinctos alumnos para desempenho de missões scientificas.

Na creação de quasi todas as cadeiras, bem como na de receita, o projecto louvavelmente adopta parte de outro que pelo conselho academico foi approvado em 3 de fevereiro de 1882 e remettido ao governo; no relatorio que o acompanhou punha-se já em bom relêvo o inconveniente de ensinar n'uma só cadeira, embora em curso biennal, todos os conhecimentos especiaes do engenheiro; o conselho entendia necessario repartir pelas seguintes quatro cadeiras as disciplinas alli tão incommodamente amontoadas: 1.ª — Mechanica applicada á resistencia dos materiaes; 2.ª — Thermodynamica e machinas a vapor; 3.ª e 4.ª — Construcções civis.

Actualmente pertencem á 13.ª cadeira:

1.° anno — Resistencia de materiaes. Estabilidade de construcções. Construcções em geral. Vias de communicação. Pontes de todas as especies. Theoria das machinas de vapor. Geometria descriptiva applicada ao córte das pedras.

2.° anno — Hydraulica; construcções hydraulicas. Caminhos de ferro. Theoria das sombras. Perspectiva linear. Stereotomia das obras de madeira.

Não póde esperar-se que todas estas materias sejam convenientemente professadas por um só lente, e estudadas em dous annos com a profundeza propria de um estabelecimento de instrucção superior; desdobrar n'umas poucas a 13.ª cadeira é, portanto, uma necessidade que o projecto sensatamente procura satisfazer.

Pelo projecto do snr. Wenceslau de Lima haverá duas cadeiras para o ensino da chimica; não é demasia n'um tempo em que são tão vastas as applicações d'essa sciencia; além d'isto, como na Academia se estuda o curso preparatorio das Escólas Medico-cirurgicas, é indispensavel ensinar com largueza a chimica organica. Pelo que respeita á geometria descriptiva e suas applicações, á mechanica geral e á cinematica, tambem não póde taxar-se de demasia o desdobramento da 3.ª cadeira.

Por tudo isto approvamos o pensamento fundamental do projecto; mas não occultaremos que ao progresso e á utilidade da Academia Polytechnica importa muito que os programmas sejam formulados de modo que se aproveite completamente o ensino dos lyceus; por outras palavras: não se inclua n'elles, a não ser como breve introducção, ou recordação de principios, nenhuma das materias que já foram ensinadas nos lyceus; é evidente que por isto não se exclue o desenvolvimento e o aprofundar das disciplinas professadas nos institutos secundarios; pelo contrario, isto claramente compete aos estabelecimentos superiores.

Tambem é necessario que o ensino tenha, quanto possivel, uma tendencia prática, ou, para melhor nos exprimirmos, verdadeiramente industrial; cumpre que os exercicios acompanhem ou sigam frequentemente as lições dos professores

nas cadeiras de sciencias applicadas; aliaz formar-se-hão cavalheiros diplomados, ou encartados, ou engravatados, para uso de salões e secretarias em vez de homens laboriosos e illustrados para beneficio das fabricas, dos escriptorios e das obras publicas. Os bons gabinetes e muzeus são indispensaveis para que isto se consiga. Parece-nos tambem que o systema de provimento de algumas cadeiras, senão de todas, deve ser differente do actual.

A Academia Polytechnica do Porto ahi tem vivido sem que o Estado cuide muito d'ella; em 1857, isto é, no fim da sua carreira parlamentar, Passos Manoel deplorou a mesquinhez da dotação d'esse estabelecimento; nos 28 annos desde então quasi volvidos, alguns melhoramentos se realisaram; mas quanto não ha ainda a fazer! O projecto a que alludimos procura realisar parte do muito que já devia estar effectuado; é de esperar que ao menos agora as côrtes o approvem.

Não desconhecemos que fôra melhor uma reforma completa; mas receiamos que por causa do bom se perca o soffrivel.

E assim como ao Estado cumpre favorecer o ensino technico, e, portanto, aperfeiçoar a Academia, á camara municipal do Porto muito especialmente corre o dever de contribuir efficazmente para que se conclua o edificio; tal qual se acha, é prova contra a administração municipal e nacional.

Rodrigues de Freitas.

Porto, 10 de junho de 1885.

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

I

Um facto sobremaneira notavel para a Academia Polytechnica exige que nos occupemos um tanto demoradamente da organisação d'este estabelecimento scientifico, que póde prestar serviços relevantissimos ao norte do paiz. O facto a que alludimos é, como se sabe, a approvação do projecto de lei

que reorganisa os estudos na Academia, projecto devido á iniciativa do illustre deputado e lente da mesma Academia, o snr. dr. Wenceslau de Lima.

Estamos tão pouco acostumados a vêr os poderes publicos beneficiar a Academia Polytechnica, conceder-lhe mesmo aquillo a que ella tem direito, que achamos motivo para alvoroço no facto importante que acaba de dar-se. Desde muitos annos não alcança aquelle estabelecimento um melhoramento tão assignalado, um tão notavel elemento de progresso para esse instituto que, apesar de tão esquecido nas regiões officiaes, tem dado ao paiz muitos dos seus mais distinctos funccionarios, muitos talentos apreciados em diversos campos das lides intellectuaes.

E' justo que ao fallarmos do projecto fallemos tambem de quantos n'elle cooperaram. A mercê, aliás justissima, feita á Academia, foi tão valiosa, que o reconhecimento não deve ser pequeno; oxalá que, pelo menos, esse reconhecimento possa incitar novas dedicações.

O valor do projecto é grande; amplia o ensino na Academia, distribuindo por tres cadeiras a mechanica applicada e construcções publicas, que constituiam até agora a 13.ª cadeira; estatuindo que a mechanica geral, a cinematica e a geometria descriptiva e suas applicações, lidas até aqui por um só lente na 3.ª cadeira, sejam confiadas a dous professores; desdobrando igualmente as duas cadeiras que havia, uma para o ensino da mineralogia, geologia, metallurgia e arte de minas (6.ª cadeira) e outra para a chimica mineral e organica e analyse chimica (9.ª cadeira). Authorisa o conselho academico á revisão dos programmas dos cursos legaes da Academia, para, depois de approvados pelo governo, serem postos em vigor no proximo anno lectivo. Consigna o principio salutar e utilissimo das missões scientificas dos alumnos, hoje sanccionado vantajosamente em todas as escolas de applicação. Cria, sem gravame para os alumnos, não só a receita para as missões como para o augmento das dotações dos gabinetes e dos muzeus da Academia, igualando a multa das matriculas na Academia á das escolas medico-cirurgicas.

Recordemos a marcha do projecto através do parlamento; lembremos os nomes de quem mais cooperou na sua approvação.

O projecto foi apresentado na camara dos snrs. deputados pelo digno lente da Academia o snr. dr. Wenceslau de Lima em 24 de março ultimo; teve parecer favoravel das commissões de instrucção superior e fazenda, sendo relator o snr. dr. Francisco Augusto Correia Barata. Em 27 de abril subiu á camara dos dignos pares, onde obteve parecer favoravel das commissões de instrucção publica e fazenda, sendo relator o snr. Henrique de Macedo; e foi approvado em 30 de maio.

Mais de uma corporação apoiou briosamente o projecto. O conselho escolar da Academia representou ás duas camaras legislativas pedindo a approvação d'elle, sendo a representação dirigida á camara dos snrs. deputados apresentada em 13 de abril pelo snr. dr. Wenceslau de Lima; e a dirigida á camara dos dignos pares, em 1 de maio, pelo lente jubilado da Academia Polytechnica, o snr. dr. Pereira Cardoso.

A digna direcção da Associação Commercial representou no mesmo sentido, contribuindo assim para o engrandecimento de um estabelecimento a que o commercio póde vir a dever valiosos serviços desde que o ensino se torne mais proficuo. A representação d'essa distincta corporação foi apresentada na camara dos dignos pares, em 6 de maio, pelo snr. conde de Castro.

A camara municipal do Porto e a junta geral d'este districto manifestaram tambem a sua adhesão ao projecto, enviando ao parlamento representações.

Por ultimo, devemos citar o snr. ministro do reino, que acompanhou sempre, com os melhores desejos, este projecto.

Para se apurar o valor do serviço que com este projecto foi prestado á Academia Polytechnica, seria preciso lembrar os repetidos esforços envidados durante largos annos para que o ensino, que se resentia dos defeitos da primitiva organisação, tomasse uma feição mais racional, mais accommodada ao caracter de uma escola de applicação. Esses esforços foram,

porém, quasi sempre improficuos, o que, felizmente, não aconteceu agora.

Para se apreciar quanto a Academia se tem empenhado pelo seu engrandecimento, volvamos uma ligeira vista sobre o seu passado.

A' Academia Polytechnica do Porto, pela lei da sua creação, coube no paiz a implantação do ensino das sciencias industriaes (decreto de 13 de janeiro de 1837, artigo 155.º). Infelizmente, fôra defeituosa em pontos essenciaes a organisação dada á Academia; e não cuidaram os governos posteriores de corrigir estes defeitos, como certamente estaria na mente do legislador que a decretou.

Com effeito, segundo a reforma de 1837, que definiu a feição pedagogica da Academia, deveria ella ser destinada a formar engenheiros civis de todas as classes, entre elles os de minas, de pontes e estradas e constructores, officiaes de marinha, pilotos, commerciantes, agricultores, directores de fabricas e artistas. Para todos estes cursos eram destinadas onze cadeiras, a saber: quatro de mathematicas puras, uma de desenho, uma de artilheria e tactica naval, quatro de sciencias physicas ou philosophicas e uma de commercio.

Entre estes cursos alguns ha, como o de engenheria civil, que têem o caracter de cursos superiores; mas a par d'estes contam-se o de artistas, o de pilotos, etc., que estão longe de ter essa feição. Uma tal ligação é sobremaneira inconveniente; o ensino com o caracter de superior não póde ter a feição especial exigida para fazer parte de um curso de preparação para uma arte ou um officio.

Demais, o numero de cadeiras era muito pequeno para ensino tão variado. Em 1864 dizia a este respeito o snr. José Maria de Abreu:

«A multiplicidade e qualidade dos cursos, e a simples indicação das materias que em cada cadeira se devem lêr, bastam para convencer ainda os menos versados em taes assumptos de que era impossivel abranger em numero de cadeiras tão limitado para tantos e tão variados ensinos uma instrucção que não fosse insufficiente, por demasiado elementar, para

os cursos superiores das mais elevadas sciencias applicadas; ou inaccessivel, por superior e transcendente, para os que se destinam a classes industriaes e de artistas.»

Havia, porém, ainda outro defeito e não pequeno. Se o numero de cadeiras de sciencias geraes se podia considerar como muito sufficiente para as necessidades do ensino nos diversos cursos, era, pelo contrario, limitadissimo o numero das sciencias industriaes propriamente ditas, faltando algumas cadeiras, sem as quaes não ha ensino technico. Assim, para o curso de engenheiros de minas não havia uma cadeira especial de mineralogia, geologia e montanistica; tanto para este curso, como para o de engenheiros de pontes, estradas e constructores, nem sequer se fazia menção no decreto do ensino das construcções e da mechanica applicada, competindo apenas ao lente da 2.ª cadeira, já sobrecarregado, o ensinar os principios de mechanica, e ao da 8.ª a mechanica industrial. O ensino da chimica, tão necessario aos cursos industriaes, estava em uma unica cadeira e abrangia a chimica geral e analytica, a chimica industrial ou artes chimicas e a lavra de minas. Para quem conhece as necessidades d'este ensino, ocioso, por certo, será dizer que, sobre tão falsas bases, de pouco poderia elle servir.

Como se fossem pequenos os defeitos que apontamos, dispunha o artigo 157.º do Decreto de 13 de janeiro de 1837 que a 1.ª cadeira (arithmetica, geometria elementar, trigonometria plana, algebra até ás equações do 2.º grau) substituisse a 5.ª cadeira creada para o Lyceu d'esta cidade; e que do mesmo modo as cadeiras de physica, chimica e principios de historia natural do Lyceu fossem substituidas pelas cadeiras 7.ª, 8.ª e 9.ª da Academia, de modo que o Lyceu vinha a ficar em parte dependencia d'ella. [1] Se estas providencias, das quaes resultava alguma economia para o thesouro, poderiam dar aos cursos da Academia uma frequencia numerosa, tinham em compensação a desvantagem de obstarem a que se désse ao ensino

1 Artigo 161 do Decreto de 13 de janeiro de 1837; e art. 42 do Decreto de 17 de novembro de 1836.

a elevação que elle devia ter n'um curso superior; ou, de outro modo, seria de todo improficuo para os alumnos.

O conselho academico ainda tentou remediar alguns dos defeitos apontados; por exemplo, passou o estudo da mechanica geral e industrial para a 3.ª cadeira (geometria descriptiva), e incluiu na 6.ª cadeira (artilheria e tactica naval) o ensino das construcções; mas era-lhe impossivel sanar todos os mais defeitos.

Para trabalhos práticos a Academia tarde começou a gozar de alguns elementos. Apezar de decretados pelo artigo 165 do citado decreto de 1837 os laboratorios e officinas para os trabalhos práticos, só mais tarde, em 1844, é que foi dada authorisação para estabelecer dous d'elles, o laboratorio chimico e o jardim botanico. Até 1864, porém, póde dizer-se, não gastava o thesouro não só com estes estabelecimentos, como com a compra de livros para a bibliotheca, acquisição de estampas, expediente, reparação do edificio, etc., senão a quantia de 400$000 réis, com a qual quasi nada se podia adquirir. Só vinte annos depois da creação da Academia é que principiou a figurar no orçamento para a conservação e aperfeiçoamento dos estabelecimentos academicos a quantia de 650$000 réis, que depois passou a 850$000 réis.

Comprehende-se, em face d'esta parcimonia do orçamento, que os gabinetes estivessem muito pobres.

Nada haveria mesmo se não fosse o zêlo e dedicação de alguns professores. Em 1861, o director da Academia communicava ao governo, nos seguintes termos, as provas de dedicação dadas pelos professores.

«Parte do que ha é devido ao zêlo e abnegação dos lentes. Assim, por exemplo, para a fundação do laboratorio cedêra o lente de chimica uma parte dos seus ordenados; para a compra de certos objectos scientificos, para os quaes não bastavam os meios offerecidos pelo governo, os lentes Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, da cadeira de zoologia, e Joaquim Torquato Alvares Ribeiro, da de astronomia, offereceram-me 50$000 réis cada um.»

Estas palavras merecem ficar registradas.

No artigo seguinte apreciaremos a marcha da Academia Polytechnica depois do que deixamos enunciado.

B. C.

Porto, 12 de junho de 1884.

II

Mais de um ensejo favoravel se apresentou para que a Academia Polytechnica obtivesse, com a diminuição do numero de cursos n'ella professados, uma organisação mais perfeita no ensino. Infelizmente, nada se conseguiu, apesar dos esforços do conselho academico, que em 1864 se manifestou favoravelmente á suppressão de alguns dos cursos, dos quaes uns não téem existencia real e outros representam um verdadeiro absurdo, tal é a sua pessima organisação.

Um d'esses ensejos, a que nos referimos, foram as reformas da instrucção secundaria e especialmente a lei de 12 de agosto de 1854, que estabeleceu nos lyceus as cadeiras de principios de physica, chimica e introducção á historia natural, e a de arithmetica, algebra, geometria e trigonometria plana e que exigiu o exame d'estas disciplinas como habilitação necessaria para a primeira matricula na Academia.

Outro ensejo foi a creação de escolas e institutos industriaes e agricolas, pelos decretos de 16 e 30 de dezembro de 1852, destinados ao ensino industrial elementar e médio, e ao ensino especial agricola.

A reforma de 20 de setembro de 1844 [1] não trouxe grandes fructos; se attendeu a algumas das reclamações do conselho academico, offendeu as verdadeiras aspirações da Academia decretando a suppressão da 6.ª cadeira, em que se ensinavam as construcções publicas. A Academia ficou em uma posição sobremaneira embaraçosa; sem aquella cadeira, como poderia preparar os engenheiros civis? Baldadas, como quasi sempre,

1 O decreto de 20 de setembro dé 1844 deixava, no artigo 50, subsistir a communidade da cadeira de arithmetica e geometria.

foram as suas reclamações. Tiraram-na d'essa situação embaraçosa, primeiro o illustre José Victorino Damasio e depois o lente substituto snr. Gustavo Adolpho Gonçalves e Souza, que se offereceram para reger gratuitamente a referida cadeira, prestando assim um valioso serviço.

A voz da Academia, reclamando os melhoramentos mais indispensaveis, era sempre despresada; nunca a escutaram. Os directores reclamavam nos seus relatorios annuaes; o conselho escolar expunha collectivamente, em representações, o estado cahotico da organisação academica; mais de uma voz eloquente defendeu briosamente a causa da Academia; mas tudo era baldado, tudo inutil.

N'essa louvavel campanha justo é especialisar um dos mais valorosos luctadores. Referimo-nos a um dos lentes mais distinctos e respeitaveis que teve a Academia, o finado Joaquim Torquato Alvares Ribeiro. O seu bello talento, o seu esforço decidido estiveram sempre ao serviço da causa benefica do engrandecimento d'aquelle instituto; nos discursos proferidos em sessões solemnes de abertura das aulas fallava com ardor das necessidades da Academia Polytechnica; e perante el-rei dizia o illustre professor em 30 de novembro de 1863:

«Senhor! — e em ensejo tão solemne deve dizer-se toda a verdade — ha 26 annos que a antiga Academia do Porto, creada a expensas suas (exemplo unico no paiz) fôra elevada no reinado de vossa augusta mãe, sendo ministro Passos Manoel, a Academia Polytechnica, e a lei lhe prometteu os gabinetes e escolas práticas de que carecia para bem cumprir as novas obrigações que se lhe davam. Vai em outros tantos annos que incessantemente se reclama a execução d'essa promessa, e o augmento de cadeiras, que era uma necessidade, mórmente depois que ainda se lhe supprimira uma. E quando a estas reclamações se não attendia, quando até por alguns annos nem as mesmas substituições vagas se preenchiam, a despeito das repetidas instancias do conselho academico, davam-se a outras escolas novas cadeiras, e a algumas se duplicavam as substituições, e se enriqueciam (e ao menos prestavam esse serviço á sciencia) os gabinetes e escolas práticas da capital.

Ao passo que o tributo que espontaneamente haviam offerecido pagar para se levantar um edificio condigno, fôra absorvido para o thesouro com outra denominação e nova fórma na cobrança, e essas obras pararam, se levantava um sumptuoso edificio na capital... e ainda bem que ao menos aos institutos d'alli se attendia como o demandava a dignidade do paiz e o culto da sciencia.

Porém, nem o zêlo do professorado, nem o ardor dos seus alumnos succumbe — os seus lentes completam os cursos, lendo, até gratuitamente, e tendo alguns de accumular mais que uma leitura, as disciplinas para que lhes não davam cadeiras. Pensar-se-hia, senhor, que tanto zêlo pelo ensino, tanta dedicação pelo aproveitamento dos alumnos, faria emmudecer os adversarios da instrucção publica no Porto, mereceria ao menos algumas palavras de louvor! E quem o acreditaria? a tudo isto responde-se com projectos de regulamentos, desattendendo tantos esforços, vedando a sua continuação! queriam até se revogasse a lei a pretexto de um programma!»

Por ordem do governo, veio, em 1864, o snr. José Maria de Abreu, vogal effectivo do conselho superior de instrucção publica, fazer uma inspecção extraordinaria á Academia Polytechnica; e no relatorio que escreveu ácerca d'esta commissão de serviço poz em relêvo os defeitos da organisação da Academia, propondo ao mesmo tempo as medidas que julgava necessarias para a reforma dos estudos. Por esta occasião, o conselho academico mostrou bem claramente o que era preciso fazer-se, e declarou: 1.° que o curso de chimica devia ser lido em duas cadeiras em vez de uma, como até alli; 2.° que se creasse uma cadeira de mineralogia e geologia e outra de docimasia e montanistica; 3.° que o ensino das applicações reclamava pelo menos a creação de quatro cadeiras, podendo-se *por então* supprir o ensino com tres, uma para mechanica racional e cynematica; outra para construcções; e outra para machinas de vapor, caminhos de ferro, cynematica das machinas e hydraulica applicada. O snr. José Maria de Abreu declarava no seu relatorio que as referidas propostas mereciam ser tomadas em consideração.

No parlamento mais de uma vez se pugnou pelos melhoramentos da Acadèmia; foram apresentados diversos projectos que geralmente não logravam sahír das commissões, como tantas vezes succede com muitos projectos de utilidade publica.

Por diversas vezes se pediu o restabelecimento da 6.ª cadeira, por exemplo. Esta restituição justissima foi proposta em 1857 pelo snr. conde de Samodães. Em 19 de janeiro de 1861 o director da Academia escrevia sobre o mesmo assumpto, no relatorio dirigido ao governo, as seguintes palavras:

«Na camara dos snrs. deputados está uma representação do conselho academico n'este sentido, a qual ahi foi apresentada no anno passado, fundando-se em razões de facil convicção e apoiando-se n'um parecer das commissões de instrucção publica e fazenda da mesma camara, na sessão de 1859, o qual chegou a ser dado para ordem do dia, mas não passou a lei por ter sido dissolvida a camara. Alguns dos membros d'essas commissões pertencem hoje ao conselho geral de instrucção publica, circumstancia que dispensa a prova sobre a solidez da authoridade em que se fundou o conselho academico. E, certamente, das diversas providencias que esta academia reclama para beneficio publico a de restabelecer a 6.ª cadeira é uma das mais instantes.»

Na camara dos snrs. deputados foi apresentado em 25 de abril de 1864 um projecto de lei assignado por 29 membros d'aquella camara, estabelecendo a creação de tres cadeiras, uma de mineralogia, geologia e principios de metallurgia, outra de chimica organica e analyse chimica, e outra de mechanica e suas applicações ás machinas; dispondo que fosse restabelecida a 6.ª cadeira destinada a construcções e que fosse votada a quantia de 3:000$000 reis para a conservação e aperfeiçoamento dos estabelecimentos dependentes da Academia. Nem mesmo este projecto, apesar dos nomes valiosos que o firmavam, teve o merecido seguimento; foi submettido ao exame do conselho superior de instrucção publica, o qual entendeu ser então necessario proceder a uma inspecção no proprio local da Academia, a fim de colher todos os factos e informações que podessem esclarecer a questão. Mas d'essa ins-

pecção não se seguiu, como era de esperar, a proposta de uma nova organisação da Academia, que nada lucrou sobre este ponto de vista. Ficou apenas um relatorio.

Nos ultimos annos, o conselho academico tem-se occupado da necessidade de ampliar a Academia Polytechnica. Assim, em 1880 foi enviada á direcção geral de instrucção publica a representação pela qual se justificava um projecto de reforma que então fôra elaborado. Pouco depois, em fins de 1881 e principios de 1882, foi largamente discutido um projecto de reforma, fundado em uma já antiga indicação do snr. José Maria de Abreu, no seu relatorio de 1864, que lembrava a fusão da Academia e do Instituto Industrial d'esta cidade, como meio de os melhorar. Este projecto, fundado em principios muito sensatos, não teve seguimento, porque não houve accordo entre os dous estabelecimentos citados ácerca das bases da fusão.

Bastam estas ligeiras informações que ahi deixamos expendidas para mostrar que durante quasi meio seculo, desde 1837 até 1883, a Academia Polytechnica permaneceu quasi estacionaria. Ao passo que isto succedia, outros estabelecimentos scientificos iam adquirindo melhoramentos notaveis, exigidos pelos prodigiosos progressos realisados nas sciencias.

Durante esse periodo, tendo sido supprimida a 6.ª cadeira, apenas se crearam duas novas cadeiras, apesar das solicitações instantes para mais largas concessões.

Uma d'essas cadeiras foi a de economia politica e principios de direito administrativo, creada pela lei de 15 de julho de 1857.

A iniciativa do respectivo projecto de lei e a sua defeza deve-se aos irmãos Passos, que n'esta e em outras circumstancias prestaram valiosos serviços á Academia. Durante a discussão Passos Manoel recordou com verdade que não se deviam regatear meios para fomentar a instrucção. «Debaixo do peso e oppressão da maior crise financeira por que este paiz passou, disse elle com calor, eu decretei em 1836 e 1837 com mão larga e os meus collegas membros da administra-

ção os estabelecimentos cuja importancia consta dos diplomas que existem na collecção das leis.»

A outra cadeira foi a de mechanica, consignada no Decreto de 31 de dezembro de 1868, que é obra do então director geral de instrucção publica e distincto lente da Academia, o snr. conselheiro Adriano Machado. Em realidade eram duas as cadeiras creadas, a de mechanica e a de chimica organica e analyse chimica; mas, estando sómente provida a de mechanica ao tempo da publicação da Lei de 2 de setembro de 1869, que suspendeu aquelle Decreto, ficou subsistindo apenas essa, e o conselho destinou-a á mechanica applicada e ás construcções civis.

Eis os resultados de tanto tempo de lucta e de tão aturados esforços. Veremos no proximo artigo qual é o valor dos melhoramentos que a Academia alcançou desde 1883.

B. C.

Porto, 17 de junho.

III

De 1883 a esta parte a Academia Polytechnica tem adquirido valiosos elementos de prosperidade; desde a sua fundação é, sem duvida, o periodo em que para ella téem corrido auras mais favoraveis.

Na sessão legislativa d'aquelle anno o illustre deputado e distincto lente da Academia, o snr. dr. Wenceslau de Lima, tomou a iniciativa de um projecto de lei restaurando a 6.ª cadeira e destinando-a ao ensino da mineralogia, geologia, metallurgia e arte de minas. Esse projecto foi approvado e constitue o objecto da carta de lei de 14 de junho de 1883. Ainda na mesma sessão, o illustre deputado conseguiu que a dotação para as despezas da Academia fosse elevada de réis 1:730$000 a 2:500$000.

Depois de testemunhos tão evidentes de dedicação pela Academia, o snr. dr. Wenceslau de Lima quiz ainda este anno

provar por um facto de incontestavel e consideravel valia o seu amor ao estabelecimento em que é professor. Esse facto foi o projecto ainda ha pouco approvado no parlamento, e que vai collocar a Academia em condições de satisfazer aos fins para que foi instituida. Este projecto, que exigiu um patrocinio constante, para ser approvado sem delongas, que requereu a maior intrepidez perante os obstaculos que surgiam a cada passo, dota a Academia com cinco novas cadeiras e poderá proporcionar-lhe mais ampla dotação.

Foram em grande parte satisfeitas as aspirações do conselho academico, sendo creada mais uma cadeira de engenheria do que fôra solicitado em 1864. Attenda-se agora á organisação do curso de commercio, e a Academia Polytechnica poderá encetar desassombradamente uma carreira gloriosa, ensinando bem, fornecendo ao paiz homens competentes em diversos ramos de sciencia applicada.

Com a creação das novas cadeiras poderão estabelecer-se convenientemente os quadros dos estudos nos diversos cursos legaes da Academia, especialmente o de minas e o preparatorio para as armas especiaes e estado-maior da Escóla do Exercito. Uma portaria de 26 de junho de 1883 mandou proceder á organisação d'esses quadros depois da creação da cadeira de mineralogia; o conselho academico fez um trabalho de demorado estudo; mas justamente se queixava de que as suas indicações não podiam ter cabal execução em virtude da escassez de cadeiras de applicação. Agora, porém, poderão os referidos quadros ficar convenientemente organisados e perfeitamente exequiveis.

Com os novos recursos que lhe são ministrados, a Academia Polytechnica poderá vêr satisfeitas as suas antigas aspirações no que diz respeito a preparar os alumnos para a Escóla do Exercito. Em 1873 foi incumbida uma commissão de organisar o regulamento do curso preparatorio para a referida Escóla na nossa Academia, e esse regulamento foi approvado por decreto de 2 de junho de 1873. Era preciso, porém, muita dedicação do conselho d'este estabelecimento para com um pequeno numero de cadeiras satisfazer ás exigencias d'esse re-

gulamento. Isso mesmo foi reconhecido pela citada commissão quando escrevia no seu relatorio:

«N'este empenho encontraram-se difficuldades, que á primeira vista pareciam não existir; e a commissão só pôde vencel-as depois de conhecer que o conselho da Academia Polytechnica cooperava efficazmente com a reforma dos programmas e dos methodos de ensino.»

Hoje, porém, o referido regulamento torna-se perfeitamente exequivel, e não duvidamos até de que já no proximo anno seja permittida a matricula na Academia a alumnos que se destinem para a Escóla do Exercito. Como já referimos, isto mesmo foi reconhecido no parecer que sobre o projecto ha pouco approvado foi elaborado na camara dos dignos pares.

E' justo que a Academia Polytechnica passe a usofruir uma faculdade importante que lhe foi outhorgada pelo artigo 140 do Decreto com força de lei de 20 de setembro de 1844.

Comparemos agora as condições em que fica a nossa Academia em relação a estabelecimentos similares do estrangeiro. Será desnecessario fazer essa comparação com respeito a paizes que nos levam consideravel vantagem em população, em extensão e em recursos; façamol-a com respeito á Belgica, um paiz pequeno em extensão territorial, mas adiantado em elementos de progresso.

A Academia Polytechnica do Porto, com as novas cadeiras, ficará comparavel á Escóla de artes e manufacturas, de engenheria civil e de minas, de Louvain, que tem um curso obrigatorio de quatro annos para engenheiros de artes e manufacturas, engenheiros civis e militares; de quatro annos para engenheiros architectos; formando tambem engenheiros de construcções civis e construcções mechanicas e engenheiros de artes chimicas.

Ficará tambem tendo muitos pontos de contacto com a Escóla de artes e manufacturas e de minas, de Liége, que se divide em tres secções: uma escóla preparatoria, que fórma candidatos para as duas outras secções; uma escóla das minas, que comprehende a instrucção necessaria á formação de engenheiros de minas; e, finalmente, uma escóla de artes e manu-

facturas, para facilitar o estudo da exploração das minas e officinas aos alumnos que não quizerem fazer parte do corpo dos engenheiros de minas; e tambem fórma engenheiros mechanicos.

Póde igualmente comparar-se a Academia Polytechnica, com a sua nova organisação, á Escóla de engenheria civil e artes e manufacturas, de Gand, que comprehende: 1.º uma divisão preparatoria; 2.º uma divisão de applicação para engenheria civil e de artes e manufacturas. A de engenheria civil fórma engenheiros e conductores honorarios de pontes e calçadas; a de artes e manufacturas destina-se ao ensino das noções technicas necessarias na industria, nas artes e nas manufacturas.

Desde que na Academia Polytechnica se constitua o ensino da chimica e botanica industriaes e da legislação mineira e industrial, poderá pôr-se em parallelo com a Escóla Polytechnica de Bruxellas.

Em representação de 9 de maio de 1883 o conselho da nossa Academia pediu a introducção de um curso de sciencias physico-naturaes. Até agora nada obteve, mas com a nova organisação dos estudos poderá constituir um curso bastante completo de sciencias philosophicas analogo ao curso de sciencias naturaes da Universidade de Louvain.

Tambem poderá ser organisado, sem grande difficuldade, um curso de sciencias physico-mathematicas, onde vão buscar o complemento da sua educação scientifica os alumnos já habilitados com os cursos dos lyceus..

O ensino de minas na nossa Academia, ensino que era até agora uma vergonhosa phantasmagoria, passará a ser uma realidade, em virtude da creação da 6.ª cadeira pela lei de 14 de junho de 1883 e do desdobramento d'ella, ultimamente approvado. Este desdobramento era tanto mais necessario quanto é certo que as duas cadeiras já existiam no Instituto Industrial e Commercial de Lisboa, pelo decreto de 30 de setembro de 1879, que creou o curso de conductores de minas. O conselho academico organisará, por certo, um curso biennal das disciplinas que compõem a cadeira de arte de mi-

nas e metallurgia, a fim de dar a estes estudos todo o desenvolvimento possivel; e assim prestará um excellente serviço ao nosso paiz, em que a exploração mineira se vai desenvolvendo sensivelmente.

Emfim, dos projectos approvados em 1883 e 1885 dimanam os fructos mais beneficos; esses projectos representam um serviço de inalculavel valia prestado á Academia; traduzem a elevada dedicação do snr. dr. Wenceslau de Lima por este estabelecimento e um excellente serviço publico.

Para que a Academia Polytechnica attinja os seus alevantados fins torna-se, porém, necessario a conclusão do edificio, e para aqui devem convergir as attenções do conselho academico e o concurso das corporações que trabalham pela prosperidade do Porto. Sem essa conclusão a Academia não poderá ter os laboratorios, os gabinetes, os muzeus e as salas de estudo de que carece e que tornarão o ensino verdadeiramente proficuo.

O estabelecimento que entrou em um periodo de existencia mais risonha do que tem tido merece bem que lhe seja prestado o auxilio necessario para ser uma verdadeira escóla de applicação. São esses os nossos sinceros desejos.

B. C.

II. — O DECRETO DE 10 DE SETEMBRO DE 1885

Relatorio da commissão academica encarregada da revisão dos programmas dos cursos legaes da Academia

Congratula-se a commissão nomeada pelo conselho para a revisão dos programmas, nos termos do § 1.° art. 1.° da lei de 21 de julho de 1885, por poder apresentar um projecto de programma dos cursos academicos, que corresponde ao pensamento altamente civilisador que dictou a creação d'esta Academia pelo Decreto de 13 de janeiro de 1837, destinando-a especialmente ao derramamento e ensino das sciencias industriaes. As disposições da carta de lei de 21 de julho do corrente anno tornam possivel realisar hoje um ensino que até agora não podia ser fornecido senão muito incompletamente por falta dos elementos indispensaveis.

Os defeitos da primitiva organisação d'esta Academia tem sido demonstrados tantas vezes, que parece ocioso insistir sobre elles. Basta referir o principal, que era o accumular na mesma escóla e nas mesmas aulas todo o ensino industrial, desde a instrucção elementar do simples artista até ao alto ensino de engenheria nos seus diversos ramos. Tal organisação não podia deixar de ser em extremo rudimentar.

Tambem não carece a commissão de dar fé dos constantes esforços pelo conselho empregados para melhorar o quadro dos estudos aqui professados, já em representações que por muitas vezes fez subir até á presença de Sua Magestade, já pela

voz de seus presidentes nos seus relatorios annuaes e em muitos outros documentos.

Agora que estão realisadas a maior parte das aspirações do conselho academico, cumpre a commissão um dever consignando o seu reconhecimento ao Governo por ter solicitamente cooperado para que vingasse uma medida legislativa que não só redunda em proveito e credito do estabelecimento a que pertencem os abaixo assignados, como tambem constitue um grande passo dado para a boa organisação da nossa instrucção superior, satisfazendo a uma instante necessidade publica.

E' opinião da commissão que a Academia Polytechnica deve propôr-se, como estabelecimento de instrucção superior, a professar em larga escala as sciencias industriaes, fim especial da sua creação; continuando a formar engenheiros civis de diversas cathegorias, e representando entre nós o papel d'uma escóla central digna d'este nome e da importancia do centro em que se acha installada. Estas razões militam tambem por que aqui se conserve um curso superior de commercio que corresponda, no desenvolvimento do ensino e nas vantagens que lhe são concedidas, a identico curso fundado no Instituto Industrial e commercial de Lisboa pela carta de lei de 6 de março de 1884.

Estes cursos superiores de engenheria civil e de commercio devem occupar o principal logar no plano dos estudos da Academia e determinar a feição propria d'esta escóla, que assim não constitue duplicação de qualquer outro estabelecimento scientifico do paiz. A Academia, repetimos, representa a Escóla Central portugueza, e é analoga pela organisação a tantos outros institutos similares existentes no estrangeiro, especialmente as escólas de engenheria d'artes e manufacturas e de minas de Gand, Liége, Louvain e Bruxellas, na Belgica; e á Escóla Polytechnica do Rio de Janeiro.

Os cursos preparatorios para as escólas do exercito, naval, medico-cirurgicas e de pharmacia, podendo ser proficuamente organisados com programmas analogos aos das outras escólas do paiz que fornecem o mesmo ensino preparatorio,

devem, d'accordo com as leis vigentes, continuar a fazer parte do quadro dos cursos da Academia.

Além dos cursos de engenheria, de commercio e preparatorios enumerava o Decreto de 13 de junho de 1837, no art. 155, os de officiaes de marinha e de pilotos; o de agricultores, de directores de fabricas e de artistas. Julga a commissão que não convém inserir estes cursos nos programmas, por virtude das medidas legislativas posteriores a 1837, e que teem modificado a instrucção profissional nos seus diversos ramos.

O Decreto com força de Lei de 7 de julho de 1864 estatue que os cursos para os officiaes de marinha e engenheiros navaes só podem ser frequentados na Escóla Naval (art. 41). Por outro lado, a suppressão, pelo art. 139 do Decreto de 20 de setembro de 1844, da 6.ª cadeira da Academia que era destinada ao ensino da artilheria e tactica naval, tornava irrealisavel a organisação dos citados cursos. Não podem, pois, continuar a figurar como cursos superiores da Academia. O mesmo Decreto no artigo 12 e 13 e o de 26 de dezembro de 1868, artigo 23 e 24, que se refere á portaria de 8 de junho de 1860, permittem, porém, que aqui se estudem as disciplinas preparatorias para esses cursos na Escóla Naval.

O curso de pilotos tem sido objecto de diversas medidas legislativas, e especialmente no D. de 20 de setembro de 1844, art. 142; D. de 19 de maio de 1845, art. 36; portaria de 11 de julho de 1845; portarias de 5 de fevereiro e 21 de novembro de 1859; D. de 7 de julho de 1864, art.os 3, 4, 10 e 14. O Conselho mencionou-o nos programmas de 1838, approvados por Portaria de 26 de outubro de 1838, e nos que foram organisados em 1861, por elle approvados em 18 de maio do mesmo anno. Em qualquer dos referidos programmas era exigida para o curso de pilotos a frequencia da aula de manobra e apparelho naval, que, nos termos do § 1.º do art. 157 do já citado Decreto de 13 de janeiro de 1837, era regida por um mestre de manobra naval. Mas tendo sido supprimido este logar pelo D. de 14 de dezembro de 1869, artigo 2, n.º 5, não póde tal curso continuar a figurar n'esta Academia. É um cur-

16

so privativo da Escóla Naval, segundo o referido decreto de 7 de julho de 1864.

Com respeito ao curso de agricultura, o decreto com força de lei de 29 de dezembro de 1864, que reorganisou esse ensino profissional, não o estabelece fóra do Instituto agricola, senão nas quintas d'ensino, regionaes e especiaes (capitulos 1.º e 2.º e capitulo 3.º, artigo 17) e não allude a esse ensino na Academia Polytechnica. É certo, por outro lado, que os elementos de que a Academia póde dispor para o realisar, são em extremo defficientes.

Emfim, pelo que respeita ao curso de directores de fabricas e de artistas, esses só são proprios de estabelecimentos de ensino medio industrial e não de ensino superior, e achamse, depois do D. de 20 de dezembro de 1864, art. 5, n.º 1, comprehendidos nos Institutos industriaes de Lisboa e Porto. O referido decreto, considerando estes cursos como de 2.º grau, exclue os do ensino industrial superior. A doutrina sustentada pela commissão sobre este assumpto tem por si a auctoridade do Conselho Geral de Instrucção Publica [1] e a do Conselheiro José Maria de Abreu. [2]

Os referidos cursos de engenheiros navaes, pilotos, directores de fabricas, artistas e agricultores podem dizer-se abandonados desde muitos annos a esta parte, o que é prova clara da sua inteira inutilidade. Assim naturalmente, sem que nos programmas até aqui elaborados pelo Conselho Academico estivesse consignado claramente o que se póde considerar como expressão das leis que teem sido sanccionadas sobre a instrucção profissional, foi-se effectuando insensivelmente a differenciação entre a Academia, como estabelecimento de ensino superior, e os Institutos industriaes e agricolas.

1 Consulta de 21 de julho de 1863, *Diario de Lisboa*, anno 1864, n.º 105, 12 de maio, p. 1488-1489.

2 Relatorio da inspecção extraordinaria feita á Academia Polytechnica do Porto em 1864 pelo vogal effectivo do conselho geral de instrucção publica, José Maria de Abreu; Lisboa 1865, pag. 20, 22 e 50, e especialmente pag. 95.

Uma vez definidos os cursos que aqui devem ser ministrados, cuidou-se de os organisar convenientemente.

De todos os cursos liga a commissão a maior importancia aos de engenheria, e já o legislador que em 1837 lançou as bases d'esta Academia, lhes dava o primeiro logar (D. de 13 de janeiro de 1837, art. 155).

Segundo o Decreto organico de 1837, a Academia formaria engenheiros civis de todas as classes, taes como, accrescentava-se, os engenheiros de minas, os engenheiros constructores e os engenheiros de pontes e estradas. A lei estabelecendo como preceptivo para esta escóla o servir para a engenheria civil, não definia as diversas cathegorias ou classes de engenheiros que, por virtude da faculdade concedida, aqui podiam formar-se: isso era objecto regulamentar, da alçada do conselho nos termos do art. 158 do mesmo decreto, e hoje da competencia do governo nos termos do art. 9 da lei de 12 d'agosto de 1854. A Academia tanto assim o entendeu que nos programmas de 1838 estabeleceu o curso de engenheiros geographos, que se não achava exemplificado no citado art. 155 do D. de 13 de janeiro de 1837. Em realidade, dizia a este proposito em sua consulta de 21 de julho de 1863 o conselho geral d'instrucção publica, tanto podia accrescentar este como eliminar outros. O conselho póde, portanto, alterar as cathegorias dos cursos de engenheria sanccionados nos programmas de 1838 e 1861.

N'estas bases, propõe as tres classes de engenheiros civis: 1.ª engenheiros de obras publicas; 2.ª engenheiros de minas; 3.ª engenheiros industriaes, ou de artes e manufacturas. A creação da nossa Academia visou a transplantar para o nosso paiz um ensino analogo ao que era ministrado na Escóla Central de artes e manufacturas de Pariz. Esta escóla fôra fundada em 1829 por esforços d'alguns sabios eminentes d'aquelle paiz, e tamanha importancia adquiriu, e de tal modo fôra reconhecida a sua utilidade, que em 1857 passou a ficar a cargo do estado a sua administração. Foi ella que serviu de modêlo não só á nossa Academia, como a muitos outros institutos em diversos paizes. São quatro as cathegorias de engenheiros ci-

vis que n'ella se formam: engenheiros *constructores*, habilitados para construcções civis propriamente ditas e para as artes physicas; engenheiros *metallurgicos*, para a arte de minas e metallurgia; engenheiros *mecanicos*, para construcções de machinas e artes mecanicas; e engenheiros *chimicos*, para as industrias chimicas, quer derivadas da exploração do reino mineral, quer do organico. A estas quatro cathegorias de engenheiros correspondem as tres classes que este conselho propõe: os nossos engenheiros de obras publicas, são os engenheiros constructores da escóla central; os engenheiros de minas são representados lá pelos engenheiros metallurgicos; e, emfim, ás duas classes de engenheiros chimicos e mecanicos correspondem os nossos engenheiros industriaes. Assim a modificação que o conselho da Academia introduz nas cathegorias de engenheiros civis colloca a organisação da Academia mais em harmonia com a ideia fundamental que dictou a sua creação. A divisão da engenheria civil em engenheria de obras publicas e de minas é a sanccionada na nossa legislação, e adoptada, entre outros documentos, no plano de organisação do corpo de engenheiros civis de 17 de fevereiro de 1882. Os estatutos da Associação dos engenheiros civis portuguezes, approvados por alvará de 12 de abril de 1869, adoptam-n'a. Egualmente é ella acceite em diversos paizes, e particularmente na Belgica, embora com denominações um pouco diversas.

A duração dos cursos de engenheria é de seis annos. Os quatro primeiros annos comprehendem os conhecimentos das sciencias mathematicas, physicas e naturaes, preparatorias para os estudos especiaes que definem as tres classes de engenheria civil, que foram adoptadas; constituem assim uma especie de *escóla preparatoria*, á similhança do que se dá na escóla de engenheria civil e das artes e manufacturas de Gand; e nas escólas das artes e manufacturas e das minas de Liège.

Os dous ultimos são destinados ao estudo das sciencias de applicação, e formam assim diversas escólas especiaes de engenheria. N'esta divisão, são communs ás tres cathegorias de alumnos de engenheria uma cadeira de resistencia de materiaes e construcções em geral, que é annual; e uma cadeira de hy-

draulica e de machinas, biennal. Os alumnos candidatos á carta de engenheria de obras publicas estudam especialmente a cadeira de construcções e vias de communicação, biennal; os de minas, a cadeira de montanistica e docimasia, tambem biennal; e os industriaes, a physica e a chimica, botanica e zoologia industriaes.

O Decreto de 30 de abril de 1863 e regulamento de 18 de maio do mesmo anno, a portaria de 13 de outubro de 1857 e a de 3 de março de 1881 não consideram o curso de commercio da Academia como curso superior. A' commissão parece inconveniente a manutenção de um curso de commercio n'esta Academia, inferior em cathegoria aos demais cursos aqui professados, quando um curso elementar de commercio tem melhor cabimento no Instituto Industrial d'esta cidade, com mais vantagens para a classe commercial. E parece a esta commissão que um curso de trez annos em que se comprehenda o estudo da physica geral, da chimica inorganica, da analyse chimica especialmente applicada ao commercio; da botanica e zoologia industrial, especialmente no que diz respeito ás origens, procedencias, caracteres, composição, variedades commerciaes, alterações naturaes, falsificações e usos das materias primas de origem organica; e emfim o das sciencias propriamente commerciaes em dous annos e o da economia politica e direito administrativo; — merece ser considerado como curso superior de commercio, e equiparado ao que com egual cathegoria foi estabelecido pela Lei de 6 de março de 1884 no Instituto Industrial de Lisboa, sendo concedidas aos individuos habilitados com este curso, as garantias designadas no art. 6 da citada lei, além das já consignadas nos artigos 74 e 145 do Decreto com força de lei de 20 de setembro de 1844 e no codigo commercial, art. 1063. Os preparatorios para este curso superior serão os mesmos que os designados para egual curso no Instituto Industrial de Lisboa. A commissão academica reconhece, entre tanto, que o curso de commercio deve aqui dispôr de elementos analogos aos que já conta n'aquelle Instituto. E é licito esperar que muito concorra para esse desideratum a cooperação da Associação Commercial d'esta cidade, que

nos seus ultimos relatorios annuaes tem mostrado a importancia que liga a este ensino academico.

Aproveitar o quadro das sciencias geraes professadas n'este estabelecimento para com ellas organisar cursos de sciencias physico-mathematicas e physico-naturaes, é exemplo que nos é dado por diversas escólas estrangeiras de consideração, entre outras as da Belgica, e a Polytechnica do Rio de Janeiro, e que seria vantajoso seguir; mas a lei não concedendo ao conselho senão a faculdade de revêr os programmas dos cursos legaes, inhibe-o de estabelecer estes cursos novos.

Não nos referindo por emquanto aos cursos preparatorios para a Escóla do Exercito, todos os outros acham-se consignados em leis especiaes como cursos legaes da academia; e os programmas respectivos são os marcados n'essas leis, entre as quaes mencionamos o D. de 26 de dezembro de 1868, art. 23, n.º 2 e 24, e portaria de 8 de junho de 1860 (Escóla Naval); D. de 20 de setembro de 1844, artigos 147 a 150 (Escólas Medico-Cirurgicas); D. de 29 de dezembro de 1836, art. 129 e 130, e D. regulamentar de 23 de abril de 1840, art. 173 (Escólas de pharmacia nas escólas medico-cirurgicas). Não ha motivo que leve a alterar os respectivos programmas legaes.

O curso preparatorio para a Escóla do Exercito foi estabelecido legalmente na Academia pelo D. de 20 de setembro de 1844, art. 143. Em 9 de outubro de 1859 uma commissão fazia subir á presença do governo os resultados dos seus trabalhos em consulta acompanhada de um projecto de regulamento, o qual, com pequenas alterações propostas pelo Conselho de Instrucção publica e pela Academia Polytechnica, fôra approvado pelo ministerio da guerra em officio de 7 de junho de 1859. Este regulamento, porém, não chegou a ser decretado, talvez porque o governo, dizia o Conselheiro José Maria de Abreu em 1864, entendesse que, sem alterar a organisação da Academia, não era possivel apropriar cabalmente o seu ensino ás exigencias dos diversos cursos da Escóla do Exercito. Deve ter sido tambem essa a razão porque, apezar de promulgado o decreto regulamentar de 3 de junho

de 1873, que approvava o regulamento elaborado pela commissão nomeada pelo D. de 14 de agosto de 1872, não eram concedidas as competentes licenças aos alumnos que pretendiam frequentar aqui esses cursos preparatorios. Com a creação das novas cadeiras deixa de existir a razão d'esse *interdicto*, como muito bem lhe chamou em seu relatorio na Camara alta o digno par Henrique de Macedo. A commissão entende que deve haver uniformidade no ensino preparatorio para os cursos das armas especiaes e estado maior da Escóla do Exercito em todos os estabelecimentos scientificos que habilitam para esses cursos; e por isso, usando das attribuições que lhe dá o § 1.º da Lei de 21 de julho que lhe permitte «*fixar os numeros de annos de cada um dos cursos legaes da Academia, de accordo com o maior desenvolvimento dos estudos*», propõe para esses cursos a mesma organisação e duração que elles téem na Escóla Polytechnica de Lisboa, onde são auctorisados pela portaria de 8 de junho de 1860; sendo por este modo alterado o disposto no D. de 2 de junho de 1873 e no D. de 24 de dezembro de 1863, art. 3.º, relativamente á duração d'esses cursos.

Nos programmas que acompanham este relatorio teve-se muito em vista dar o preciso desenvolvimento e importancia aos exercicios scientificos que são indispensaveis para que os alumnos se habilitem a fazer applicação rápida e prompta dos principios estabelecidos e dos conhecimentos que vão sendo adquiridos nas lições aos problêmas que com elles se podem resolver. Nos programmas de 1838 já o conselho expunha com muita clareza a importancia e natureza d'estes exercicios. Actualmente propõe-se a prática de projectos de construcções e architectura, de hydraulica e de machinas; de minas e de physica e chimica industrial; os exercicios de geometria descriptiva, de mathematica (1.ª e 2.ª cadeira), de chimica, de mineralogia e docemasia, e as missões e excursões geologicas. Estabelece-se que o aproveitamento dos alumnos nos projectos e exercicios de geometria descriptiva seja avaliado por um jury especial, pelos mesmos processos que nos cursos theoricos. Emfim, determina-se que os alumnos teem a

obrigação de executarem os exercicios ou de assistirem a elles fóra das horas das aulas. As missões a fabricas, minas e construcções, e as excursões poderão ser realisadas mediante a verba das despezas da Academia, segundo o disposto no § 2.º do art. 1 da já citada carta de lei de 21 de julho.

Parece desnecessario demonstrar a vantagem da adopção d'estas medidas para a proficuidade de ensino. As escólas de applicação de todos os paizes, nomeadamente as da Italia e da Belgica, dão-nos a esse proposito exemplos dignos de serem imitados; e já o Decreto regulamentar de 2 de julho de 1873 attendia a esse importante assumpto. Conta o conselho para estes serviços com a cooperação dos substitutos, que são demonstradores natos (Decreto de 13 de janeiro de 1837, art. 162).

Taes são as principaes razões sobre que se baseia a commissão propondo os programmas que tem a honra de submetter á apreciação do conselho.

Confessando o alcance da reorganisação dada agora á Academia, a commissão, entretanto, ousa esperar que o Governo attenderá ás necessidades mais instantes com que ainda fica luctando este estabelecimento. A creação de repetidores privativos de cada cadeira ou grupo de cadeiras analogas, a de alguns logares de preparadores, chefes de trabalhos e conservadores; o augmento de dotação dos diversos estabelecimentos academicos; a melhor remuneração do seu pessoal, a creação de algumas novas cadeiras que permittam dar maior desenvolvimento a assumptos especiaes a certos cursos, etc., taes parecem ser os pontos sobre os quaes o Governo terá a providenciar para que este estabelecimento corresponda perfeitamente ao fim da sua creação.

Porto e sala das sessões da commissão, em 28 de julho de 1885. (Assignados) *Adriano d'Abreu Cardoso Machado, Francisco Gomes Teixeira, Roberto Rodrigues Mendes, Guilherme Antonio Corrêa, Antonio Joaquim Ferreira da Silva* (relator).

(Seguem os programmas, que são os que foram sanccionados pelo Decreto de 10 de setembro de 1885).

INDICE

ERRATAS

A pag. 17, depois da linha 20 accrescente-se:

Nos termos da carta de Lei de 21 de maio de 1884, que creou o conselho superior de instrucção publica, e do respectivo Decreto regulamentar de 18 de novembro do mesmo anno, art. 3 e 5, procedeu-se no dia 15 de junho d'este anno á eleição do delegado ao referido conselho, recahindo a escolha no distincto lente d'esta academia, o Snr. Conselheiro Adriano Machado.

Na segunda parte do § 13 (pag. 48 e 49) deve accrescentar-se, na lista dos estabelecimentos scientificos:

10.—*O Gabinete de minas e laboratorio metallurgico, ou officina metallurgica*, mencionado no art. 165 do D. de 13 de janeiro de 1837 (Annuario da Academia Polytechnica do Porto, anno de 1879-1880, pag. 154). Este estabelecimento achava-se incluido até agora no gabinete de geologia e minas (Annuario da Academia Polytechnica do Porto, anno de 1883-1884, p. 97), mas hoje fica á parte, visto formarem uma cadeira (15.ª cadeira) as desciplinas respectivas. Este estabelecimento não se acha montado, por falta de local.

Pag. 129, linha 32, onde se lê XVI,—leia-se XVII.
Pag. 90, linha 2, onde se lê lições,—leia-se horas.
Pag. 156, linha 36, onde se lê Irivo,—leia-se Ivo.

Pag. 175—Á lista dos alumnos premiados accrescente-se:

13.ª CADEIRA

1.ª distincção—Estevão Torres.
2.ª » —Joaquim Augusto de Macedo Freitas.
3.ª » —José Maria de Mello de Mattos, filho de Daniel Antonio de Mattos, natural do Porto.

Secção scientifica

FRAGMENTOS DE UM CURSO D'ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

II

(CALCULO DIFFERENCIAL)

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

I

Noção de limite, de continuidade, de infinitamente pequeno e de derivada

33. — A noção de *limite* é conhecida desde os Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é limite de uma quantidade variavel x quando os valores successivos da variavel se approximam cada vez mais da constante, de modo que a differença $A - x$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza assignavel, sem todavia se annullar. Por exemplo, viu-se que a circumferencia é o limite dos polygonos regulares inscriptos e circumscriptos.

Pode-se exprimir que A é limite de x de uma maneira mais explicita do modo seguinte:

Sejam x_1, x_2, x_3, etc. os valores successivos por que passa x. A será o limite de x, se a qualquer valor arbitrario de δ, por mais pequeno que seja, corresponder sempre um valor x_i de x tal que a desigualdade

$$A - x < \delta$$

seja satisfeita (em valor absoluto) por todos os valores x_{t+1}, x_{t+2}, etc. de x.

Os principios seguintes facilitam a indagação dos limites das funcções:

1.° — *O limite da somma de funcções que tendem ao mesmo tempo para limites determinados, é igual á somma dos limites das parcellas.*

Com effeito, sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funcções de x que tendem para limites determinados $f(a)$ e $F(b)$ à medida que x tende para a.

Haverá, por hypothese, um valor a_1 de x tal que a desigualdade (em valor absoluto)

$$F(x) - F(a) < \tfrac{1}{2}\delta$$

será satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre x_1 e a, por mais pequeno que seja δ.

Do mesmo modo haverá um valor x_2 de x tal que a desigualdade

$$f(x) - f(a) < \tfrac{1}{2}\delta$$

será satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre x_2 e a. Logo a desigualdade

$$F(x) - F(a) + f(x) - f(a) < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a e aquella das quantidades x_1 e x_2 que lhe fica mais proxima; e portanto a funcção $F(x) + f(x)$ tenderá para o limite $F(a) + f(a)$.

2.° — *O limite do producto de funcções é igual ao producto dos limites dos factores.*

Com effeito, sendo $F(x)$ e $f(x)$ os factores, temos a identidade

$$F(a) \,.\, f(a) - F(x) \,.\, f(x) = F(a)\,[f(a) - f(x)]$$
$$+ f(x)\,[F(a) - F(x)].$$

Mas, por ser $F(a)$ o limite de $F(x)$, ha sempre um valor x_1 de x tal que a desigualdade

$$F(a) - F(x) < \delta'$$

é satisfeita (em valor absoluto) por todos os valores de x comprehendidos entre x_1 e a, por mais pequeno que seja δ'. Chamando pois M o maior valor (absoluto) de $f(x)$ no intervallo considerado, vem

$$M[F(a) - F(x)] < M\delta',$$

e *à fortiori*

$$f(x)[F(a) - F(x)] < M\delta' = \tfrac{1}{2}\delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a e x_1, por mais pequeno que seja δ.

Do mesmo modo se vê que ha sempre um valor x_2 de x tal que a desigualdade

$$F(a)[f(a) - f(x)] < \tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre x_2 e a, por mais pequeno que seja δ.

Logo a desigualdade

$$F(a) f(a) - F(x) \,.\, f(x) < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a e aquella das quantidades x_1 e x_2 que está mais proxima de a; e portanto $F(a) \,.\, f(a)$ é o limite de $F(x) \,.\, f(x)$.

3.º — *O limite do quociente de duas funcções é igual ao quociente dos limites das mesmas funcções, se as funcções não são ao mesmo tempo nullas ou infinitas no limite.*

Com effeito, seja

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{f(x)},$$

e sejam $F(a)$ e $f(a)$ os limites para que tendem $F(x)$ e $f(x)$ quando x tende para a. Teremos

$$F(x) = \varphi(x) \,.\, f(x),$$

e portanto

$$F(a) = f(a) \,.\, \lim \varphi(x),$$

o que dá

$$\lim \varphi(x) = \frac{F(a)}{f(a)}.$$

4.º — O limite da raiz de qualquer funcção é igual á raiz do limite da mesma funcção.

Com effeito, a igualdade,

$$\varphi(x) = \sqrt[m]{F(x)}$$

dá

$$F(x) = [\varphi(x)]^m,$$

e portanto

$$F(a) = [\lim . \varphi(x)]^m$$

ou

$$\lim . \varphi(x) = \sqrt[m]{F(a)}.$$

34. — Chama-se *quantidade infinitamente pequena* (ou *infinitesimo*) *a quantidade variavel cujo limite é zero*. Por exemplo, a differença entre a circumferencia e os perimetros dos polygonos regulares inscriptos ou circumscriptos é infinitamente pequena, pois que o limite d'estes perimetros é a circumferencia.

Seja α uma quantidade infinitamente pequena e β uma quantidade ligada com α de tal modo que quando α tende para o limite zero, β tenda tambem para o limite zero. Diz-se que *β é infinitamente pequeno de ordem* n *relativamente a α quando $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende para um limite finito á medida que α tende para zero.*

Chamando A este limite, podemos escrever n'este caso

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \varepsilon,$$

onde a quantidade ε é infinitamente pequena ao mesmo tempo que α.

D'esta definição decorre immediatamente:

1.° — *Que se dois infinitamente pequenos* β *e* β' *forem respectivamente da ordem* n *e* n' *relativamente a* α, *o seu producto será da ordem* $n + n'$ *e o seu quociente da ordem* $n - n'$.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta = \alpha^n (A + \varepsilon), \ \beta' = \alpha^{n'} (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{n+n'}} = AB;$$

2.° — *Que se um infinitamente pequeno* β' *fôr da ordem* n' *relativamente a* β, *e este da ordem* n *relativamente a* α, *o primeiro será da ordem* $n \,.\, n'$ *relativamente a* α.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta' = \beta^{n'} (A + \varepsilon), \ \beta = \alpha^n (B + \varepsilon')$$

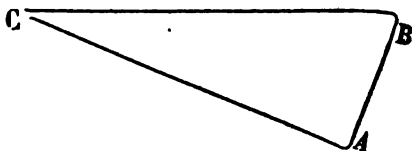
deduz-se

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha^{n \,.\, n'}} = AB^{n'}.$$

Consideremos alguns exemplos de infinitamente pequenos:

Exemplo 1.° — Quando um arco é infinitamente pequeno, o seu seno é um infinitamente pequeno da mesma ordem. Com effeito, sabe-se pela Trigonometria que $\frac{\text{sen } x}{x}$ tende para a unidade quando x tende para o limite zero.

Exemplo 2.° — No triangulo rectangulo a differença en-

tre a hypothenusa BC e o catheto AC é infinitamente pequena de segunda ordem relativamente ao catheto.

Com effeito, chamando α o angulo BCA, temos

$$CB - AC = CB(1 - \cos \alpha) = 2CB \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \alpha ,$$

e portanto

$$\lim \frac{CB - AC}{\alpha^2} = \lim \frac{2CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2} CB ,$$

visto que é

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\frac{1}{2} \alpha} = 1 .$$

35. — Na *Introducção* definiu-se (n.º 22) a *continuidade* das funcções. A respeito da noção de continuidade observaremos aqui que, empregando a linguagem infinitesimal, se póde dizer que f (x) *é uma funcção continua de* x *no ponto* x = a *quando a differença* f (a + h) — f (a) *é infinitamente pequena ao mesmo tempo que* h.

36. — Consideremos a funcção $f(x)$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tende para um limite determinado $f'(x)$, independente de h, á medida que h tende para zero. A esta nova funcção $f'(x)$ que assim se obtém, dá-se o nome de *derivada* da funcção $f(x)$.

E' facil de vêr que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção inteira, esta definição coincide com a definição dada na *Introducção* (n.º 26 — III).

Com effeito, a formula de Taylor dá

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(x),$$

e portanto

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) .$$

Da definição de derivada deduz-se immediatamente o seguinte principio:

Toda a funcção que tem derivada, é continua nos pontos em que a derivada se não torna infinita ou indeterminada.

Com effeito, da igualdade

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

deduz-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon ,$$

representando por ε uma quantidade infinitamente pequena com h.

Temos pois a igualdade

$$f(x+h)-f(x) = h(f'(x)+\varepsilon) ,$$

a qual mostra que a differença $f(x+h)-f(x)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h quando a funcção $f'(x)$ é finita.

Por muito tempo se julgou que a proposição inversa da precedente era verdadeira, isto é, que toda a funcção continua tinha derivada. Modernamente porém o snr. Weierstrass, professor na Universidade de Berlim, mostrou que todas as demonstrações que se davam d'esta proposição eram viciosas, e deu muitos exemplos de funcções continuas que não téem derivada. (*) As funcções estudadas na *Introducção*, isto é, as funcções compostas de funcções de x algebricas, exponenciaes, logarithmicas e circulares téem sempre derivada. Veremos isto adiante, assim como veremos apparecer um numero infinito de outras funcções nas mesmas circumstancias.

37. — Considerámos nos paragraphos anteriores a derivada como limite da razão $\frac{k}{h}$ (pondo $f(x+h)-f(x)=k$) de dois infinitamente pequenos. D'este modo sobre k e h não se podem executar as operações da Algebra. Introduzindo a

(*) Vid *Darboux*. — Mémoire sur les fonctions discontinues (Annalé Scientifiques de l'École Normale, 1875).

noção de *differencial* póde exprimir-se a derivada pela razão de dois infinitamente pequenos, como vamos vêr.

Temos

$$f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon),$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h. A differença $f(x+h) - f(x)$ compõe-se pois de duas parcellas infinitamente pequenas, uma de primeira ordem e a outra de ordem superior á primeira. A primeira parcella dá-se o nome de *differencial de* $f(x)$ e representa-se por $df(x)$ ou por dy (pondo $y = f(x)$). Para conformidade de notação representa-se o infinitamente pequeno arbitrario h pela notação dx. Temos pois

$$dy = f'(x)\, dx,$$

onde dx *é o augmento arbitrario da variavel independente* x, dy *é a parte de primeira ordem do augmento correspondente da funcção* f (x). *A derivada* f' (x) *é o quociente de* dy *por* dx.

Assim dy e dx são verdadeiras quantidades sobre as quaes se podem executar todas as operações da Algebra.

88.—Em todo este livro empregaremos para representar as derivadas umas vezes a notação y' ou $f'(x)$ (notação de Lagrange), outras vezes a notação $\frac{dy}{dx}$ (notação de Leibnitz).

Esta ultima notação é principalmente util quando y é funcção de muitas variaveis independentes. Assim, se fôr $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, a derivada de y relativamente a x_1, quando as outras variaveis são consideradas como constantes, que se chama *derivada parcial* de y relativamente a x_1, será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_1}$; do mesmo modo a *derivada parcial* de y relativamente a x_2 será representada por $\frac{\partial y}{\partial x_2}$; etc. As differenciaes ∂y que entram n'estas derivadas parciaes são differentes umas das outras e é o denominador que indica o que cada uma representa. Portanto sobre as differenciaes que entram nas derivadas parciaes, não se podem executar operações que as separem dos denominadores. E' para não esquecer esta circumstancia que em logar da caracteristica d se emprega a caracteristica ∂.

A funcção $f'(x)$ póde ter tambem uma derivada que se representa por $f''(x)$, etc. Estas derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. téem respectivamente os nomes de derivadas de *segunda ordem*, de *terceira ordem*, etc. Podem tambem ser representadas pelas notações $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. por motivos que adiante veremos.

No caso de muitas variaveis independentes representa-se por

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\partial x_1^a \, \partial x_2^b \, \partial x_3^c \ldots}$$

a derivada de ordem n que se obtém derivando primeiro a vezes a funcção relativamente a x_1, considerando as outras variaveis como constantes; depois derivando o resultado obtido b vezes relativamente a x_2, considerando as outras variaveis como constantes; e assim successivamente.

39. — Foi por considerações geometricas que se chegou á noção importante de derivada. Vamos pois entrar por um pouco no campo da Geometria para poder vêr a origem d'esta noção e appreciar assim a sua importancia.

II

Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal

40. — *Principio dos limites.* — *Se as quantidades variaveis* x, y, z, *etc. tenderem para os limites* a, b, c, *etc.; se a funcção* f (x, y, z, ...) *tender para o limite* f (a, b, c, ...); *e se fôr constantemente:*

$$(1) \ldots\ldots \quad f(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots),$$

a funcção F (x, y, z, ...) *tambem tenderá para um limite igual a* f (a, b, c, ...).

Este principio é uma consequencia immediata da definição de limite. Com effeito, quando as variaveis x, y, z, etc.

se approximam de a, b, c, etc., passarão por um valor x_1, y_1, z_1, etc. tal que a desigualdade

$$f(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots) < \delta$$

será satisfeita (qualquer que seja δ) por todos os valores de x, y, z, etc. inferiores em valor absoluto a x_1, y_1, z_1, etc. Logo a desigualdade

$$F(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots) < \delta$$

tambem será satisfeita pelos valores de x, y, z, etc. inferiores em valor absoluto a x_1, y_1, z_1, etc.; e portanto $F(x, y, z, \ldots)$ terá um limite igual a $f(a, b, c, \ldots)$.

Se fôr pois $F(a, b, c, \ldots)$ este limite, teremos

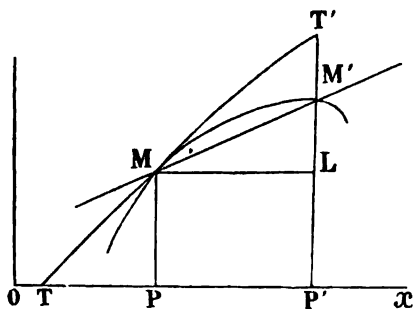
$$(2) \ldots\ldots \quad F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots).$$

11. — Em virtude do principio precedente, se se quizer resolver uma questão relativa a curvas ou superficies que se traduza pela equação (2), e se se não conhecer meio de achar directamente a solução, póde-se formar primeiramente a equação (1) relativa a polygonos ou polyedros e substituir depois x, y, z, etc. por a, b, c. etc., se x, y, z, etc. tenderem para os limites a, b, c, etc. quando os polygonos ou polyedros tenderem para as curvas ou superficies. E' n'isto que consiste o *methodo dos limites*, de que se fez já muito uso na Geometria elementar para se resolverem algumas questões relativas ao circulo, ao cylindro, ao cóne e á esphera, e de que vamos aqui fazer duas applicações importantes para o nosso fim.

I — Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dois pontos, e supponhamos que o segundo ponto M' se approxima indefinidamente do primeiro M. A recta vae gyrando em roda do primeiro ponto, e, se o seu coefficiente angular tender para um limite determinado, MM' tenderá tambem para uma posição determinada correspondente MT. A esta linha MT chama-se *tangente* á curva no ponto M, que é portanto *o limite para que tende a secante MM' quando M' se approxima indefinidamente de M.*

Se forem $y = f(x)$ a equação da curva, (x, y) e $(x + h, y + h)$ as coordenadas dos pontos M e M', θ a inclinação $T'ML$ da tangente sobre o eixo das abscissas, e α a inclinação $T'MM'$ da tangente sobre a corda, a resolução do triangulo rectangulo LMM' dará a igualdade

$$\text{tang}\,(\theta - \alpha) = \frac{M'L}{ML} = \frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abscissas, substituindo $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pelo seu valor tirado da equação da curva.

Mas á medida que o ponto M' se approxima de M, h e α tendem para o limite zero, logo, segundo o theorema precedente, teremos a igualdade

$$\text{tang}\,\theta = \lim \frac{k}{h} = \lim . \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

por meio do qual se determina a direcção θ da tangente substituindo lim . $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (quando exista) pelo seu valor tirado da equação da curva. Este *methodo de tangentes* é devido a Fermat.

No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x + h$ e y em $y + k$,

$$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$

ou

$$2xh + h^2 + 2ky + k^2 = 0,$$

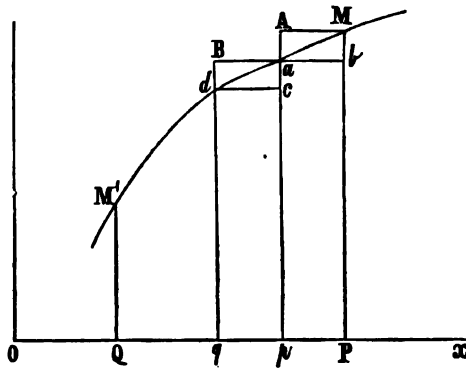
que dá

$$\frac{k}{h} = -\frac{2x+h}{2y+k},$$

e portanto

$$\text{tang}\,\theta = \lim \frac{k}{h} = -\frac{x}{y}.$$

Temos assim o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y).

II — A área $MM'QP$, que chamaremos S, comprehendida

entre uma curva continua $y = f(x)$, o eixo das abscissas e duas ordenadas MP e $M'Q$, correspondentes ás abscissas x e x_0 póde ser decomposta n'outras por meio de linhas equidistantes parallelas ao eixo das ordenadas. Tirando depois parallelas ao eixo das abscissas que passem pelos pontos M, a, d, etc. formam-se os rectangulos $AMPp$, $aBqp$, etc., cujas áreas são iguaes a $hf(x)$, $hf(x-h)$, $hf(x-2h)$, etc. sendo h a distancia pq das ordenadas. Chamando pois ε a differença entre a área S e a somma das áreas dos rectangulos precedentes, teremos a igualdade

$$S + \varepsilon = hf(x) + hf(x-h) + hf(x-2h) + \ldots \\ + hf(-x(n-1)h),$$

suppondo que o numero dos rectangulos é n.

Por outra parte ε é a somma das áreas dos triangulos curvilineos MAa, aBd, etc., e esta somma é menor do que a somma das áreas dos rectangulos $MAab$, $Bacd$, etc., o que dá

$$\varepsilon < h(k_1 + k_2 + \ldots),$$

chamando k_1, k_2, etc. as alturas Mb, ac, etc. dos rectangulos. Chamando pois k a maior d'estas alturas, e notando que é $nh = x - x_0$, vem

$$\varepsilon < nhk, \text{ ou } \varepsilon < k(x - x_0).$$

Vê-se pois que ε e k, e portanto ε e h tendem ao mesmo tempo para o limite zero, e será portanto

$$S = \lim \left[hf(x) + hf(x-h) + hf(x-2h) + \ldots + hf(x-(n-1)h)\right],$$

onde se deve eliminar n ou h pela relação $nh = x - x_0$ para depois se fazer $\lim h = 0$, ou $\lim n = \infty$. Por meio d'esta formula determina-se pois a área S substituindo o segundo membro pelo seu valor obtido por meio da equação da curva.

Por exemplo, se a linha MM' é uma recta $y = ax$ que passa pela origem das coordenadas, e se queremos achar a área comprehendida entre a origem e a ordenada correspondente á abscissa x, teremos $x = nh$, e portanto

$$S = \lim ah^2 [n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1]$$

$$= \lim \frac{n(n+1)ah^2}{2} = \lim \left[\frac{ax^2}{2} + \frac{ax^2}{2n}\right] = \frac{ax^2}{2}.$$

Do mesmo modo no caso da parabola $y = ax^2$ vem

$$S = \lim ah^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

mas, em virtude de um theorema da Algebra (*), temos

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

(*) Este theorema será adiante demonstrado.

e portanto, pondo $n = \frac{x}{h}$, vem o resultado, devido a Archimedes:

$$S = \lim a\left(\frac{x^3}{3} + \frac{hx^2}{2} + \frac{h^2x}{6}\right) = \frac{ax^3}{3}.$$

Se a equação da curva fosse $y = ax^m$, sendo m inteiro e positivo, achar-se-hia do mesmo modo

$$S = \frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

resultado devido a Wallis.

12. — O methodo dos limites simplifica-se consideravelmente por meio dos principios seguintes:

1.° — *Se se quizer achar o limite da razão* $\frac{\alpha'}{\alpha}$ *de duas quantidades infinitamente pequenas* α' *e* α, *e se os infinitamente pequenos* β' *e* β *estiverem ligados com* α' *e* α *de modo que seja*

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \ \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

podemos substituir α' *por* β' *e* α *por* β, *e temos:*

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

Com effeito, temos por hypothese

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \ \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon,$$

onde ε' e ε são quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α' e α. Logo será

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'(1+\varepsilon')}{\beta(1+\varepsilon)},$$

e portanto

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

2.° — *Se se quizer achar o limite da somma das quantidades infinitamente pequenas positivas* α, α', α'', ... $\alpha^{(n)}$, *e se as quantidades infinitamente pequenas* β, β', β'', ... $\beta^{(n)}$ *estiverem ligados com* α, α', α'', *etc., de modo que seja*

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1, \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \lim \frac{\alpha''}{\beta''} = 1, \text{etc.},$$

podemos substituir α *por* β, α' *por* β', *etc. e temos:*

$$\lim (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}) = \lim (\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}).$$

Com effeito, temos

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \frac{\beta'}{\alpha'} = 1 + \varepsilon', \ldots \frac{\beta^{(n)}}{\alpha^{(n)}} = 1 + \varepsilon^{(n)},$$

e portanto

$$\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)} = \alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)} + \alpha . \varepsilon + \alpha' . \varepsilon' + \ldots + \alpha^{(n)} \varepsilon^{(n)}.$$

Mas, suppondo que ε é aquelle dos infinitamente pequenos ε, ε', ε'', etc. que tem maior valor, teremos evidentemente a desigualdade:

$$\alpha . \varepsilon + \alpha' . \varepsilon' + \ldots + \alpha^{(n)} . \varepsilon^{(n)} < \varepsilon (\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)}),$$

que, por ter $\alpha + \alpha' + \ldots$ um limite determinado, dá

$$\lim (\alpha . \varepsilon + \alpha' . \varepsilon' + \ldots) = 0.$$

Logo, será

$$\lim (\alpha + \alpha' + \ldots) = \lim (\beta + \beta' + \ldots).$$

Só mais tarde se poderá apreciar a importancia d'estes dois principios. O primeiro tem applicação nas questões da

natureza da questão I do paragrapho precedente, em que uma quantidade é determinada pelo limite da razão de dois infinitamente pequenos. O segundo tem applicação nas questões da natureza da questão II do mesmo paragrapho, em que uma quantidade é determinada pelo limite de uma somma de infinitamente pequenos. Em virtude d'estes principios podemos substituir os infinitamente pequenos que entrem n'uma questão por outros que a simplifiquem.

E' no methodo dos limites simplificado pelos dois principios precedentes que consiste o *methodo infenitesimal.* (*)

43. — Para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão I do n.º 41 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes ás curvas *á resolução do problema de calculo que tem por fim achar as derivadas das funcções.*

Este problema é o objecto do *Calculo Differencial.*

Em segundo logar, para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza da questão II do n.º 41 é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite da somma

$$S = hf(x) + hf(x-h) + hf(x-2h) + \ldots + hf(x-(n-1)h),$$

onde é $x - x_0 = nh$, x uma variavel e x_0 uma constante arbitraria; ou, eliminando n e junctando o termo infinitamente pequeno $hf(x_0)$ que não altera o limite procurado,

$$S = hf(x_0) + hf(x_0+h) + hf(x_0+2h) + \ldots + \\ + hf(x-h) + hf(x).$$

Somos assim levados a outro problema da Analyse: *determinar a funcção que é o limite da somma precedente.*

(*) Os dois principios do methodo infinitesimal que vimos de demonstrar são casos particulares de um principio mais geral applicavel em outras questões. Para passar da equação (1) para a equação (2) em logar de fazer as quantidades $a - x$, $b - y$, etc. nullas no resultado podemos fazel-as nullas durante o caminho seguido para chegar á equação (1), se no calculo apparecem os binomios $A + B(a - x)$, $A' + B'(b - y)$, etc., onde A, B, A', B', etc. representam quantidades finitas, e na equação (2) apparecem as quantidades A, A', etc. Veja-se a este respeito a minha nota — *Sur les principes du Calcul infinitésimal* — publicada nas *Memorias da Sociedade de Sciencias Physicas de Bordeaux* (2.ª série, tomo IV).

A respeito d'este problema faremos as observações seguintes:

1.ª — Que, se a funcção $f(x)$ representa a ordenada de uma curva continua no intervallo de x_0 a x, e é positiva e sempre crescente, ou sempre decrescente n'este intervallo, a somma precedente tem um limite finito e determinado qualquer que seja h; visto que então este limite representa (n.º 41 — II) uma área finita e determinada. Porém este limite existe em muitos outros casos, como veremos.

2.ª — Que este problema é o reciproco do anterior.

Com effeito, mudemos x em $x+l$ e chamemos k o augmento correspondente de $\lim . S$. Como $\lim . S$ representa uma área comprehendida entre as ordenadas $f(x_0)$ e $f(x)$, a curva $y=f(x)$ e o eixo das abscissas, o augmento k representará uma área comprehendida entre as ordenadas $f(x)$ e $f(x+l)$, a curva e os eixos das abscissas; e portanto decompondo-a em m áreas parciaes por meio de parallelas ao eixo das ordenadas distantes entre si da quantidade h', teremos

$$k=\lim\,[h'f(x+h')+h'f(x+2h')+\ldots+h'f(x+l)]\,,$$

onde é $mh'=l$.

Suppondo a funcção $f(x)$ continua no intervallo comprehendido entre x e $x+l$, podemos dar a l um valôr tão pequeno que no intervallo considerado cada termo da somma k fique comprehendido entre $h\,(f(x)+\alpha)$ e $h\,(f(x)-\alpha)$, por mais pequeno que seja α. Logo a somma k ficará comprehendida entre $mh'\,(f(x)+\alpha)$ e $mh'\,(f(x)-\alpha)$, e portanto $\frac{k}{l}$ ficará entre $f(x)+\alpha$ e $f(x)-\alpha$ o que dá

$$\lim \frac{k}{l}=f(x)\,;$$

portanto a funcção dada $f(x)$ é a derivada da funcção $\lim S$.

Somos pois levados assim á *resolução do problema de calculo que tem por fim achar as funcções quando se conhecem as suas respectivas derivadas*. Este problema é o objecto do *Calculo integral*.

44. — Tambem se podia ser levado ao *Calculo integral* pela questão inversa da das tangentes. Vamos ainda aqui tractar d'esta questão para se ir vendo desde já a sua importancia.

Se se quizer procurar a curva cuja tangente faça com o eixo das abscissas um angulo, cuja tangente trigonometrica seja igual a uma funcção $F(x)$ dada, é necessario procurar a equação $y = f(x)$ que satisfaz á condição

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x).$$

Por exemplo, se é

$$F(x) = mx^{m-1},$$

sendo m inteiro e positivo, satisfazem ao problema as curvas cuja equação é

$$y = x^m + a,$$

onde a é uma constante arbitraria; pois que esta equação dá

$$y + k = (x+h)^m + a = a + x^m + mhx^{m-1} + \ldots,$$

e portanto

$$\lim \frac{k}{h} = mx^{m-1}.$$

Póde mesmo mais geralmente procurar-se qual é a curva cuja tangente trigonometrica é igual a uma funcção dada $F(x, y)$ das coordenadas do ponto de contacto, e então é necessario procurar a funcção implicita $f(x, y) = 0$, que, pela mudança de x em $x + h$ e y em $y + k$, dá

$$\lim \frac{k}{h} = F(x, y).$$

Se é, por exemplo,

$$F(x, y) = -\frac{x}{y},$$

vem

$$\lim \frac{k}{h} = -\frac{x}{y},$$

e é necessario procurar a equação $f(x, y)=0$ que, pela mudança de x em $x+h$ e y em $y+k$, dá para limite de $\frac{k}{h}$ o valor precedente. A esta condição satisfazem (n.º 41 — I) todas as circumferencias com o centro na origem das coordenadas.

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I

Theoremas geraes

45. — **I** — Seja y uma funcção de x definida pela igualdade

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x),$$

e procuremos a derivada d'esta funcção relativamente a x.

Mudando x em $x + h$, e chamando k, l_1, l_2, ... l_n os augmentos correspondentes de y, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc, teremos

$$k = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

d'onde se deduz

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{l_1}{h} + \lim \frac{l_2}{h} + \ldots$$

ou

$$y' = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x) + \ldots + \varphi'_n(x).$$

Logo *a derivada de uma somma algebrica de funcções é igual á somma das derivadas das parcellas.*

II — Procuremos a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

de duas funcções dadas.

Mudando x em $x + h$ e chamando k, l_1, l_2 os augmentos de y, φ_1, (x), $\varphi_2(x)$, vem

$$y + k = \varphi_1(x + h) \cdot \varphi_2(x + h) = [\varphi_1(x) + l_1][\varphi_2(x) + l_2].$$

Teremos pois

$$k = l_1 \varphi_2(x) + l_2 \varphi_1(x) + l_1 \cdot l_2,$$

e portanto

$$\lim \frac{k}{h} = \varphi_2(x) \lim \frac{l_1}{h} + \varphi_1(x) \lim \frac{l_2}{h},$$

ou

$$y' = \varphi_1(x) \varphi'_2(x) + \varphi'_1(x) \varphi_2(x).$$

Do mesmo modo se vê que a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)$$

é dada pela formula

$$y' = \varphi'_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) + \varphi_1(x) \cdot \varphi'_2(x) \ldots \varphi_n(x)$$
$$+ \ldots + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi'_n(x);$$

e portanto *a derivada de um producto de funcções é igual á somma dos productos que se obtêem multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

III — A derivada do quociente de duas funcções:

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

obtem-se do modo seguinte:

Temos

$$\varphi_1(x) = y \cdot \varphi_2(x),$$

e portanto, em virtude do theorema precedente,

$$\varphi'_1(x) = y' \varphi_2(x) + y \varphi'_2(x),$$

o que dá

$$y' = \frac{\varphi'_1(x) - y\,\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\varphi'_1(x) \cdot \varphi_2(x) - \varphi_1(x)\,\varphi'_2(x)}{[\varphi_2(x)]^2}.$$

Logo *a derivada de um quociente é igual ao quociente da differença entre os productos da derivada do numerador pelo denominador e da derivada do denominador pelo numerador dividida pelo quadrado do denominador.*

IV — Seja y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x. Chamando l e k os augmentos de u e de y correspondentes ao augmento h de x, teremos a identidade

$$\frac{k}{h} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{h},$$

que dá

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{k}{l} \cdot \lim \frac{l}{h}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Temos pois o theorema seguinte:

Se y *é funcção de* u *e* u *é funcção de* x, *a derivada de* y *relativamente a* x *é igual ao producto da derivada de* y *relativamente a* u *pela derivada de* u *relativamente a* x.

V — Seja agora y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$y = f(u_1, u_2),\ u_1 = \varphi_1(x),\ u_2 = \varphi_2(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x. Chamando l_1 e l_2 os augmentos infinitamente pequenos de u_1 e u_2 correspondentes ao augmento infinitamente pequeno h de x, temos (n.º 37), considerando u_2 como constante,

$$f(u_1 + l_1, u_2) = f(u_1, u_2) + \frac{\partial y}{\partial u_1} l_1 + \alpha \cdot l_1;$$

e considerando u_1 como constante

$$f(u_1, u_2 + l_2) = f(u_1, u_2) + \frac{\partial y}{\partial u_2} l_2 + \alpha_1 \cdot l_2,$$

onde α e α_1 são quantidades infinitamente pequenas com l_1 e l_2.

Suppondo a derivada $\frac{\partial y}{\partial u_1}$ uma funcção continua de u_2, temos

$$\frac{\partial f(u_1, u_2 + l_2)}{\partial u_1} = \frac{\partial y}{\partial u_1} + \alpha_2,$$

onde α_2 é infinitamente pequeno com l_2.

Mudando na primeira das tres formulas precedentes u_2 em $u_2 + l_2$ e attendendo ás duas ultimas, vem

$$(a)\begin{cases} f(u_1 + l_1, u_2 + l_2) = f(u_1, u_2) + \dfrac{\partial y}{\partial u_1} \cdot l_1 + \\ + \dfrac{\partial y}{\partial u_2} \cdot l_2 + \alpha' \cdot l_1 + \alpha_1 l_2 + \alpha_2 \cdot l_1, \end{cases}$$

chamando α' o infinitamente pequeno em que se muda α quando se muda u_2 em $u_2 + l_2$.

Temos pois

$$\lim . \frac{f(u_1 + l_1, u_2 + l_2) - f(u_1, u_2)}{h} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \lim . \frac{l_1}{h} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \lim \frac{l_2}{h},$$

ou, notando que *lim* . $\frac{l_1}{h}$ e *lim* . $\frac{l_2}{h}$ representam as derivadas de u_1 e de u_2 relativamente a x,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} .$$

Do mesmo modo, no caso de ser

$$y = f(u_1, u_2, u_3 \ldots), \; u_1 = \varphi_1(x), \; u_2 = \varphi_2(x), \text{ etc.},$$

achar-se-hia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u_3} \cdot \frac{du_3}{dx} + \ldots$$

Temos pois o theorema seguinte:

A derivada de uma funcção composta de outras funcções é igual á somma das derivadas que se obtêem considerando successivamente cada uma d'estas ultimas funcções como unica.

Os theoremas I e II são casos particulares d'este.

Nota.—Devemos observar que o raciocinio empregado para demonstrar a formula (a) subsiste quando u_1, u_2, u_3, etc., em logar de serem funcções de x, são variaveis independentes. N'este caso, vem pois tambem

$$f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \ldots) - f(u_1, u_2, \ldots)$$

$$= l_1 \frac{\partial y}{\partial u} + l_2 \frac{\partial y}{\partial u_2} + \ldots + \alpha\, l_1 + \alpha_1\, l_2 + \ldots,$$

onde α, α_1, etc. são quantidades infinitamente pequenas com l_1, l_2, etc.

VI—Se resolvermos relativamente a x a equação $y=f(x)$, vem uma equação da fórma $x = \varphi(y)$, e á funcção $\varphi(y)$ chama-se *funcção inversa* de $f(x)$.

Chamando k o augmento de y correspondente ao augmento h de x, vem

$$x + h = \varphi(y) + k(\varphi'(y) + \alpha),$$

onde α é infinitamente pequeno como k. Temos pois

$$1 = \frac{k}{h} (\varphi'(y) + \alpha),$$

e portanto

$$f'(x) = \lim. \frac{k}{h} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))}.$$

Logo *a derivada de uma funcção é igual á unidade dividida pela derivada da sua funcção inversa*

II

Derivadas das funcções algebricas, logarithmicas e circulares

46. — Vamos agora procurar as derivadas das funcções estudadas na Algebra e Trigonometria, isto é, as derivadas das funcções compostas de funcções de x algebricas, logarithmicas e circulares.

Todas estas funcções são constituidas por *funcções simples*, chamando funcções simples aquellas em que a variavel entra affectada de um só dos signaes usados para indicar as combinações analyticas. Por meio dos theoremas IV e V do n.° 45 pode-se formar a derivada de qualquer funcção quando se conhecem as derivadas das funcções simples, e vamos porisso procurar estas derivadas.

As funcções simples são as seguintes:

$a \pm x$, ax, x^m, e^x, $\log x$, $\text{sen}\, x$, $\cos x$, $\text{tang}\, x$, $\cot x$,

$\sec x$, $\text{cosec}\, x$, $\text{arc}\,(\text{sen} = x)$, $\text{arc}\,(\cos = x)$, $\text{arc}\,(\text{tang} = x)$,

$\text{arc}\,(\cot = x)$, $\text{arc}\,(\sec = x)$, $\text{arc}\,(\text{cosec} = x)$.

Nem todas estas funcções são independentes, e bastaria portanto procurar as derivadas das cinco funcções

$$a + x,\ ax,\ x^m,\ e^x,\ \text{sen}\ x,$$

de que as outras dependem. Em todo o caso serão aqui todas consideradas para termos regras que permittam escrever immediatamente as suas derivadas, visto a frequencia com que apparecem na Analyse.

1) A derivada da funcção $y = a \pm x$ é evidentemente

$$y' = \pm 1 .$$

2) A derivada de $y = ax$ é

$$y' = a .$$

3) A funcção $y = e^x$, onde e representa o numero definido no n.º 19, dá

$$y' = \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim . \frac{e^h - 1}{h} .$$

Mas, como e^h tende para o limite 1 quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n} ,$$

onde n representa uma quantidade que augmenta indefinidamente quando h decresce; o que dá

$$h = \log . \left(1 + \frac{1}{n}\right) ,$$

representando, como faremos sempre, por *log* . os logarithmos neperianos.

Virá pois

$$y' = e^x \lim \frac{1}{n \log . \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^x}{\lim \log . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} ,$$

e por consequencia (n.º 19)

$$y' = e^x .$$

Nota. — Se fôr $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 45—IV)

$$y' = e^u \cdot u',$$

o que dá a regra seguinte:

A derivada da exponencial de base e *é igual ao producto da mesma exponencial pela derivada do expoente.*

Se fôr $y = a^u$ teremos (n.º 31 — VI)

$$y = e^{u \cdot \log . a},$$

e portanto

$$y' = a_u \cdot u' \log . a .$$

4) A funcção logarithmica $y = \log x$ dá $x = e^y$, e portanto (n.º 45 — VI)

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} .$$

Nota. — Se fôr $y = \log . u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.º 45 — IV)

$$y' = \frac{u'}{u} .$$

Logo *a derivada do logarithmo neperiano de uma funcção é igual á derivada da funcção dividida pela funcção.*

Se fôr a a base dos logarithmos teremos (n.º 31 — VI)

$$y = \log_a . u = \frac{\log . u}{\log . a}, \; y' = \frac{u'}{u \log . a} .$$

5) No caso da funcção

$$y = x^m$$

temos, qualquer que seja m,

$$\log . y = m \log . x,$$

e portanto

$$y = e^{m \log . x},$$

o que dá

$$y' = e^{m \log . x} . \frac{m}{x} = \frac{my}{x} = mx^{m-1}.$$

Nota. — Se fôr $y = u^m$, e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = mu^{m-1} . u' .$$

Logo *a derivada da potencia* m *de uma funcção forma-se multiplicando o expoente pela potencia immediatamente inferior da funcção e pela derivada da funcção.*

A regra precedente abrange as raizes das funcções, que se podem representar por potencias com expoentes fraccionarios.

6) A funcção $y = \text{sen } x$ dá

$$y' = \lim \frac{\text{sen } (x + h) - \text{sen } x}{h} = \lim \frac{2 \text{ sen } \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \cos x . \lim \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

e portanto

$$y' = \cos x$$

7) Por ser $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, a derivada da funcção $y = \cos x$ será

$$y' = - \text{sen } x .$$

8) A derivada de $y = \text{tang } x$ obtem-se derivando a funcção $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$, o que dá

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \text{secant}^2 x .$$

Do mesmo modo se acha as derivadas de cot x, de sec x e de cosec x:

9) $y = \cot x$, $y' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cosec}^2 x$,

10) $y = \sec x$, $y' = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x} = \text{tang}\ x \sec x$,

11) $y = \text{cosec}\ x$, $y' = -\cot x\ \text{cosec}\ x$.

12) A derivada da funcção inversa

$$y = \text{arc}\ (\text{sen} = x)$$

obtem-se por meio do theorema VI do n.° 45, que dá

$$y' = \frac{1}{\text{sen}\ y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do mesmo modo se acha as derivadas de *arc* (*cos* $= x$), de *arc* (*tang* $= x$), etc.:

13) $y = \text{arc}\ (\cos = x)$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

14) $y = \text{arc}\ (\text{tang} = x)$, $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

15) $y = \text{arc}\ (\cot = x)$, $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

16) $y = \text{arc}\ (\sec = x)$, $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

17) $y = \text{arc}\ (\text{cosec} = x)$, $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

III

Funcções implicitas

47. — Consideremos agora as *funcções implicitas*, isto é, procuremos a derivada relativamente a x de uma funcção y determinada pela equação

$$F(x, y) = 0 .$$

Mudando x em $x + h$ e y em $y + k$, vem (n.º 45 — V — *nota*)

$$F(x + h, y + k) = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k + \alpha h + \alpha_1 k = 0,$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{k}{h} + \alpha + \alpha_1 \frac{k}{h} = 0,$$

onde α e α_1 são infinitamente pequenos com h e k.

Vem pois

$$y' = \lim \frac{k}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} .$$

Temos assim a derivada y' expressa em funcção de x e y. Se quizermos esta derivada só expressa em funcção d'uma variavel, elimanaremos a outra por meio da equação proposta.

Escrevendo a igualdade precedente debaixo da fórma

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$$

vê-se que o primeiro membro é a derivada de $F(x, y)$ consi-

derada como funcção composta de x e de uma funcção y de x (n.° 45).

Derivando pela mesma regra a equação precedente que é da fórma

$$F_1(x, y, y') = 0 ,$$

vem a equação

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \cdot y'' = 0$$

que dá y''.

Continuando do mesmo modo obtéem as equações que dão y''', $y^{(4)}$, etc.

As equações que se obtem derivando successivamente uma equação dada são do primeiro gráo relativamente a y', y'', y''', etc. Porém este gráo póde elevar-se já por se fazer desapparecer radicaes que lá entrem, já por se eliminar entre ellas algumas quantidades.

Exemplo.—A equação da ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dá

$$a^2 yy' + b^2 x = 0 ,$$

e portanto

$$y' = -\frac{bx}{a^2 y} .$$

Se quizermos exprimir a derivada só em funcção de x teremos de eliminar y, o que dá

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Se quizermos fazer desapparecer o radical, teremos de elevar ao quadrado, o que dá

$$a^2 (a^2 - x^2) y'^2 = b^2 x^2 .$$

48. — Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas, isto é, toda a equação da fórma

$$f(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

tem o nome de *equação differencial d'ordem n*.

O estudo d'estas equações será feito no *Calculo integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que a funcção

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots c_n) = 0,$$

que contém n constantes arbitrarias c_1, c_2, etc., leva a uma equação differencial d'ordem n independente d'estas constantes.

Com effeito, derivando n vezes esta equação obteremos n equações da fórma

$$F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots) = 0$$

$$F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \dots) = 0$$

. . . .

$$F_n(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}, c_1, c_2, \dots) = 0,$$

entre as quaes e a proposta se podem eliminar as n constantes arbitrarias. Chega-se assim a uma equação da fórma

$$f(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$$

independente das arbitrarias.

Em Geometria esta equação representa uma propriedade commum a todas as curvas representadas pela equação proposta.

Exemplo. — A equação do circulo $x^2 + y^2 = R^2$ dá

$$x + yy' = 0,$$

ou

$$1 + \frac{y}{x} \cdot y' = 0.$$

Como y' é o coefficiente angular da tangente no ponto (x, y) e $\frac{y}{x}$ é o coefficiente angular do raio que passa por este ponto, esta equação exprime que a tangente é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto.

IV

Relações entre as funcções e suas derivadas

19. — Para mostrar desde já a importancia na Analyse da noção de derivada vamos demonstrar as proposições importantes seguintes:

Theorema I. — Se a derivada $f'(x)$ *d'uma funcção* $f(x)$ *se conservar finita quando* x *cresce desde* $x = x_0$ *até* $x = X$, *a funcção crescerá em quanto a derivada fôr positiva e decrescerá em quanto a derivada fôr negativa.*

E' o que se deduz da igualdade

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h\,(f'(x) + \alpha).$$

Com effeito, por ser α infinitamente pequeno com h, póde sempre dar-se a h um valor tal que a somma $f'(x) + \alpha$ tenha o signal de $f'(x)$. Logo se $f'(x)$ é positivo, teremos, dando a h um valor sufficientemente pequeno,

$$f(x + h) > f(x),\ f(x - h) < f(x),$$

e portanto a funcção $f(x)$ crescerá quando x augmenta.

Se porém $f'(x)$ é negativo, teremos

$$f(x + h) < f(x),\ f(x - h) > f(x),$$

e portanto a funcção $f(x)$ decrescerá quando x augmenta.

Theorema II. — Se a funcção $f(x)$ *tiver uma derivada determinada e finita* $f'(x)$ *em todo o intervallo comprehendido entre* x_0 *e* X, *e se fôr* $f(x_0) = 0$ *e* $f(X) = 0$, *haverá*

sempre um valor de x *comprehendido n'este intervallo que annullará* $f'(x)$.

Esta proposição, conhecida pelo nome de *theorema de Rolle*, demonstra-se do modo seguinte:

Por ser a funcção $f(x)$ continua no intervallo (x_0, X) e nulla nos extremos d'este intervallo, ou será constantemente nulla n'este intervallo, ou augmentará (em valor absoluto) até um valor correspondente a $x = x_1$ para depois diminuir. Em virtude do theorema precedente, no primeiro caso, será constantemente $f'(x) = 0$; no segundo caso, no intervallo de $x_1 - h$ a $x_1 + h$ a funcção não será nem sempre crescente nem sempre decrescente, logo a derivada $f'(x_1)$ não será nem positiva nem negativa, e será portanto nulla.

Theorema III. — Se a funcção $f(x)$ *tiver uma derivada finita e determinada para todos os valores de* x *comprehendidos no intervallo de* x_0 *a* X, *será*

$$f(X) = f(x_0) + (X - x_0) f'(x_1),$$

x_1 *representando um valor comprehendido entre* x_0 *e* X.

Com effeito, applicando o theorema precedente á funcção

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{X - x_0}[f(X) - f(x_0)],$$

que se annulla quando se faz $x = x_0$, e quando se faz $x = X$, temos

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = 0,$$

que dá a formula enunciada.

Por estar x_1 comprehendido entre x_0 e X póde-se pôr $x_1 = x_0 + \theta h$, sendo $h = X - x_0$ e θ uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade; e temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

D'este theorema deduzem-se os dous corollarios seguintes:

1.º — *Se a derivada de uma funcção é nulla n'um certo intervallo, a funcção é constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, sendo a e $a + h$ dois valores de x compre-

hendidos no intervallo considerado, por estar $a + \theta h$ comprehendido no intervallo de a a $a + h$, será $f'(a + \theta h) = 0$, e portanto $f(a + h) = f(a)$.

2.° — *Se duas funcções tiverem a mesma derivada, finita e determinada n'um certo intervallo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser nulla a differença $f'(x) - F'(x)$ das derivadas das duas funcções, será (corollario precedente) constante a funcção correspondente $f(x) - F(x)$.

V

Derivadas das funcções de variaveis imaginarias

50. — Seja $z = x + iy$ uma variavel imaginaria e

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$$

uma funcção d'esta variavel. Mudemos n'esta funcção x em $x + h$ e y em $y + k$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik}$$

tende para um limite $f'(z)$ independente de h e k quando h e k tendem ao mesmo tempo e de qualquer fórma para zero. Este limite chama-se, como no caso das variaveis reaes, *derivada de $f(z)$*.

Derivando $f(z)$ relativamente a x e a y, temos

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z),$$

e portanto

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = i\frac{\partial f(z)}{\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y} = i\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}\right],$$

d'onde se tira

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\psi}{\partial y}.$$

Temos assim duas condições a que devem satisfazer as funcções $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ para que $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja uma funcção de z que tenha derivada.

51. — Procuremos agora as derivadas das funcções de variaveis imaginarias.

E' facil de vêr que tudo o que se disse no n.º 45 a respeito da formação das derivadas das funcções de funcções, das funcções compostas, e das funcções inversas; e no n.º 47 a respeito das funcções implicitas tem ainda logar no caso das funcções de variaveis imaginarias. Estamos pois reduzidos a considerar as funcções simples.

1) E' facil de vêr que a derivada de $a \pm z$ e ± 1, e que a derivada de az é a.

2) A derivada de e^z obtem-se facilmente. Com effeito, por serem x e y variaveis independentes, a funcção

$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

dará (n.º 45 — V — *nota*)

$$e^{x+h+ik} - e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) h + e^x (-\operatorname{sen} y + i \cos y) k +$$
$$+ \alpha h + \alpha_1 k = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)(h + ik) + \alpha h + \alpha_1 k.$$

Logo teremos

$$\lim \frac{e^{z+h+ik} - e^z}{h + ik} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

Vê-se pois que se obtém a derivada da exponencial, no caso das variaveis imaginarias, pela mesma regra que no caso das variaveis reaes.

3) A derivada da funcção

$$u = (x + iy)^m$$

obtem-se de uma maneira análoga. Temos primeiro

$$(z + h + ik)^m - z^m = mz^{m-1}(h + ik) + \alpha h + \alpha_1 k,$$

d'onde se deduz

$$\lim \frac{(z + h + ik)^m - z^m}{h + ik} = mz^{m-1},$$

como no caso das variaveis reaes.

As outras funcções simples atraz consideradas são ou funcções compostas das precedentes, ou funcções inversas, e portanto todas as regras dadas para formar as suas derivadas, no caso das variaveis reaes, subsistem no caso das variaveis imaginarias.

Nota.—Ás funcções que para valores de z comprehendidos n'uma área dada, são continuas, tem derivada, e não tem pontos criticos chama Cauchy *funcções synecticas* n'essa área. Podemos pois enunciar os seguintes theoremas importantes:

1.º—*A exponencial, o seno e o coseno são funcções synecticas em todo o plano.*

2.º—*O logarithmo de* z *é uma funcção synectica n'uma área qualquer que não comprehende a origem das coordenadas.*

3.º—*A funcção* arc (cos = z) *é synectica em toda a área fechada que não comprehende os pontos* $z = \pm 1$.

4.º—*A funcção tang* z *é synectica em toda a área fechada que não comprehende os pontos* $z = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, etc.

VI

Funcções de muitas variaveis

52. — Passando agora ás funcções de muitas variaveis, consideremos primeiro a funcção

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

das variaveis independentes x_1, x_2, x_3, etc.

Podemos derivar z relativamente a x_1 considerando x_2, x_3, etc. como constantes, ou relativamente a x_2 considerando x_1, x_3, etc. como constantes, etc. Já vimos que a estas derivadas se dava respectivamente os nomes de *derivada parcial* de z relativamente a x_1, de *derivada parcial* de z relativamente a x_2 etc. Já vimos tambem que se representava por

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^a \, \partial x_2^b \, \partial x_3^c \ldots}$$

a derivada parcial de ordem n que resulta de derivar z primeiro a vezes relativamente a x_1, depois o resultado b vezes relativamente a x_2, etc.

53. — *Se a funcção* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *e suas derivadas até á ordem* n *forem finitas e determinadas na visinhança de* x_1, x_2, x_3, *etc., a ordem das* n *derivações que se téem de effectuar para obter esta derivada é arbitraria.*

Para demonstrar esta proposição importante, consideremos primeiro a funcção

$$z = f(x, y)$$

e demonstremos que se esta funcção e as suas derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ forem finitas e determinadas na visinhança do ponto (x, y), será

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x}.$$

Com effeito, o theorema III do n.º 49 dá

$$f(x, y + k) = f(x, y) + k \frac{\partial f(x, y + \theta_1 k)}{\partial y}$$

$$f(x + h, y) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x + \theta h, y)}{\partial x},$$

onde θ e θ_1 representam quantidades positivas comprehendidas entre zero e a unidade.

Mudando na primeira formula x em $x + h$ e attendendo á segunda, vem

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + h \frac{\partial f(x + \theta h, y)}{\partial x}$$

$$+ k \frac{\partial f(x, y + \theta_1 k)}{\partial y} + hk \frac{\partial^2 f(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k)}{\partial y \, \partial x}.$$

Mudando na segunda formula y em $y + k$ e attendendo á primeira, vem

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + k \frac{\partial f(x, y + \theta_1 k)}{\partial y}$$

$$+ h \frac{\partial f(x + \theta h, y)}{\partial x} + hk \frac{\partial^2 f(x + \theta h, y + \theta' k)}{\partial x \, \partial y}.$$

Igualando estes dois resultados, vem

$$\frac{\partial^2 f(x + \theta_2 h, y + \theta_1 k)}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x + \theta h, y + \theta' k)}{\partial x \, \partial y},$$

e no limite

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

D'aqui conclue-se o theorema geral enunciado, pois que qualquer mudança na ordem das derivações póde obter-se invertendo successivamente as derivações duas a duas. Por exemplo,

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y^2\, \partial x} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^3\, \partial y^2} = \text{etc.}$$

54. — As derivadas parciaes e as differenciaes parciaes das funcções de muitas variaveis obtêem-se pelas regras dos numeros anteriores.

Assim, por exemplo, as derivadas parciaes da funcção implicita z definida pela equação:

$$f(x, y, z) = 0$$

obtem-se por meio das igualdades:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Em geral, se tivermos as n equações com $m + n$ variaveis, das quaes n serão dependentes e m independentes:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_m, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots x_m, z_1, z_2 \ldots z_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots x_m, z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,$$

podemos achar as derivadas das variaveis dependentes z_1, $z_2, \ldots z_n$ relativamente ás variaveis independentes $x_1, x_2 \ldots x_m$ resolvendo as $m \times n$ equações do primeiro grão:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_2} = 0$$

....

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = 0 ,$$

....

Derivando estas equações relativamente a x_1, x_2, etc. obtêem-se outras que dão as derivadas de segunda ordem de z, e assim successivamente.

55. — Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas parciaes, isto é, toda a equação da fórma

$$F\left(x_1, x_2, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0$$

tem o nome de *equação ás derivadas parciaes de ordem* n. O estudo d'estas equações será feito no *Calculo integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que toda a equação:

$$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0$$

onde $\varphi(u)$ representa uma funcção arbitraria de u, e u representa uma funcção determinada de x, y e z, leva a uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente de φ.

Com effeito, derivando-a relativamente a x e y, temos as equações:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \cdot \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi(u)} \cdot \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

que, pela eliminação de $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ entre ellas e a proposta, dão uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem independente da funcção arbitraria.

Exemplo 1.º — A equação geral dos cylindros

$$x - az = \varphi(y - bz)$$

dá

$$1 - a\frac{\partial z}{\partial x} = -b\frac{\partial z}{\partial x}\varphi'(y - bz)$$

$$-a\frac{\partial z}{\partial y} = \left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi'(y - bz),$$

e portanto temos a operação ás derivadas parciaes das superficies cylindricas

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

que deve representar uma propriedade commum a todos os cylindros. Adiante veremos esta propriedade.

Exemplo 2.º — A equação geral das superficies de revolução

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

dá do mesmo modo

$$\frac{\partial z}{\partial x}y - \frac{\partial z}{\partial y}x = 0.$$

Exemplo 3.º — A equação geral das superficies conicas

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$$

dá do mesmo modo

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

56. — Do mesmo modo uma equação da fórma:

$$V = F[x, y, z, \varphi(u_1), \psi(u_2)] = 0,$$

onde $\varphi(u_1)$ e $\psi(u_2)$ representam funcções arbitrarias de u_1 e u_2, e onde u_1 e u_2 representam funcções determinadas de x, y e z, leva em certos casos a uma equação ás derivadas parciaes de segunda ordem independente de φ e ψ.

Com effeito, formando as derivadas de primeira e de segunda ordem relativamente a x e a y d'esta equação, obtêem-se as cinco equações:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Se entre estas equações e a proposta eliminarmos as funcções arbitrarias φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'' não chegaremos, em geral, a uma equação independente d'estas funcções; mas ha casos particulares importantes em que acontece o contrario e se obtém uma equação ás derivadas parciaes de segunda ordem independente d'ellas.

Por exemplo, a equação

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$$

dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x + ay) + \psi'(x - ay)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\,\varphi'(x + ay) - a\,\psi'(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a\,\varphi''(x + ay) - a\,\psi''(x - ay)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\,\varphi''(x + ay) + a^2\,\psi''(x - ay);$$

logo virá a equação ás derivadas parciaes de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

57. — A noção de differencial póde ser estendido ao caso de uma funcção de muitas variaveis independentes.

No caso de duas variaveis independentes, isto é, no caso de ser $z = f(x, y)$, teremos (n.º 45 — V)

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} h + \frac{\partial z}{\partial y} k + \alpha h + \alpha_1 k$$

onde α e α_1 são quantidades infinitamente pequenas com h e k.

A somma das duas primeiras parcellas é a parte principal d'esta differença quando h e k são sufficientemente pequenas, e tem o nome de *differencial total de z*. Representando-a por dz e representando h e k por dx e dy vem pois a igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

que define dz.

Do mesmo modo, no caso de muitas variaveis independentes x_1, x_2, x_3, etc., a igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{dz}{dx_n} dx_n$$

define a *differencial total* da funcção

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Exemplo. — As derivadas parciaes relativamente a x e a y de uma funcção z definida pela equação

$$e^{2z+y} - \text{sen}\,(z+x) = 0$$

são dadas pelas equações

$$2e^{2z+y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \cos(z+x)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 1\right) = 0$$

$$e^{2z+y}\left(2\frac{\partial z}{\partial y} + 1\right) - \cos(z+x) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

e a differencial total pela igualdade

$$dz = \frac{\cos(z+x)}{2e^{2z+y} - \cos(z+x)} dx - \frac{e^{2z+y}}{2e^{2z+y} - \cos(z+x)} dy.$$

VII

Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes

58. — Procuremos agora a derivada do determinante

$$f(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são funcções de x.

Mudando x em $x + h$ e chamando k_1, k_2, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de u_1, u_2, v_1, v_2, vem

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 + k_1 & u_2 + k_2 \\ v_1 + l_1 & v_2 + l_2 \end{vmatrix},$$

ou, em virtude d'um theorema bem conhecido,

$$f(x+h) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & k_2 \\ v_1 & l_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & u_2 \\ l_1 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}.$$

Temos pois

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \begin{vmatrix} u_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u'_1 & u_2 \\ v'_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

O raciocinio precedente applica-se evidentemente a um determinante com qualquer numero de columnas, e vê-se que *a derivada d'um determinante é igual á somma dos determinantes que se obtéem substituindo cada columna do determinante proposto por outra formada das derivadas dos termos d'aquella.*

59. — Consideremos as funcções

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) . \end{cases}$$

Com as derivadas d'estas funcções forma-se o determinante:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

que se representa tambem por

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

e que se chama *determinante funccional* ou *jacobiano*. Este determinante, estudado pela primeira vez por Jacobi, tem propriedades muito importantes, para o estudo das quaes se póde recorrer á memoria intitulada — *De determinantibus functionalibus* (*) do eminente geometra. Aqui limitar-nos-hemos a expôr as duas seguintes:

I — Se as equações (1) determinarem as quantidades x_1, $x_2, \ldots x_n$ quando as quantidades $y_1, y_2, \ldots y_n$ forem dadas, diz-se que as equações (1) são *distinctas* e que as funcções $f_1, f_2, \ldots f_n$ são *independentes*. Por meio dos jacobianos d'estas funcções pode-se reconhecer se as equações (1) são ou não distinctas, como vamos vêr.

Theorema. — Se as n — 1 *primeiras equações do systema* (1) *são distinctas, é condição necessaria e sufficiente para que a ultima não seja distincta das precedentes que o determinante* (2) *seja identicamente nullo.*

Com effeito, se as equações (1) são todas distinctas, isto é, se determinam $x_1, x_2, \ldots x_n$, as equações:

(*) *Jacobi.* — Gesammelte Werke — tom. III.

$$(3)\quad \begin{cases} dy_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n = \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \end{cases}$$

devem determinar as differenciaes d'estas variaveis. Logo, em virtude d'um theorema bem conhecido da theoria das equações lineares, o determinante do systema d'equações (3), que coincide com o determinante (2), não póde ser nullo. Logo se este determinante fôr nullo, podemos concluir que as equações (1) não são distinctas.

Demonstremos agora a preposição reciproca, isto é, que se uma das equações (1) não é distincta das outras, o determinante (2) é nullo.

Com effeito, suppondo que as $n - 1$ primeiras equações (1) são distinctas e que a ultima não é distincta das anteriores, podemos das primeiras tirar os valores de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ em funcção de $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, e substituir na ultima; o que leva a uma equação da fórma

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n) = 0,$$

que não contém x_n, visto que, se o contivesse, x_n ficaria determinado, e as equações (1) seriam todas distinctas.

Derivando esta equação relativamente a x_1, x_2 etc., vem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0 .$$

Temos assim n equações lineares homogeneas relativamente a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \ldots \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_n}$; e como estas derivadas não podem ser todas nullas ao mesmo tempo, estas equações não podem subsistir sem que seja nullo o seu determinante, que coincide com o determinante (2).

Está pois demonstrado que se uma das equações (1) não fôr distincta das outras, é nullo o jacobiano (2).

Nota 1.ª — A proposição do corollario 1.º do theorema III do do n.º 49 é um caso particular da precedente. Com effeito, se o systema (1) se reduz á equação unica $y_1 = f_1(x_1)$, o determinante (2) reduz-se a $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$. Logo $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$ é a condição necessaria e sufficiente para que a equação $y_1 = f_1(x_1)$ não determine x_1, isto é, para que $f_1(x_1)$ seja constante.

Nota 2.ª — Por meio de applicações successivas do theorema precedente podemos reconhecer quantas equações do systema (1) são distinctas.

Com effeito, se as i primeiras equações d'este systema forem distinctas e determinarem $x_1, x_1, \ldots x_i$, serão condições necessarias e sufficientes para que uma qualquer das outras $y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_n)$ seja distincta das precedentes relativamente ás incognitas $x_{i+1}, \ldots x_n$, que sejam identicamente nullos os determinantes

$$\frac{\partial(f_1, \ldots f_i, f_k)}{\partial(x_1, \ldots x_i, x_{i+1})}, \frac{\partial(f_i, \ldots f_i, f_k)}{\partial(x_1, \ldots x_i, x_{i+2})}, \ldots \frac{\partial(f_1, \ldots f_i, f_k)}{\partial(x_1, \ldots x_i, x_n)},$$

onde k deve ter os valores $i+1, i+2, \ldots n$.

II — *Se nas funcções* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *substituirmos as variaveis* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *por outras* $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ *ligadas com as primeiras por equações dadas, o jacobiano das novas funcções estará ligado com o jacobiano* (2) *pela relação:*

$$(4) \qquad \frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)} = \frac{\partial(\theta_1, \ldots \theta_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(\theta_1, \ldots \theta_n)}.$$

Para demonstrar este theorema basta substituir no determinante (2) as derivadas que lá entram pelos seus valores tirados das equações que se formam dando a k e a i os valores 1, 2, ... n na equação

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \theta_n}{\partial x_i},$$

e applicar depois o theorema da multiplicação dos determinantes.

Nota. — Se tivermos uma funcção unica e uma variavel, a formula (4) dá

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1},$$

isto é, o theorema IV do n.º 45. Em geral, a cada theorema relativo ás derivadas d'uma funcção corresponde outro relativo aos jacobianos d'um systema de funcções, que contém o primeiro como caso particular; mas este e o precedente são os mais importantes.

III — Se no theorema precedente as equações que ligam as novas variaveis ás antigas são as equações lineares:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = a_1^{(1)} x_1 + \dots + a_n^{(1)} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta_n = a_1^{(n)} x_1 + \dots + a_n^{(n)} x_n, \end{array} \right.$$

virá

$$(6) \qquad \frac{\partial (f_1, \dots f_n)}{\partial (x_1, \dots x_n)} = M \frac{\partial (f_1, \dots f_n)}{\partial (\theta_1, \dots \theta_n)},$$

pondo

$$M = \left| \begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{array} \right|.$$

Se depois da substituição precedente as funcções f_1, f_2, ..., f_n conservarem a mesma fórma, de modo que, sendo

$$f_i (x_1, \dots x_n, a, b, \dots)$$

uma qualquer d'estas funcções, a transformada diffira d'ella na mudança das variaveis $x_1, \dots x_n$ em $\theta_1, \dots \theta_n$ e das cons-

tantes a, b, etc. em A, B, etc.; o determinante (2) será da fórma $\varphi(x_1, \ldots x_n, a, b, \ldots)$ e a igualdade (6) dará

$$(7) \quad \varphi(x_1, \ldots x_n, a, b, \ldots) = M \varphi(\theta_1, \ldots \theta_n, A, B, \ldots).$$

E' o que acontece quando as funcções f_1, f_2, ... f_n são inteiras e homogeneas relativamente a $x_1, \ldots, x_n$, e porisso n'este caso o determinante (2) é um *covariante* do systema (1), como já se sabia pela Algebra.

60. — Se as funcções $f_1, \ldots, f_n$ forem as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ... $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ de uma funcção $f(x_1, \ldots x_n)$, o determinante (2) reduz-se ao determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

que se chama *hesseano*, do nome do celebre geometra O. Hesse que primeiro o considerou.

A respeito d'este determinante limitar-nos-hemos aqui a estudar a influencia sobre elle da transformação linear da funcção f.

Por ser f funcção de $x_1, \ldots, x_n$ e de $\theta_1, \ldots, \theta_n$ e em virtude das formulas (5), temos

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1^{(1)} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} + \ldots + a_1^{(n)} \frac{\partial f}{\partial \theta_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n^{(1)} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} + \ldots + a_n^{(n)} \frac{\partial f}{\partial \theta_n}.$$

Substituindo estes valores no determinante

$$\frac{\partial (f_1, \ldots f_n)}{\partial (\theta_1, \ldots \theta_n)}$$

e attendendo ao theorema da multiplicação dos determinantes, vem

$$\frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(\theta_1, \ldots \theta_n)} = M \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

Logo a formula (6) dá

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = M^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

D'esta formula tira-se as mesmas conclusões que da formula (6).

VIII

Derivada de limites de sommas. Derivada de um arco de curva

61. — I — Seja $f(x)$ uma funcção continua entre x_0 e x, e consideremos a somma

$$S = h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \ldots + h_n f(x)$$

ou

$$S = \Sigma h_i f(x_i) ,$$

onde h_1, h_2, etc. representam n partes em que se devide o

intervallo comprehendido entre x_0 e x do modo que é

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = x - x_0 ;$$

e onde é

$$x_1 = x_0 + h_1,\ x_2 = x_1 + h_2,\ \ldots,\ x = x_{n-1} + h_n .$$

Mostremos primeiro que esta somma tende para um limite quando h_i tende para zero, isto é, quando augmenta indefinidamente o numero n de partes em que se devide o intervallo considerado.

Suppondo primeiro a funcção $f(x)$ positiva e sempre crescente no intervallo considerado, e decompondo o intervallo $h_i = x_i - x_{i-1}$ em m partes iguaes a h'_i, h''_i, etc., de modo que seja

$$h' + h''_i + \ldots = x_i - x_{i-1},$$

vem

$$f(x_{i-1}) < f(x_{i-1} + h'_i) < f(x_{i-1} + h'_i + h''_i) < \ldots < f(x_i),$$

e portanto

$$h_i f(x_i) = h'_i f(x_i) + h''_i f(x_i) + \ldots$$

$$> h'_i f(x_{i-1} + h'_i) + h''_i f(x_{i-1} + h'_i + h''_i) + \ldots$$

O primeiro membro da desigualdade precedente representando uma qualquer das parcellas de S, e o segundo membro sendo a somma das que a substituem quando se devide o intervallo $x_i - x_{i-1}$ em m partes, podemos concluir que a somma S diminue á medida que n augmenta. Por outra parte, o seu valor é maior do que

$$f(x_0)(h_1 + h_2 + \ldots) = (x - x_0) f(x_0) ;$$

logo tende para um limite.

Do mesmo modo se demonstra que, se $f(x)$ fôr decrescente, S augmenta e tende para um limite determinado.

Se a funcção $f(x)$ crescer até $x = a$ e diminuir em seguida, e a estiver comprehendido no intervallo entre x_{i-1} e $x_{i-1} + h_i$, as sommas parciaes

$$S_1 = h_1 f(x_1) + \ldots + h_{i-1} f(x_{i-1})$$

$$S_2 = h_{i+1} f(x_{i+1}) + \ldots + h_n f(x)$$

tenderão para limites, e como $h_i f(x_i)$ tende para zero, S tenderá para o limite de $S_1 + S_2$.

Se a funcção mudar de signal no ponto a, e a estiver comprehendido entre x_{i-1} e x_i as sommas parciaes S_1 e S_2 tenderão para limites de signaes contrarios, e como $h_i f(x_i)$ tende para zero, S tenderá para um limite.

O mesmo acontece se entre x_0 e x ha muitos pontos, em numero finito, em que a funcção passa de crescente a decrescente, ou muda de signal.

De tudo o que precede podemos pois concluir o seguinte theorema importante.

Se a funcção f (x) *fôr continua no intervallo de* x_0 *a* x, *a somma*

$$h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \ldots + h_n f(x)$$

tenderá para um limite á medida que as quantidades h_1, h_2, *etc. tendem para zero.*

II — Procuremos agora a derivada do limite da somma S relativamente a x.

Se mudarmos em S x em $x + h$ e chamarmos k o augmento correspondente do limite de S, temos

$$k = \lim [h_{n+1} f(x_{n+1}) + \ldots + h_{n+i} f(x + h)],$$

onde é

$$h = h_{n+1} + h_{n+2} + \ldots + h_{n+i}.$$

Por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto x podemos dar a h um valor tão pequeno que, no intervallo de x a $x + h$, as funcções $f(x_{n+1})$, $f(x_{n+2})$, etc. tenham o mesmo signal que $f(x)$ e fiquem comprehendidas entre $f(x) + \alpha$ e $f(x) - \alpha$, por mais pequeno que seja α. Logo a somma k ficará comprehendida entre $h\,(f(x) + \alpha)$ e $h\,(f(x) - \alpha)$, e a razão $\frac{k}{h}$ ficará comprehendida entre $f(x) + \alpha$ e $f(x) - \alpha$, o que dá

$$(\lim S)' = \lim \frac{k}{h} = f(x).$$

Logo *se a funcção* f (x) *fôr continua entre* x_0 *e* x *a derivada de limite de* S *n'este intervallo será* f (x).

III — D'este theorema deduz-se immediatamente que o limite de S tem um valor unico, qualquer que seja o numero de partes em que se divida o intervallo $x - x_0$, e qualquer que seja o modo como estas partes tendam para zero. Com effeito, se, para outro modo de divisão, fôr

$$S_1 = h'_1 f(x'_1) + h'_2 f(x'_2) + \ldots + h'_p f(x),$$

onde h'_1, h'_2, etc. representam as partes em que se divide $x - x_0$, de modo que é

$$h'_1 + h'_2 + \ldots = x - x_0,$$

temos (n.º 49 — III — 2.º)

$$\textit{lim}\ S = \textit{lim}\ S_1 + \textit{constante}\ ;$$

e como os limites de S e S_1 devem annullar-se quando se faz $x = x_0$, vem

$$\lim S = \lim S_1\ .$$

Temos pois o seguinte theorema:

Se a funcção f (x) *fôr continua entre* x_0 *e* x, *a somma* S *não póde tender para mais do que um limite, qualquer que seja a grandeza das partes* h_1, h_2, *etc., e qualquer que seja o modo como ellas tendam para zero.*

Appliquemos estes principios ás curvas.

62. — *Derivada d'um arco de curva.* — **I** — Dá-se o nome de *cumprimento de um arco de curva* ao limite para que tende o perimetro de um polygono inscripto n'este arco á medida que se augmenta indefinidamente o numero dos seus lados.

Para justificar esta definição é necessario demonstrar que este limite existe e que tem um valor unico qualquer que seja a lei d'inscripção dos polygonos.

Consideremos um arco da curva cujas equações são $y = f(x)$ e $z = F(x)$, comprehendido entre o ponto arbitrario (x_0, y_0, z_0) e o ponto variavel (x, y, z). Inscrevamos n'este arco um polygono qualquer e sejam (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), etc. os seus vertices. O perimetro P do polygono será dado pela formula

$$P = \Sigma \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

onde a somma se refere a todos os lados de polygono; ou

$$P = \Sigma\, h_i \sqrt{1 + \left(\frac{k_i}{h_i}\right)^2 + \left(\frac{l_i}{h_i}\right)^2},$$

pondo

$$x_{i+1} - x_i = h_i,\ y_{i+1} - y_i = k_i,\ z_{i+1} - z_i = l_i\,.$$

Se augmentarmos indefinidamente o numero de lados do polygono, h_i tenderá para zero, e teremos

$$\lim \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{k_i}{h_i}\right)^2 + \left(\frac{l_i}{h_i}\right)^2}}{\sqrt{1 + [f'(x^i)]^2 + [F'(x_i)]^2}} = 1\,,$$

d'onde se conclue (n.° 42 — 2.°)

$$\lim P = \lim \Sigma h_i \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2 + [F'(x_i)]^2}.$$

Esta formula mostra, em virtude dos theoremas do n.° precedente, que o limite de P existe; que é unico e determinado qualquer que seja o modo como as quantidades h_i tendam para zero (no caso de as funcções $f'(x)$ e $F'(x)$ serem continuas em todo o arco considerado); e finalmente que a derivada d'este limite, que representaremos por s, é dada pela formula

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

donde se deduz a differencial

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Se houver pontos em que alguma das funcções $f'(x)$ ou $F'(x)$ seja descontinua, decompor-se-ha o arco considerado n'outros cujos cumprimentos se avaliam separadamente.

II — Se a curva fôr plana. a equação precedente dará

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se quizermos o valor de ds expresso em coordenadas polares, faremos a transformação da formula precedente por meio das formulas

$$x = \rho \cos \theta,\ dx = d\rho \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta\, d\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta,\ dy = d\rho \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta\, d\theta;$$

e acharemos

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2}.$$

IX

Mudança das variaveis

63. — O problema que vamos resolver é o seguinte:

Dada uma expressão analytica ou uma equação, em que entrem variaveis independentes, variaveis dependentes e derivadas d'estas, achar a sua transformada, quando se substitue todas ou algumas das variaveis por outras ligadas com as primeiras por equações dadas.

Esta transformação tem muita importancia em Geometria quando, tendo um resultado expresso em um systema de coordenadas, se quer exprimil-o n'outro systema. Em Analyse tem tambem uma importancia grande, como iremos vendo.

64. — Consideremos primeiro expressões em que entrem duas variaveis, uma dependente e outra independente:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right),$$

e resolvamos os dous problemas seguintes:

1.º — *Substituir a variavel independente* x *por outra* θ *ligada com* x *pela relação* $\varphi(x, \theta) = 0$.

Chamando x', x'' etc., y', y'', etc. as derivadas de x e de y relativamente a θ, teremos (n.º 45 — IV)

$$y' = \frac{dy}{dx} \cdot x'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot x'^2 + \frac{dy}{dx} \cdot x''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot x'^3 + 3\frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x'''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e portanto

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'}{x'} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{x'^2 y''' - x' y' x''' - 3 x' x'' y'' + 3 y' x''^2}{x'^5} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \right.$$

onde se deve substituir as derivadas de x pelos seus valores tirados da equação $\varphi(x, \theta) = 0$.

Substituindo depois os valores resultantes de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. na expressão proposta resolve-se o problema enunciado.

Exemplo. — Substituindo na expressão:

$$F\left(x, \sqrt{x^2 + bx + c}, \frac{dy}{dx}\right),$$

onde F representa uma funcção racional de x, $\sqrt{x^2 + bx + c}$ e $\frac{dy}{dx}$, a variavel x por outra θ ligada com x pela equação

$$\sqrt{x^2+bx+c}=x-\theta$$

que dá

$$x=\frac{\theta^2-c}{b+2\theta}, \qquad x'=\frac{2(\theta^2+b\theta+c)}{(b+2\theta)^2},$$

vem uma expressão da fórma:

$$f\left(\theta, \frac{dy}{d\theta}\right)$$

onde f representa uma funcção racional de θ e $\frac{dy}{d\theta}$. Temos assim um exemplo da transformação d'uma funcção irracional n'outra racional.

2.° — *Substituir as variaveis* x *e* y *por outras* ρ *e* θ *ligadas com* x *e* y *pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta, \rho)=0, \ \psi(x, y, \theta, \rho)=0,$$

sendo θ *a nova variavel independente.*

Para resolver este problema basta derivar as formulas precedentes relativamente a θ, considerando x, y, ρ como funcções d'esta variavel, o que dá

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}x'+\frac{\partial\psi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$$

etc.;

e em seguida substituir nas formulas (1) os valores de x', y', x'', y'', etc. tirados das equações precedentes. Obtêem-se assim as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

Exemplo. — Transformar a expressão

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

sendo

$$x = \rho \cos \theta, \; y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

as equações que ligam as novas variaveis ás antigas.
Temos

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta$$

$$y' = \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta - \rho \cos \theta$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \operatorname{sen} \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Substituindo estas derivadas na formula

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - y' x''},$$

que resulta de substituir na expressão dada $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ pelos seus valores tirados das formulas (1), vem

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2}}.$$

65. — Consideremos agora a respeito da funcção de duas variaveis independentes x e y:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \ldots\right)$$

as duas questões seguintes:

1.º — *Substituir as variaveis independentes* x *e* y *por outras* θ_1 *e* θ_2 *ligadas com* x *e* y *pelas equações*

$$\varphi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0, \; \psi(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0 .$$

Por ser z funcção de x e y, e por x e y serem funcções de θ_1 e θ_2, temos

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2},$$

etc.

Substituindo n'estas equações as derivadas $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x}{\partial \theta_2}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações que resultam de derivar $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ relativamente a θ_1 e θ_2; e resolvendo-as depois relativamente a $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., temos as derivadas que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

2.º — *Substituir as variaveis* x, y, z *por outras* θ_1, θ^2, ρ *ligadas com as primeiras pelas equações*:

$$\varphi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \; \psi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0,$$

$$\omega(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0 .$$

Resolve-se este problema por meio das formulas anteriores substituindo n'ellas $\frac{\partial z}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta_2}$, etc. pelos seus valores tirados das equações $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$.

Exemplo. — Transformar a funcção

$$F\left(x,\ \sqrt{a+x},\ \frac{y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}}{y}\right),$$

suppondo as novas variaveis ligadas com as antigas pelas equações

$$x^2 + y^2 = \theta_1,\ a + x = \theta_2^2.$$

Derivando estas equações relativamente a θ_1 e θ_2, vem

$$2x\frac{\partial x}{\partial \theta_1} + 2y\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 1,\ x\frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2;$$

o que dá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = 2\theta_2,\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y},\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = -\frac{2x\,\theta_2}{y}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_2} = 2\theta_2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{2x\,\theta_2}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Substituindo na expressão proposta os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirados d'estas equações, vem uma expressão da fórma

$$f\left(\theta_2,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right)$$

em que só entra uma derivada e em que não entra radical.

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I

Curvas planas

66. — *Tangentes e normaes.* — **I** — Seja dada uma curva cuja equação em coordenadas rectangulares é

$$f(x, y) = 0 .$$

A *tangente* a esta curva no ponto (x, y) sendo uma recta que passa pelo ponto (x, y) e cujo coefficiente angular *tang* θ é (n.° **41** — I) igual a $\frac{dy}{dx}$, a sua equação será (chamando X e Y as coordenadas correntes da recta)

$$(1) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) ,$$

onde se deve substituir $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor tirado da equação da curva.

II — A equação da recta perpendicular a esta, isto é, a equação da *normal á curva* no ponto (x, y) é

$$X - x = - \frac{dy}{dx}(Y - y) .$$

A respeito da normal resolveremos aqui o problema seguinte:

Determinar o limite para que tende a intersecção das normaes á curva nos pontos (x, y) *e* (x + h, y + k) *quando o segundo ponto tende para o primeiro.*

As equações das duas normaes são

$$X - x = - f'(x)(Y - y)$$

$$X - x - h = - f'(x + h)(Y - y - k),$$

e a segunda dá, attendendo á primeira e ao que se disse no n.º 49 — III,

$$- h = - hf''(x + \theta h)(Y - y) + kf'(x) + k\, hf''(x + \theta h),$$

suppondo as funcções $f'(x)$ e $f''(x)$ finitas na visinhança de x.

Vem portanto no limite as formulas

$$(2) \qquad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''},\ X - x = - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que dão o ponto (X, Y) pedido.

III — Dá-se respectivamente os nomes de *subtangente*, *subnormal*, *tangente definida* e *normal definida* aos cumprimentos (*) TP, PN, TM e NM determinados pela tangente e pela normal. A resolução dos triangulos MTP e MNP dá os cumprimentos d'estas linhas:

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\operatorname{tang} \theta} = y \frac{dx}{dy}$$

$$\text{subnormal} = y \operatorname{tang} \theta = y \frac{dy}{dx}$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + \overline{TP}^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\text{normal} = \sqrt{y^2 + \overline{NP}^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

(*) Serve a figura do n.º 41 tirando a normal MN que corta o eixo das abscissas no ponto N.

IV — Passemos a resolver alguns problemas relativos ás tangentes.

Problema 1.º — Achar a curva cujas subnormaes são em cada ponto iguaes á abscissa do mesmo ponto.

Temos

$$y \frac{dy}{dx} = x,$$

e portanto

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x.$$

O primeiro membro é a derivada de y^2 e o segundo de x^2, logo teremos (n.º 49 — III — 2.º)

$$y^2 = x^2 + C,$$

onde C representa uma constante arbitraria.

Ao problema satisfazem pois todas as hyperboles representadas pela equação precedente.

Problema II — Achar a curva em que a subtangente é em todos os pontos igual á abscissa com signal contrario.

A equação que traduz o problema é

$$y \frac{dx}{dy} = -x$$

ou

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}.$$

Os dois membros d'esta igualdade são respectivamente as derivadas de $\log x$ e de $\log y$, logo temos (n.º 49 — III — 2.º)

$$\log y = -\log x + \log C$$

ou

$$yx = C.$$

Logo todas as hyperboles cujas asymptotas são os eixos coordenados satisfazem ao problema.

67.—*Concavidade e convexidade.*—**I**—Consideremos um arco de curva e pelo ponto (x, y) d'este arco tiremos a normal, que se estende indefinidamente em duas direcções oppostas. Se as normaes nos outros pontos do arco visinhos de (x, y), cortarem todas a primeira normal em pontos situados n'uma mesma d'estas direcções, diz-se que o arco considerado tem, na visinhança do ponto (x, y), a sua *concavidade* voltada no sentido d'esta direcção da normal e a *convexidade* voltada no sentido opposto.

O sentido da concavidade determina-se pois pela posição do ponto (X, Y) dado pelas formulas (2), visto que estas formulas dão o ponto para que tende a intersecção das normaes nos pontos infinitamente proximos de (x, y) quando estes pontos tendem para (x, y).

II—Diz-se que um arco tem, na visinhança do ponto (x, y), a sua concavidade voltada no sentido d'uma direcção qualquer dada, quando esta direcção fórma um angulo agudo com a direcção da normal para onde está voltada a concavidade.

Se a direcção dada é a das ordenadas positivas, para que esta direcção forme um angulo agudo com a direcção da normal que contém o ponto (X, Y), deve este ponto estar evidentemente acima d'uma parallela ao eixo das abscissas tirada pelo ponto (x, y). A formula (2) mostra que isto tem logar todas as vezes que y'' é positivo, pois que:

1.°—Se y é positivo a formula dá $Y > y$;

2.°—Se y é negativo, a formula dá para Y ou um valor positivo, ou um valor negativo menor do que y (valor absoluto).

Demonstra-se do mesmo modo que a concavidade estará voltada para os y negativos quando y'' é negativo.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

A curva volta a sua concavidade no sentido das ordenadas positivas ou das negativas, na visinhança d'um ponto dado, segundo a derivada y'' *é positiva ou negativa n'este ponto.*

III—Se os pontos d'intersecção da normal á curva no ponto (x, y) com as normaes infinitamente proximas tendem para dous limites collocados um em cada direcção d'aquella normal, o ponto (x, y) diz-se um *ponto d'inflexão*.

Como nos pontos d'inflexão deve mudar o signal de $X - x$ e de $Y - y$, as formulas (2) mostram que a funcção y'' deve

tambem mudar de signal, e temos portanto o theorema seguinte:

E' condição necessaria e sufficiente para que um ponto (x, y), *na visinhança do qual as derivadas* y' *e* y'' *são finitas, seja ponto d'inflexão, que* y'' *mude n'este ponto de signal.*

Funda-se n'este theorema a indagação dos pontos d'inflexão, como adiante veremos.

68. — *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de curva se a distancia d'um ponto do ramo de curva á recta tende para o limite zero quando o ponto se affasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptotas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos de curvas planas basta determinar as constantes a e b que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas Y e y da recta e da curva correspondentes á mesma abscissa tendam para zero quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que a equação do ramo de curva se possa reduzir á fórma

$$Y = ax + b + F(x, y),$$

representando por $F(x, y)$ uma funcção que tende para zero quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$:

$$lim\ z = lim\ \frac{Y}{x} = a + lim\ \frac{b + F(x, y)}{x} = a$$

$$lim\ u = lim\ (Y - ax) = b - lim\ F(x, y) = b;$$

e vê-se portanto que para determinar a, basta substituir Y por zx na equação proposta e procurar depois o limite para que tende z quando x tende para o infinito; e que para determinar b, basta substituir Y por $ax + u$ na equação proposta (ou z por $a + \frac{u}{x}$ na primeira transformada) e procurar depois o limite para que tende u quando x tende para o infinito.

A equação de qualquer asymptota parallela ao eixo das ordenadas é $x = \alpha$, onde α representa evidentemente o limite

para que tende a abscissa do ramo da curva considerado quando y tende para o infinito.

Exemplo. — Para determinar as asymptotas da hyperbole

$$\alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2 = -\alpha^2 \beta^2$$

ponhamos $y = zx$, o que dá

$$\alpha^2 z^2 - \beta^2 = -\frac{\alpha^2 \beta^2}{x^2},$$

e portanto

$$\alpha^2 (\lim z)^2 - \beta^2 = 0,$$

ou

$$a = \lim z = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x + u$, e depois $x = \infty$, vem $b = \lim u = 0$.

Logo as equações das asymptotas da hyperbole são

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x.$$

69. — *Curvatura.* — Chama-se *curvatura média d'um arco de curva* comprehendido entre os pontos (x, y) e $(x + h, y + k)$ a razão entre o angulo formado pelas tangentes ás extremidades do arco e o cumprimento do arco.

Chama-se *curvatura da curva no ponto* (x, y) o limite para que tende a razão precedente quando o arco tende para zero.

Seja $y = f(x)$ a equação da curva em coordenadas rectangulares, θ o angulo das tangentes ás extremidades do arco e l o cumprimento do arco; a curvatura no ponto (x, y) será igual a $\lim \frac{\theta}{l}$, e vamos determinal-a em funcção das coordenadas do ponto.

Por serem $f'(x)$ e $f'(x + h)$ os coefficientes angulares

*

das tangentes, a applicação d'uma formula bem conhecida de Geometria Analytica dará

$$\text{tang}\,\theta = \pm \frac{f'(x+h) - f'(x)}{1 + f'(x) \cdot f'(x+h)},$$

d'onde se deduz (n.º 49)

$$\frac{\text{tang}\,\theta}{h} = \pm \frac{f''(x+\theta h)}{1 + f'(x) \cdot f'(x+h)}.$$

Por outra parte temos (n:º 62—II)

$$\lim \frac{h}{l} = \lim \frac{h}{ds} = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \lim \frac{\theta}{\text{tang}\,\theta} = 1,$$

e

$$\lim \frac{\theta}{l} = \lim \frac{\theta}{\text{tang}\,\theta} \cdot \lim \frac{\text{tang}\,\theta}{h} \cdot \lim \frac{h}{l}.$$

Logo virá

$$\textit{curvatura} = \lim \frac{\theta}{l} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$\text{(3)} \qquad \textit{curvatura} = \frac{1}{R}, \quad R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

I — Applicando a formula precedente á circumferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vem $R = r$, e portanto a curvatura da circumferencia é constante e inversa do raio.

Vê-se pois que, se pelo ponto (x, y) fizermos passar uma circumferencia cujo centro esteja sobre a normal á curva n'este ponto do lado para onde a curva volta a concavidade e cujo raio seja igual a R, esta circumferencia terá em toda a sua ex-

tensão a mesma curvatura que a curva considerada tem no ponto (x, y). Ao circulo assim obtido dá-se o nome de *circulo de curvatura* no ponto (x, y), e ao raio R dá-se o nome de *raio de curvatura* no ponto (x, y). E' facil obter as coordenadas (x_1, y_1) do centro d'este circulo, que se chama *centro de curvatura*.

Com effeito, por ser R o raio d'este circulo, temos

$$(4) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2};$$

e por estar o seu centro sobre a normal á curva no ponto (x, y), temos

$$(5) \qquad x_1 - x = - y' (y_1 - y).$$

Eliminando x_1 e y_1 entre estas equações obtêem-se as formulas

$$x_1 = x \mp y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y \pm \frac{1 + y'^2}{y''}$$

que dão as coordenadas não só do centro de curvatura, collocado do lado da convexidade, mas tambem as do centro do circulo tangente é igual collocado do lado da convexidade. Para distinguir quaes dos signaes das formulas precedentes correspondem ao centro da curvatura, basta comparal-as com as formulas (2) do n.° 66 que dão o ponto (X, Y) collocado do lado da concavidade. Vê-se assim que as coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas:

$$(6) \qquad x_1 = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

D'esta comparação conclue-se tambem, attendendo ao que se disse no 66 — II, que *o centro de curvatura é o limite para que tende a intersecção da tangente á curva no ponto considerado e no ponto infinitamente proximo, quando o segundo ponto tende para o primeiro.*

II — Se em logar da variavel independente x quizermos empregar outra variavel t ligada com x por uma relação dada, transformaremos as formulas (3) e (6) por meio das formulas (1) do n.° 64, e teremos

$$x_1 = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y''}, \quad y_1 = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y'x'' - x'y'}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'x'' - x'y''},$$

onde x' e y' representam agora as derivadas de x e y relativamente a t. No exemplo do n.º 64 vem a expressão de R em coordenadas polares.

III — A cada ponto (x, y) da curva proposta corresponde um centro de curvatura. Quando o ponto (x, y) descreve a curva proposta, o centro de curvatura descreve uma curva cuja equação se acha eliminando x e y entre as equações (6) e a equação proposta. A esta curva dá-se o nome de *evoluta* da curva proposta (que se chama *evolvente*), e a respeito d'ella demonstraremos as duas proposições importantes seguintes:

1.ª — *A normal a uma curva dada no ponto* (x, y) *é tangente á sua evoluta no ponto* (x_1, y_1) *correspondente.*

Com effeito, differenciando as equações (6) considerando y, x_1 e y_1 como funcções de x, vem

$$dx_1 = dx - (1 + y'^2)\, dx - y' d\, \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$dy_1 = y'\, dx + d\, \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

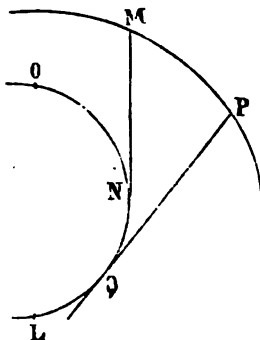
Multiplicando a segunda d'estas equações por y' e sommando com a primeira obtem-se a equação

$$(7) \qquad y' \frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0$$

que, por ser y' o coefficiente angular da tangente á curva proposta no ponto (x, y) e $\frac{dy_1}{dx_1}$ o coefficiente angular da tangente á evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente, mostra que estas duas linhas são perpendiculares.

2.ª — *A differença entre os raios da curvatura correspondentes a dois pontos de uma curva dada é igual ao cumprimento do arco da evoluta comprehendido entre os seus respectivos centros de curvatura, quando entre os dois pontos o raio de curvatura é sempre crescente.*

Seja MP o arco da curva considerada, NQ o arco correspondente da evoluta e O um ponto fixo a partir do qual se

contam os cumprimentos dos arcos da evoluta. Chamando s_1

o cumprimento do arco OQ teremos:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

Differenciando a equação (4) considerando x como variavel independente e y, x_1 e y_1 como funcções de x, e attendendo á equação (5), vem

$$(x - x_1)\, dx_1 + (y - y_1)\, dy_1 = - RdR.$$

A equação (7) dá tambem, attendendo a (5),

$$(x - x_1)\, dy_1 - (y - y_1)\, dx_1 = 0.$$

Elevando ao quadrado os dois membros das equações precedentes e sommando, vem

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Temos pois

$$ds_1 = \pm\, dR,$$

onde se deve empregar o signal + ou — segundo o raio R cresce ou diminue com s_1 no intervallo considerado.

No primeiro caso (o da figura) temos (n.° 49—III—2.°)

$$s_1 = R + C;$$

e do mesmo modo, chamando R_0 o raio MN e s_0 o comprimento do arco ON,

$$s_0 = R_0 + C;$$

e portanto

$$s_1 - s_0 = R - R_0.$$

No segundo caso (o da figura quando se toma o ponto S para origem dos arcos) vem do mesmo modo

$$s_1 - s_0 = R_0 - R.$$

70. — *Exemplos* — **I** — Consideremos primeiro a parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

1) A equação da tangente no ponto (x, y) é

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x).$$

2) As expressões da subtangente, da subnormal e da normal são

$$subt. = 2x, \; subn. = p, \; norm. = N = \sqrt{2px + p^2}.$$

3) As formulas (3) e (6) dão as expressões do raio de curvatura e das coordenadas do centro da curvatura:

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2},$$

$$x_1 = x + \frac{p^2 + y^2}{p} = 3x + p,$$

$$y_1 = y - \frac{(p^2 + y^2)y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

4) Eleminando x e y entre as duas ultimas equações e a da parabola, vem a equação da evoluta:

$$y_1^2 = \frac{8}{27p}(x_1 - p)^3,$$

que representa uma parabola cubica.

II — Consideremos em segundo logar a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 .$$

Temos

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \ y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

e portanto:

1) A equação da tangente é

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x) .$$

2) A expressão da normal definida é

$$N = \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}} .$$

Do mesmo modo se acha a subtangente, subnormal, etc.

3) A expressão que dá o raio de curvatura é

$$R = \frac{\left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{N^3}{p^2},$$

$2p$ representando o parametro.

As coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas formulas:

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \ y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

pondo $c^2 = a^2 - b^2$.

4) A equação da evoluta acha-se eliminando x e y entre as ultimas equações e a da ellipse, o que dá

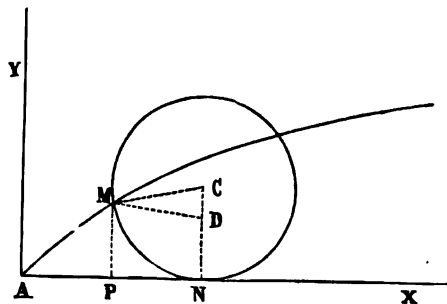
$$\left(\frac{by_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 .$$

Como esta equação não se altera pela mudança de x_1 em $-x_1$ e de y_1 em $-y_1$, vê-se que a curva é composta de quatro ramos iguaes symetricos relativamente aos eixos coordenados. Basta portanto para conhecer a sua fórma discutir o ramo correspondente ás coordenadas positivas, para o que se deve attender á equação da curva e ás igualdades:

$$y'_1 = -\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}} , y_1'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1' x_1 - y_1}{x_1^2}\right).$$

1.º — A curva corta o eixo das abscissas positivas no ponto $\left(+\frac{c^2}{a}, 0\right)$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y_1' = 0$.

2.º — Quando x_1 diminue, y_1 augmenta, e a curva affasta-se do eixo das abscissas conservando sempre a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto que y_1'' é positivo.

3.º — A curva corta o eixo das ordenadas positivas no ponto $\left(0 , \frac{c^2}{a}\right)$ e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y_1' = \infty$.

III — Chama-se *cycloide* a curva gerada pelo ponto M

de uma circumferencia que róla sem escorregar sobre uma recta dada.

Seja M um ponto da curva, C a posição correspondente do centro do circulo gerador, r o raio d'este circulo, A o ponto de partida de M, que tomaremos para origem das coordenadas, AN a recta dada que tomaremos para eixo das abscissas, e MD uma parallela a esta recta.

Para achar a equação da curva exprimamos as coordenadas de um ponto qualquer M em funcção do angulo MCN que chamaremos t, Para isso notemos que é por definição

$$AN = MN = rt,$$

e portanto teremos

$$x = AN - PN = r(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = CN - CD = r(1 - \cos t).$$

Estas duas equações dariam pela eliminação de t a equação da curva, mas vamos discutil-a sem fazer esta eliminação.

1) A equação da normal

$$y'(Y - y) = -(X - x)$$

dá, tomando t para variavel independente,

$$\frac{dy}{dt}(Y - y) = -(X - x)\frac{dx}{dt},$$

onde é

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t) = y, \frac{dy}{dt} = r \operatorname{sen} t.$$

Para achar a sua intersecção com o eixo das abscissas façamos $Y = 0$, o que dá

$$-ry \operatorname{sen} t = -(X - x)y$$

e portanto

$$X = x + r \operatorname{sen} t = AN.$$

Logo *a normal á cycloide n'um ponto dado passa pelo*

ponto onde o circulo gerador correspondente toca a recta sobre que gyra.

2) O valor da normal definida é dada pela formula

$$N^2 = y^2 + PN^2 = y^2 + (rt - x)^2$$

e vem portanto

$$N = r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

3) As formulas do n.º 69 — II dão, tomando t para variavel independente, as expressões do raio de curvatura e do centro de curvatura. Para isso basta substituir n'essas formulas x', y', x'', y'' pelos valores seguintes:

$$x' = r(1 - \cos t),\ x'' = r \operatorname{sen} t$$

$$y' = r \operatorname{sen} t,\ y'' = r \cos t,$$

e teremos a expressão do raio de curvatura:

$$R = 2r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2N,$$

que mostra que *o raio de curvatura é igual ao dobro da normal;* e as coordenadas do centro de curvatura

$$x_1 = r(t + \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 + \cos t).$$

Estas equações dão, pela eliminação de t, a equação da evoluta da cycloide.

4) Como t é variavel, podemos n'estas equações mudar t em $t + \pi$ sem alterar a natureza da curva que ellas representam, e vem

$$x_1 = r(t + \pi - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 - \cos t).$$

Mudando depois a origem das coordenadas para o ponto $(\pi, -2r)$, isto é, mudando x_1 em $x_1 + \pi r$ e y_1 em $y_1 - 2r$, vem as equações:

$$x_1 = r(t - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(1 - \cos t),$$

d'onde se conclue que *a evoluta da cycloide é outra cycloide igual á primeira, cujo vertice está no ponto* (πr, — $2r$), *e cujo circulo gerador gyra sobre uma recta parallela áquella sobre que gyra o circulo gerador da cycloide proposta, e do mesmo lado.*

II

Curvas no espaço

71. — *Tangentes e normaes.* — Consideremos a curva representada pelas equações

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0 . \tag{1}$$

I — *A tangente* a esta curva define-se, como no caso das curvas planas, como limite das posições da secante que passa pelo ponto (x, y, z) e pelo ponto infinitamente proximo $(x + h, y + k, z + l)$.

Como a secante é uma recta que passa pelos dous pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$ as suas equações são (chamando X, Y, Z as suas coordenadas correntes)

$$Y - y = \frac{k}{h}(X - x)$$

$$Z - z = \frac{l}{h}(X - x);$$

e portanto as equações da tangente serão

$$\left\{\begin{aligned} Y - y &= \frac{dy}{dx}(X - x) \\ Z - z &= \frac{dz}{dx}(X - x) . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

As derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ devem ser tiradas das equações da curva.

II — Os cosenos dos angulos α, β, γ formados pela tangente á curva no ponto (x, y, z) com os eixos coordenados rectangulares são, em virtude d'umas formulas bem conhecidas de Geometria Analytica,

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dx^2}} = \dfrac{dx}{ds} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \dfrac{dy}{ds} \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

III — Chama-se *plano normal á curva* no ponto (x, y, z) o plano que passa por este ponto perpendicularmente á tangente.

Applicando as formulas conhecidas de Geometria Analytica que dão a equação do plano perpendicular a uma recta dada, vem, suppondo as coordenadas rectangulares,

$$(4) \qquad X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0$$

onde X, Y e Z representam as coordenadas correntes do plano.

Chama-se *normal á curva* no ponto (x, y, z) toda a recta que passa por este ponto e existe no plano normal.

IV — Chama-se *plano tangente á curva* no ponto (x, y, z) todo o plano que passa pela tangente á curva n'este ponto. Entre estes planos vamos especialmente considerar aquelle para que tende o plano que passa por esta tangente e por uma parallela á tangente á curva no ponto $(x + h, y + k, z + l)$ infinitamente proximo do ponto (x, y, z).

Por serem y e z funcções de x, podemos pôr

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x).$$

A equação geral do plano que passa pelo ponto (x, y, z) é

$$X - x = A(Y - y) + B(Z - z),$$

onde A e B são constantes arbitrarias. Vamos determinal-as pelas condições de o plano passar pela tangente

$$Y - y = \varphi'(x)(X - x)$$

$$Z - z = \psi'(x)(X - x),$$

e pela recta

$$Y - y = \varphi'(x + h)(X - x)$$

$$Z - z = \psi'(x + h)(X - x)$$

tirada pelo ponto (x, y, z) parallelamente á tangente no ponto $(x + h, y + k, z + l)$ infinitamente proximo do primeiro. Estas condições são:

$$A\varphi'(x) + B\psi'(x) = 1$$

$$A\varphi'(x + h) + B\psi'(x + h) = 1,$$

ou (n.º 49)

$$A\varphi'(x) + B\psi'(x) = 1$$

$$A\varphi''(x + \theta h) + B\psi''(x + \theta_1 h) = 0.$$

Tirando d'ellas os valores de A e B e substituindo-os na equação do plano, vem

$$\varphi''(x)(Z - z) = [\psi'(x)\varphi''(x + \theta h) - \varphi'(x)\psi''(x + \theta_1 h)](X - x)$$
$$+ \psi''(x + \theta_1 h)(Y - y).$$

Esta equação representa um numero infinito de planos tangentes á curva, e quando h tende para zero tende para a equação

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi''(x)(Z - z) = [\psi'(x)\varphi''(x) - \varphi'(x)\psi''(x)](X - x) \\ \qquad + \psi''(x)(Y - y) \end{array} \right.$$

que representa o plano procurado. A este plano dá-se o nome de *plano osculador da curva* no ponto (x, y, z).

A' equação (5) póde dar-se uma fórma mais symetrica tomando para variavel independente uma nova variavel t ligada com x, y e z por uma equação dada. Chamando x', y' e z' as derivadas de x, y e z relativamente a t, as formulas do n.º 64 dão as relações

$$\varphi'(x) = \frac{y'}{x'}, \; \psi'(x) = \frac{z'}{x'}, \; \varphi''(x) = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3}, \text{ etc.}$$

que transformam a equação (5) na seguinte

$$(6) \qquad (z' y'' - y' z'')(X - x) + (x' z'' - z' x'')(Y - y) + (y' x'' - x' y'')(Z - z) = 0 .$$

72. — *Curvatura e torsão.* — Consideremos uma curva no espaço, e supponhamos que tomamos para variavel independente uma variavel t, de modo que as coordenadas da curva se exprimam em funcção d'esta variavel por meio das equações:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \pi(t) .$$

Se pelo ponto (x, y, z) fizermos passar uma recta n'uma direcção determinada, de modo que, chamando a, b e c os cosenos dos angulos formados por ella com os eixos coordenados, seja

$$a = f_1(t), \; b = f_2(t), \; c = f_3(t);$$

os cosenos a', b', c', dos angulos formados com os mesmos eixos pela recta correspondente que passa pelo ponto infinitamente proxima $(x + h, \; y + k, \; z + l)$ serão dados pelas formulas:

$$a' = f_1(t + dt) = f_1(t) + dt\, f'_1(t + \theta_1\, dt)$$

$$b' = f_2(t) + dt\, f'_2(t + \theta_2\, dt)$$

$$c' = f_3(t) + dt\, f'_3(t + \theta_3\, dt)$$

onde θ_1, θ_2 e θ_3 são quantidades positivas menores do que a unidade.

Chamando θ o angulo formado pelas duas rectas temos

$$\cos\theta = aa' + bb' + cc',$$

d'onde se deduz

$$\text{sen}\,\theta = [(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo n'esta formula os valores de a', b', c' achados precedentemente, representando para brevidade $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ por f_1, f_2 e f_3, e attendendo ao primeiro principio do n.º 42, vem

$$\lim\frac{\theta}{ds} = \lim\frac{\text{sen}\,\theta}{ds}$$

$$= \frac{[(f_3 f'_2 - f_2 f'_3)^2 + (f_1 f'_3 - f_3 f'_1)^2 + (f_2 f'_1 - f_1 f'_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dt}}.$$

I — Supponhamos que as linhas dadas são as tangentes á curva nos pontos (x, y, z) e $(x + h, y + k, z + l)$, de modo que é (n.º 71 — II)

$$a = f_1(t) = \frac{x'}{s'},\ b = f_2(t) = \frac{y'}{s'},\ c = f_3(t) = \frac{z'}{s'},$$

representando por s', x', y', z', x'', y'', etc. as derivadas de s, x, y, z relativamente a t. Teremos

$$f'_1 = \frac{x'' s' - s'' x'}{s'^2},\ f'_2 = \frac{y'' s' - s'' y'}{s'^2},\ f'_3 = \frac{z'' s' - s'' z'}{s'^2},$$

e (n.º 62)

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Logo, chamando ω o angulo formado pelas duas tangentes infinitamente proximas virá,

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{[(z' y'' - y' z'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' x'' - x' y'')^2]^{\frac{1}{2}}}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Ao limite de $\frac{\omega}{ds}$ dado por esta formula dá-se o nome de *curvatura da curva no ponto* (x, y, z); a ω dá-se o nome de *angulo de contingencia*; e a *lim* $\frac{ds}{\omega}$ dá-se o nome de *raio de curvatura*. Esta formula contém evidentemente a formula dada no n.° 69 para as curvas planas.

II — Supponhamos agora que as linhas dadas são as perpendiculares ao plano osculador.

A equação d'este plano é (n.° 71 — IV)

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

onde

$$A = z' y'' - y' z'', \ B = x' z'' - z' x'', \ C = y' x'' - x' y'' ;$$

logo, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica, temos

$$a = f_1(t) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$b = f_2(t) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = f_3(t) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Estas formulas dão

$$f_3 f'_2 - f_2 f'_3 = \frac{CB' - BC'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_1 f'_3 - f_3 f'_1 = \frac{AC' - CA'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$f_2 f'_1 - f_1 f'_2 = \frac{BA' - AB'}{A^2 + B^2 + C^2} .$$

Logo, chamando τ o angulo formado pelas perpendiculares aos planos osculadores infinitamente proximos, temos a formula

$$\lim \frac{\tau}{ds} = \frac{[(CB' - BC')^2 + (AC' - CA')^2 + (BA' - AB')^2]^{\frac{1}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2)\, s'}.$$

Pondo em logar de A, B, C e s' os seus valores e notando que é

$$CB' - BC' = Dx',\ AC' - CA' = Dy',\ BA' - AB' = Dz'$$

e

$$D = x'(z''y''' - y''z''') - x''(z'y''' - y'z''') + x'''(z'y'' - y'z''),$$

vem emfim

$$\lim \frac{\tau}{ds} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{8}$$

Ao limite de $\frac{\tau}{ds}$ dá-se o nome de *torsão da curva no ponto* (x, y, z); ao angulo τ dá-se o nome de angulo de torsão e ao *lim* $\frac{ds}{\tau}$ dá-se o nome de *raio de torsão*.

Exemplo. — Consideremos a *helice*, gerada por um ponto que se move sobre a superficie d'um cylindro recto de base circular, de modo que a sua distancia á base seja proporcional ao cumprimento t do arco da base comprehendido entre um ponto fixo e o pé da generatriz do cylindro que passa pelo ponto gerador.

Tomando o centro da base para origem das coordenadas, o eixo do cylindro para o eixo dos z, e chamando ρ o raio da base, as equações da curva são:

$$x = \rho \cos t,\ y = \rho \operatorname{sen} t,\ z = at + b,$$

que dão

$$x' = -\rho \operatorname{sen} t,\ x'' = -\rho \cos t,\ x''' = \rho \operatorname{sen} t,$$

$$y' = \rho \cos t,\ y'' = -\rho \operatorname{sen} t,\ y''' = -\rho \cos t,$$

$$z' = a,\ z'' = 0,\ z''' = 0.$$

Logo temos as formulas

$$\lim \frac{\omega}{ds} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}$$

$$\lim \frac{\tau}{ds} = \frac{a}{\rho^2 + a^2}$$

que dão a curvatura e a torsão da helice traçada na superficie do cylindro considerado.

III

Superficies

73. — *Plano tangente. Normal.* — **I** — Seja

$$z = f(x, y)$$

a equação da superficie dada, e pelo ponto (x, y, z) tracemos uma curva qualquer sobre a superficie, cujas equações são a equação proposta e a equação $F(x, y, z) = 0$. Em virtude do que se disse no n.º 71 — I acha-se as equações da tangente a esta curva eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ entre as equações

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),\ Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

o que leva a duas equações, umas das quaes é

$$(9) \qquad Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

Esta equação pertence a um plano, e é independente da equação $F(x, y, z) = 0$; portanto *todas as tangentes ás curvas traçadas n'uma superficie, que passam pelo ponto* (x, y, z), *estão assentes sobre um plano.* A este plano dá-se o nome de *plano tangente á superficie* no ponto (x, y, z).

As derivadas $\frac{\partial z}{\partial z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ obtêem-se derivando a equação da superficie proposta, que póde ser explicita ou implicita.

Nota 1.ª—Se fôr

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

o plano tangente será parallelo á recta

$$x = az + \alpha, \; y = bz + \beta,$$

em virtude d'um theorema bem conhecido da Geometria Analytica.

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies cylindricas (n.º 55).

2.ª — Se fôr

$$z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - b),$$

o plano tangente passará pelo ponto (a, b, c).

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies conicas (n.º 55).

II—Os cosenos dos angulos α, β, γ que o plano tangente fórma com os planos coordenados xy, xz e yz são, em virtude de formulas bem conhecidas de Geometria Analytica:

$$\cos\alpha = K, \; \cos\beta = K\frac{\partial z}{\partial y}, \; \cos\gamma = K\frac{\partial z}{\partial x}$$

onde é

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} .$$

III — Chama-se *normal á superficie* no ponto (x, y, z) a perpendicular n'este ponto ao plano tangente. As suas equações são, em virtude das condições de perpendicularidade de uma recta a um plano conhecidas da Geometria Analytica,

$$(10) \qquad X - x = \frac{\partial z}{\partial x}(Z - z),\; Y - y = \frac{\partial z}{\partial y}(Z - z) .$$

Nóta. — A condição para que a normal é uma superficie corte o eixo dos z obtem-se eliminando X, Y, Z entre as equações da normal e as equações $X = 0$ e $Y = 0$ do eixo, o que dá

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

Esta condição verifica-se em todos os pontos das superficies da revolução (n.º 55), cujo eixo coincide com o eixo dos z.

A mesma eliminação dá

$$Z = z - \frac{x}{\frac{\partial z}{\partial x}} ,$$

ou, por ser $z = \varphi(x^2 + y^2)$ a equação da superficie,

$$Z = z - \frac{1}{2\varphi'(x^2 + y^2)} ,$$

o que mostra que todas as normaes correspondentes aos pontos do mesmo parallelo encontram o eixo dos z no mesmo ponto.

Temos pois o theorema seguinte:

Todas as normaes a uma superficie de revolução nos pontos do mesmo parallelo encontram o eixo da superficie no mesmo ponto.

74. — *Curvatura das secções planas d'uma superficie*

— I — A curvatura da secção feita na superficie por um plano qualquer obtém-se pela formula geral do n.° 72 — I. Aqui vamos procurar as relações que ha entre as secções feitas por planos que passam por um ponto dado da superficie, considerando primeiro as secções feitas por planos que passam pela normal á superficie no ponto dado, e em seguida as secções obliquas.

Seja

$$z = f(x, y)$$

a equação da superficie, e ponhamos para brevidade

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Para comparar a curvatura das secções feitas n'esta superficie por planos normaes que passam por um ponto dado, tomemos para eixo dos z a normal no ponto dado e para plano dos xy o plano tangente no mesmo ponto. N'este caso a equação do plano tangente será $Z = 0$, e portanto teremos (n.° 73)

$$p = 0, \; q = 0 .$$

Um plano qualquer que passe pela normal tem para equação $y = Ax$, onde A representa a tangente trigonometrica do angulo θ formado por elle com o plano dos xz; e portanto, tomando x para variavel independente e representando por y', z', y'', z'' as derivadas de y e z relativamente a x, tiradas d'esta equação e da equação da superficie, teremos

$$y' = A, \; y'' = 0, \; z' = p + Aq = 0,$$

$$z'' = 2 + z As + A^2 t.$$

Logo a expressão da curvatura c_n da secção normal será (n.° 72 — I)

$$c_n = \frac{r + 2As + A^2 t}{1 + A^2}, \tag{11}$$

onde r, s e t são tiradas da equação da curva, e A depende da posição do plano normal considerado.

Derivando c_n relativamente a A, vem

$$c'_n = -\frac{2\,[s\,A^2 - (t - r)\,A - s]}{(1 + A^2)^2},$$

ou

$$c'_n = -\frac{2s\,(A - m_1)\,(A - m_2)}{(1 + A^2)^2},$$

pondo

$$m_1 = \frac{(t - r) + \sqrt{(t - r)^2 + 4s^2}}{2s}$$

$$m_2 = \frac{(t - r) - \sqrt{(t - r)^2 + 4s^2}}{2s}.$$

Vê-se pois que c'_n muda de signal quando A passa pelos valores m_1 e m_2, e portanto a curvatura c_n passa (n.º 49 — I) de crescente a decrescente ou de decrescente a crescente, isto é, passa por um *maximo* ou por um *minimo*.

De ser $m_1 \,.\, m_2 = -1$ conclue-se que *as duas secções de curvatura maxima ou minima são perpendiculares uma á outra.*

Tomando os planos d'estas duas secções para planos dos zx e dos zy, teremos de fazer na formula (11) $\theta = 0$ e $\theta = 90^0$, e portanto $A = 0$ e $A = \infty$, para obter as suas curvaturas, que designaremos por c_1 e c_2; o que dá $c_1 = r$ e $c_2 = t$. Vem pois

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2}\,c_1 + \frac{2A}{1 + A^2}\,s + \frac{A^2}{1 + A^2}\,c_2.$$

Por outra parte, ás secções que correspondem aos valores negativos de θ coincidindo com as que correspondem ao mesmo valôr positivo, o valor de c_n não deve mudar quando se muda A em $-A$, e portanto deve ser $s = 0$. Logo teremos

$$c_n = \frac{1}{1 + A^2}\,c_1 + \frac{A^2}{1 + A^2}\,c_2$$

ou

$$(12) \qquad c_n = c_1 \cos^2\theta + c_2 \operatorname{sen}^2\theta\,.$$

Temos pois o theorema seguinte devido a Euler:

Entre as secções feitas n'uma superficie por planos que passam por uma mesma normal ha duas de curvaturas maxima ou minima, perpendiculares entre si; e a curvatura d'aquellas está ligada com a curvatura d'estas por meio da relação (12).

A estas secções dá-se o nome de *secções principaes*.

D'este theorema deduzem-se os corollarios seguintes:

1.° — *Se uma secção cuja curvatura é* c'_n *fôr perpendicular á secção cuja curvatura é* c_n, *teremos*

$$c_n + c_n' = c_1 + c_2 .$$

Deduz-se este resultado sommando com a igualdade (12) a igualdade

$$c_n' = c_1 \operatorname{sen}^2 \theta + c_2 \cos^2 \theta .$$

2.° — *Se fôr* $c_1 = c_2$ *será a curvatura* c_n *constante, qualquer que seja o plano secante.* Aos pontos que estão n'este caso dá-se o nome de *pontos umbilicaes*.

II — Consideremos agora uma secção feita por um plano que passe pelo ponto (x, y, z) mas não contenha a normal á superficie n'este ponto.

Tomando para plano dos xy o plano tangente, para eixo dos xx a intersecção do plano considerado com o plano tangente, e para eixo dos zz a normal, a equação do plano considerado será

$$y = z \operatorname{tang} i = Bz,$$

chamando i o angulo formado por este plano com o plano normal zx. Teremos pois, em virtude d'esta equação e da equação da superficie, tomando x para variavel independente, e notando que p e q são nullos,

$$y' = Bz',\ y'' = Bz'',\ z' = p + qy' = 0,\ z'' = r + 2sy' + qy'',$$

ou

$$x' = 1,\ x'' = 0,\ y' = 0,\ y'' = Br,\ z'' = r.$$

Logo a curvatura c_0 da secção obliqua será (72 — I) dada pela formula:

$$c_0 = r(1 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{\cos i}.$$

Por outra parte a formula (11) dá, pondo $\theta = 0$ ou $A = 0$, o valor r para a curvatura da secção c_m feito na superficie pelo plano zx, logo teremos a formula seguinte, devida a Meusnier:

$$c_0 = \frac{c_m}{\cos i},$$

que liga a curvatura de qualquer secção obliqua com a da secção normal que passa pela mesma tangente.

IV

Curvas e superficies envolventes

75. — *Curvas envolventes* — **I** — Consideremos a familia de curvas cuja equação é

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

onde a representa um parametro arbitrario, e f representa uma funcção cuja derivada relativamente a a é finita e determinada.

Se dermos a a os valores a_0, $a_0 + h$, $a_0 + 2h$, etc. obtém-se uma série de curvas representadas pelas equações

$$(2) \qquad f(x, y, a_0) = 0,\ f(x, y, a_0 + h) = 0, \text{ etc.}$$

Duas d'estas equações consecutivas tomadas simultaneamente representam os pontos d'intersecção das curvas correspondentes. Estes pontos approximam-se indefinidamente á medida que h diminue, e tendem a formar uma curva, que se chama *envolvente* da curva dada (*envolvida*), cuja equação vamos achar.

Consideremos para isso duas curvas consecutivas da série (2), isto é, as curvas cujas equações são

$$(3) \qquad f(x, y, a) = 0, \; f(x, y, a + h) = 0.$$

A segunda d'estas equações dá (n.º 49 — III)

$$f(x, y, a + h) = f(x, y, a) + h \frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a},$$

e portanto póde ser substituida pela equação

$$\frac{\partial f(x, y, a + \theta h)}{\partial a} = 0.$$

Esta equação simultaneamente com a primeira das equações (2) representa os pontos d'intersecção de duas curvas consecutivas da série (2), correspondentes ao valor que se dá a a, e pela eliminação de a dão uma equação a que todas estas intersecções devem satisfazer. Logo, no limite, as equações

$$(4) \qquad f(x, y, a) = 0, \; \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0$$

dão pela eliminação de a a equação da envólvente da curva proposta.

II — *Theorema. — A tangente á envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando a primeira das equações (4) considerando a como funcção de x e y determinada pela segunda, vem a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y'\right) = 0,$$

que dá o coefficiente angular y' da tangente á envolvente. Mas, por ser $\frac{df}{da} = 0$, esta equação reduz-se á equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

que é a mesma que dá o coefficiente angular da tangente á envolvida. Logo as duas tangentes coincidem.

Exemplo. — Procuremos a envolvente das normaes á parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px \, .$$

A equação da normal é

$$p\,(Y - y) + y\left(X - \frac{y^2}{2p}\right) = 0 \, .$$

Temos pois a procurar a envolvente das rectas representadas por esta equação, considerando X e Y como coordenadas correntes e y como parametro arbitrario.

Derivando esta equação e resolvendo a equação resultante relativamente a y^2 vem

$$y^2 = \frac{2p}{3}\,(X - p) \, .$$

Eliminando y entre esta equação e a anterior, vem a equação da envolvente pedida

$$Y^2 = \frac{8}{27p}\,(X - p)^3 \, ,$$

resultado que concorda com o que se disse no n.º 70.

76. — *Superficies envolventes.* — **I** — Do mesmo modo que no caso das curvas, chama-se ***superficie envolvente*** das superficies representadas pela eqnação

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

o logar geometrico das intersecções successivas de cada uma das superficies representadas por esta equação com a que corresponde e um valor infinitamente proximo do parametro a. Ás superficies representadas pela equação (1) chama-se ***envolvidas***, e ás intersecções das envolvidas successivas chama-se ***caracteristicas***.

Acha-se a equação da superficie envolvente eliminando a

entre a equação (1) e a equação

$$(2)\qquad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0 .$$

II — *Theorema.* — *O plano tangente á superficie envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á superficie envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x e y a primeira das equações (1) considerando a como funcção de x e y determinada pela equação (2), temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 ,$$

que dão os coefficientes $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da equação (n.º 73) do plano tangente á envolvente. Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ,$$

que são as mesmas que dão os coefficientes da equação do plano tangente á superficie envolvida. Logo os dois planos tangentes coincidem.

III — A' linha envolvente das caracteristicas dá-se o nome de *aresta de reversão*. Acha-se a sua equação procedendo como no caso das curvas planas. As equações d'uma caracteristica são

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0;$$

e as da seguinte são

$$f(x, y, z, a+h)=0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a+h)}{\partial a}=0,$$

e podem ser substituidas pelas equações

$$f(x, y, z, a)=0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a+\theta h)}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, a+\theta h)}{\partial a^2}=0,$$

que no limite dão

$$(3) \qquad f(x, y, z, a)=0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, a)}{\partial a^2}=0.$$

Estas equações representam pois as intersecções de duas caracteristicas consecutivas e infinitamente proximas, e dão portanto pela eliminação de a as equações da aresta de reversão.

Theorema. — *A tangente á aresta de reversão n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á caracteristica correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x as duas primeiras equações (3) considerando a como funcção de x, y e z determinado pela terceira, vem as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\right)=0$$

que dão os coefficientes $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ que entram nas equações da tangente á envolvente (n.° 71). Mas por ser $\frac{df}{da}=0$ e $\frac{d^2f}{da^2}=0$,

estas equações reduzem-se a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

que são as mesmas que dão os coefficientes das equações da tangente á caracteristica. Logo as duas tangentes coincidem.

IV — Se a equação da superficie envolvida

$$f(x, y, z, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

contiver n parametros $c_1, c_2, \ldots, c_n$, podemos pôr

$$c_2 = \varphi_2(c_1),\ c_3 = \varphi_3(c_1),\ \ldots,\ c_n = \varphi_n(c_1),$$

representando por φ_2, φ_3, etc. funcções arbitrarias; e procurar depois, pelo processo anterior, a envolvente das superficies

$$f(x, y, z, \varphi_2(c_1), \ldots \varphi_n(c_1)) = 0\ .$$

Chega-se assim a uma equação que contém tambem as funcções arbitrarias φ_2, φ_3, etc., e que representa porisso uma familia de superficies envolventes.

V — *Applicações*. — 1.ª — Consideremos, como primeira applicação, as superficies de revolução que se podem considerar como envolventes de uma esphera cujo centro se move sobre uma recta dada, e cujo raio varia de grandeza segundo uma lei dada.

Tomando a recta dada para eixo dos z, a equação da esphera é

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

e, pondo $c = \varphi(R)$,

$$x^2 + y^2 + (z - \varphi(R))^2 = R^2\ .$$

Derivando, vem

$$-(z - \varphi(R))\,\varphi'(R) = R\ .$$

Esta ultima equação mostra que R é funcção arbitraria de z, e a anterior mostra portanto que z é funcção arbitraria de $x^2 + y^2$. Logo a equação pedida é

$$z = \psi(x^2 + y^2),$$

onde ψ representar uma funcção arbitraria. Esta equação é a equação geral da familia das superficies de revolução, cujas especies se distinguem pelas differentes fórmas da funcção ψ.

2.ª — Chama-se ***superficies planificaveis*** as superficies envolventes das posições que toma um plano que se move segundo uma lei qualquer. Procuremos a equação geral d'esta familia de superficies.

1) Seja

$$z = Ax + \varphi(A)y + \psi(A)$$

a equação do plano gerador, onde φ e ψ representam funcções arbitrarias.

Para achar a equação geral das superficies planificaveis é necessario eliminar A entre esta equação e a sua derivada

$$x + \varphi'(A)y + \psi'(A) = 0.$$

Como porém esta eliminação se não póde effectuar sem especificar a fórma das funcções φ e ψ, considera-se estas duas equações simultaneas como representando a familia das superficies planificaveis, e effectua-se sómente a eliminação quando é dada a especie da superficie planificavel, isto é, quando são dadas as funcções φ e ψ.

2) Podemos achar facilmente a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis. Com effeito, derivando a primeira das equações precedentes relativamente a x e a y e attendendo á segunda, temos as equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(A),$$

que dão

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1886-1887

(decimo anno)

PORTO
Typographia Occidental
66, Rua da Fabrica, 66

1887

ANNUARIO
DA
ACADEMIA POLYTECHNICA
DO
PORTO

Dr. José Pereira da Costa Cardoso

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1886-1887

(decimo anno)

PORTO
Typographia Occidental
66, Rua da Fabrica, 66

1886

RELATORIO DOS FACTOS MAIS IMPORTANTES

QUE TIVERAM LOGAR NA

ACADEMIA POLYTECHNICA

NO ANNO LECTIVO DE 1886-1887

LIDO PELO DIRECTOR DA MESMA ACADEMIA

Na Sessão Publica de 18 d'outubro de 1886

SENHORES!

E' PRAXE seguida n'esta Academia, assim como em muitos institutos scientificos da mesma natureza, ser lido, no dia da inauguração solemne dos estudos, o relatorio dos factos mais importantes da vida academica relativos ao anno lectivo anterior. Obrigado este anno a cumprir pela primeira vez este dever, sinto-me perturbado; porque, inexperiente na arte da palavra, não posso corresponder á solemnidade do dia e á illustração do auditorio, que me escuta. Preciso por isso, Senhores, de toda a vossa benevolencia e espero-a, porque benevolas são sempre as assembleias illustradas.

Passo pois, Senhores, a relatar-vos os principaes successos da nossa Academia no anno lectivo findo, referindo-me successivamente á frequencia, ao regu-

lamento dos serviços academicos, aos gabinetes de trabalhos practicos, á bibliotheca, ás obras do edificio, ao Annuario e finalmente ás modificações que tiveram logar no pessoal academico.

Senhores, o anno que terminou foi o primeiro depois da reforma importante porque passou a Academia, da qual o meu illustre antecessor vos deu noticia no relatorio do anno anterior. Em virtude d'ella, alguns alumnos de outros estabelecimentos de ensino vieram continuar os seus cursos no nosso, cujas portas gostosamente se lhes abriram, e que lhes offerecia as mesmas vantagens, que aquelles d'onde chegavam; e quatorze alumnos militares obtiveram licença para aqui virem estudar o curso preparatorio para a Escóla do Exercito.

O numero dos alumnos que frequentaram as aulas da Academia foi de 220. Este numero tem augmentado desde 1876 para cá, e é de crêr que continue a augmentar, graças ao maior numero de garantias, que hoje se lhes offerece. No Annuario d'este anno vereis qual o numero dos estudantes que terminaram os diversos cursos da Academia, numero que não se pôde ainda apurar para d'elle vos dar hoje noticia.

Pelo relatorio do anno anterior sabeis que, logo no principio do anno lectivo, o Conselho se occupou da discussão de um regulamento dos serviços acade-

micos, cuja necessidade ha muito se fazia sentir, e que depois da ultima reforma se tornára urgente. Hoje tenho apenas a informar-vos de que o projecto de regulamento, approvado pelo Conselho, foi enviado ao Governo, que sobre elle mandou ouvir o Conselho Superior de Instrucção Publica. Consta-me que esta illustrada corporação se tem occupado já d'este assumpto, mas ainda não apresentou ao Governo o seu parecer.

Ha poucos annos ainda um illustre professor d'esta Academia, n'este mesmo logar e em occasião analoga, chamava a attenção para a necessidade do estudo practico das sciencias experimentaes, e para a necessidade impreterivel de organisar os gabinetes de maneira a poder-se ministrar aos alumnos um tal ensino.

Os poucos meios de que então dispunha a Academia não lhe permittiam realisar em pouco tempo esta justa aspiração.

Felizmente a nova lei, que reorganisou este instituto, veio-lhe melhorar um pouco as circumstancias economicas. Determinando que os excessos de receita, creada por essa lei sobre a despesa por ella occasionada, passem a favor da Academia, permittio que se podesse attender melhor ás necessidades dos gabinetes d'ensino practico. No anno lectivo findo o gabinete de Cinematica, o unico d'esta natureza, que existe no paiz, e que é destinado a auxiliar o ensino da Cinematica pelo systema Reuleaux, foi augmentado com uma das séries de apparelhos d'este systema. Para a

collecção d'instrumentos geodesicos e topographicos foi adquirido um theodolito, e foram votados meios, no ultimo conselho, para a compra de um tachéometro, ficando assim com os dois instrumentos, de que mais necessidade havia em vista do estudo da topographia, a que principalmente se deve attender n'um estabelecimento scientifico da indole do nosso. Ao gabinete de Mineralogia foram tambem distribuidos alguns fundos para se obterem os mineraes mais necessarios para o ensino d'esta sciencia. Para o Laboratorio chimico compraram-se alguns productos necessarios para o ensino practico, que n'elle se dá aos alumnos, e que está a uma altura, que por certo não fica inferior ao que se lhes ministra nos outros laboratorios do paiz.

Como vêdes, Senhores, se não podemos conseguir gabinetes completos, como teem os estabelecimentos scientificos mais bem dotados do que o nosso, ou que em longo espaço de tempo os foram pouco a pouco formando, vamos ao menos obtendo o que é necessario para as necessidades do ensino.

A Bibliotheca foi tambem enriquecida com algumas obras de valor. Compraram-se alguns livros de Engenharia relativos principalmente ás cadeiras ultimamente creadas, e compraram-se duas collecções scientificas importantes relativas a assumptos mathematicos: o *Jornal de Crelle* e o *Jornal de Liouville* (1.ª série).

Uma das maiores necessidades da nossa Academia, e para que devemos chamar principalmente a attenção dos poderes superiores é a continuação das obras do edificio.

No anno lectivo findo expropriaram-se as lojas situadas nos baixos do edificio do lado da rua do Anjo (n.º 1 a 9) e do lado do Campo dos Martyres da Patria (n.º 93 e 94). Apropriou-se para sala d'estudo e para exercicios de Geometria Descriptiva uma das velhas salas do edificio, do lado do passeio da Graça. Finalmente está-se procedendo á reparação da parte exterior do edificio do lado das lojas expropriadas e do lado oeste, juncto ao Gabinete de Physica.

Além d'isso está pendente da approvação do governo um pedido de auctorisação para se expropriarem mais algumas lojas e para se construir uma sala para aulas.

Todos estes esforços porém serão ineficazes, se não forem concedidos outros meios, além dos que actualmente temos, para dar desenvolvimento ás obras. N'este sentido já consultou, nas suas duas sessões de 1885 e d'este anno, o Conselho Superior de Instrucção Publica.

Não é porém, Senhores, só ao paiz que compete attender a esta grande necessidade; é tambem ao districto, e principalmente á cidade do Porto, que mais lucra com este melhoramento.

Uma cidade importante d'Italia, Turin, offerece bello exemplo de tal proceder. As corporações, que administram o municipio e a provincia de Turin, resolveram concorrer com metade da despeza para a substituição dos edificios da Universidade, velhos e acanhados para as necessidades do ensino, por outros á altura da cidade e dos créditos d'este importante estabelecimento scientifico.

Oxalá que este exemplo da cidade italiana seja

algum dia imitado pelos homens illustres, que administram o districto e o municipio do Porto.

Continuou a publicar-se o Annuario da Academia como nos annos anteriores. No ultimo volume veio desenvolvida a organisação da Academia segundo a lei de 21 de julho e o decreto de 10 de setembro de 1885. A vantagem de tornar bem conhecidas do paiz as condições actuaes do nosso instituto levou o meu illustre antecessor a duplicar a tiragem do Annuario para poder ser distribuido com profusão. Foi este Annuario illustrado com um magnifico retrato do nosso excellente collega Wenceslau de Lima, cuja chapa foi offerecida pelo snr. Ferreira da Silva. Era na verdade de justiça que o primeiro volume do Annuario posterior á reforma da Academia fosse illustrado com o retrato do promotor d'essa reforma.

Tivemos durante o anno lectivo algumas modificações no pessoal docente. Jubilou-se, logo no principio do anno lectivo, o snr. Conselheiro Adriano Machado, o professor erudito, que tanto brilho deu a este instituto, e que actualmente no logar difficil de Reitor da Universidade de Coimbra, está prestando áquelle estabelecimento scientifico os serviços, que havia a esperar do seu talento, do seu caracter e da sua practica dos negocios da instrucção publica.

Entraram para a Academia durante o anno dois novos professores. Para a cadeira de Montanistica e Docimasia foi despachado o snr. Manoel Rodrigues

de Miranda, cujas qualidades de professor distincto eram já bem conhecidas pelo seu ensino no Instituto industrial e n'esta mesma Academia, onde já regêra em commissão a cadeira de Mineralogia.

Para a cadeira de Geometria Descriptiva entrou o snr. Duarte Leite Pereira da Silva, que ha pouco terminára a sua formatura nas faculdades de Mathematica e Philosophia da Universidade de Coimbra com o nome dos mais laureados.

—

É costume, Senhores, no dia solemne da inauguração dos estudos lembrar os collegas que se finaram durante o ultimo anno lectivo. Cumpro pois o doloroso dever de vos fallar de José Pereira da Costa Cardoso, fallecido a 22 de fevereiro do anno lectivo findo.

Nasceu Pereira Cardoso n'esta cidade do Porto no dia 6 d'outubro de 1831, e era filho do honrado negociante d'esta praça Manoel José Pereira da Costa.

Fez no Lyceu Nacional d'esta cidade os seus exames de preparatorios, e em seguida matriculou-se em 1847 n'esta Academia Polytechnica, onde frequentou as cadeiras do 1.º e 2.º anno de Mathematica, e a cadeira de Physica, obtendo em todas ellas o primeiro premio.

Animado por este resultado dos seus esforços, resolveu ir matricular-se na Universidade de Coimbra, que pelas suas tradições, pela sua organisação superior e pela altura do seu ensino, correspondia melhor

ás suas elevadas aspirações. Ahi frequentou as faculdades de Mathematica e Philosophia continuando a obter, como no Porto, os primeiros premios em todas as cadeiras. Formou-se em ambas as faculdades em 1855, e habilitado com informações distinctissimas, obtidas na formatura, resolveu concorrer á maior das honras, que a Universidade confere aos seus escolhidos, doutorando-se na faculdade de Mathematica em 1857.

Aqui termina a carreira do estudante distincto para principiar a do professor, que o não foi menos.

Despachado primeiro para o logar de substituto extraordinario da faculdade de Mathematica em 3 de julho de 1861, pouco tempo prestou á Universidade os serviços, que do seu talento e saber tinha a esperar; porque em 5 de fevereiro de 1864 foi encarregado de reger em commissão uma cadeira de Mathematica n'esta Academia, e mais tarde, a 14 d'abril de 1869 foi d'ella nomeado definitivamente professor por proposta feita ao governo pelo conselho escolar.

Nas diversas cadeiras que regeu desde a data da sua entrada para a Academia até á sua jubilação, mereceu sempre a estima dos seus discipulos pela bondade do seu caracter e pela clareza da sua exposição.

Não foi só no professorado que Pereira Cardoso occupou um logar elevado; foi tambem na politica, foi tambem na industria, foi tambem no commercio.

Elevado ao pariato fez algumas vezes ouvir a sua voz na camara, merecendo sempre a attenção e respeito de todos os partidos.

Na industria occupou o logar de director da Companhia de Fiação de Negrellos. No commercio occupou o logar de director da Companhia dos Vinhos do Alto Douro.

Em resumo, Senhores, Pereira Cardoso tinha uma bella intelligencia e um bello coração. Dão testemunho da sua intelligencia os factos, que singelamente vimos de narrar. A bondade do seu coração manifesta-se por esse acto generoso, bem conhecido de todos, da doação á Misericordia do Porto da quantia de 12 contos de reis para a sustentação de uma enfermaria para tysicos, commemorando assim a morte de uma filha victimada por tão terrivel doença.

Eis-me chegado, Senhores, ao fim do meu relatorio, por certo cheio de defeitos e lacunas, para que peço a vossa indulgencia. Resta-me agora cumprir o mais agradavel dos deveres inherentes ao logar que occupo. Refiro-me á distribuição dos diplomas de premio e accessit aos estudantes que, durante o anno lectivo findo, os conquistaram pelo seu talento e estudo.

Estudiosos academicos!

Quando medito sobre os resultados obtidos pela sciencia durante o decurso dos seculos, fico maravilhado de quanto póde a intelligencia e a vontade do homem.

O homem conhece o movimento dos astros, de

modo a poder assignar-lhes as posições que, devem ter no espaço em qualquer época; mede-lhes as distancias; pesa-os; determina-lhes os volumes; pela analyse da luz, que emitem, conhece as substancias de que são compostos.

O homem prediz os eclipses, o terror da antiguidade.

Descobriu a bussola e o sextante, que o dirigem na amplidão do mar.

Explicou as marés, o arco-iris, a miragem do deserto.

Pela electricidade escreve a distancia, falla a distancia, transmitte a força a distancia.

Mediu a velocidade do som, a velocidade da luz, a velocidade da electricidade. Inventou o telescopio para vêr o infinitamente grande; inventou o microscopio para vêr o infinitamente pequeno.

O homem foi buscar ao vapor a prodigiosa força que o transporta sobre o mar e sobre a terra, a prodigiosa força, que dá movimento a milhares de machinas usadas na industria.

O homem preparou essa multiplicidade de principios, de que a Medicina se aproveita para combater as doenças, que nos affligem.

O homem tem rectificado rios, tem aberto canaes, tem construido pórtos, onde a natureza os não abrira, tem cortado isthmos para unir os mares, tem furado as montanhas para dar passagem ás estradas.

....

Mas para estas conquistas da sciencia, quantos mathematicos eminentes, quantos naturalistas insignes, quantos philosophos profundos não consumiram a

vida em longos annos de estudo e meditação? Senhores, é grande a difficuldade da sciencia. Vencei-a com perseverança no estudo. Trabalhai para serdes uteis á patria, para serdes uteis á humanidade.

DISSE

I—PESSOAL

A — Pessoal do quadro legal da Academia

1. Direcção

Francisco Gomes Teixeira, doutor na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Costa Cabral, 132.

2. Corpo docente

Francisco de Salles Gomes Cardoso, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra e capitão de mar e guerra.

Mathosinhos—Rua Direita, 20.

Francisco da Silva Cardoso.

Rua da Alegria, 341.

José Joaquim Rodrigues de Freitas, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real de Sciencias de Lisboa, etc.

Travessa de Santa Catharina, 52.

Antonio Alexandre Oliveira Lobo, bacharel formado na faculdade de Direito.

Rua do Principe, 50.

Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Quinta de Campo Bello (Gaya).

Joaquim de Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, antigo professor no Lyceu Nacional do Porto, etc.

Rua dos Fogueteiros, 1.

Antonio Joaquim Ferreira da Silva, bacharel formado na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, director do Laboratorio Municipal de chimica do Porto, etc.

Rua da Alegria, 929.

José Diogo Arroyo, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra.

Foz—Praça de Cadouços, 16.

Manoel da Terra Pereira Vianna, bacharel formado nas faculdades de Mathematica e de Philosophia da Universidade de Coimbra, engenheiro pela Eschola de Pontes e Estradas de Paris, e professor do Instituto Industrial do Porto.

Hotel Francfort.

Wenceslau de Sousa Pereira Lima, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, membro do

Conselho Superior de Instrucção Publica, e deputado ás côrtes.

Rua de Cedofeita, 137.

Roberto Rodrigues Mendes, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, e capitão d'estado maior d'engenheria.

S. Lazaro, (Hotel America).

Luiz Ignacio Woodouse, bacharel formado em Mathematica pela Universidade de Coimbra.

Rua do Breyner, 118.

Manoel Amandio Gonçalves, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 881.

Duarte Leite Pereira da Silva, bacharel formado em Mathematica e Philosophia pela Universidade de Coimbra.

S. Lazaro, 118.

Manoel Rodrigues de Miranda Junior, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, professor do Instituto Industrial do Porto.

Cedofeita, 468.

Guilherme Antonio Corrêa, professor do Instituto Industrial do Porto.

Coronel Pacheco, 21.

3. Secretaria

Secretario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, bacharel formado em Direito pela Universidade de Coimbra.

Rua das Vallas, 301.

4. Bibliotheca

Bibliothecario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, (interinamente).

5. Jardim Botanico

Guarda-primeiro official do Jardim Botanico.—*Joaquim Casimiro Barbosa*, (interinamente).

Massarellos, 43.

6. Laboratorio Chimico

Guarda-preparador do Laboratorio Chimico.—*Augusto Wenceslau da Silva*, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 612.

7. Gabinete de physica

Guarda-demonstrador de physica experimental.—*Bernardo Maria da Motta*, (interinamente).

Travessa do Bolhão, 114.

8. Guarda-mór

Guarda-mór.—*Joaquim Filippe Coelho*, no edificio da Academia.

9. Empregados subalternos

Guarda subalterno, servindo de ajudante de bibliothecario.—*José Mendes Moreira*, Campo Alegre, 433.

Guarda subalterno.—*Antonio Correia da Silva*, no edificio da Academia.

Guarda subalterno.—*Francisco Martins Ferreira Borges*, Ferraria, 139.

Servente do Laboratorio chimico e do gabinete de Physica.—*Domingos Gomes da Cruz*, travessa de S. Dionisio, 99.

Servente da secretaria e porteiro.—*João Antonio Pereira*, Travessa de S. Roque, 7.

B—Pessoal não pertencente ao quadro legal

---

1. Pago pela dotação do expediente, e dos estabelecimentos academicos

Amanuense da secretaria.—*Eduardo Lopes*, rua da Alegria, 293.

Hortelão do Jardim botanico.—*Joaquim José Tavares*, no Jardim.

Servente do Jardim botanico.—*Alberto Ferreira*, idem.

2. Pagos pela dotação para as obras do edificio da Academia e serviço para escripturação e inspecção das obras

Amanuense da commissão das obras.—*J. Filippe Coelho.*

Guarda apontador das obras.—*Joaquim de Sousa Seabra,* rua 9 de julho, 37.

C—Lentes jubilados

Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, do conselho de Sua Magestade, e bacharel formado nas faculdades de Medicina e Philosophia da Universidade de Coimbra.

Breyner, 104.

Gustavo Adolpho Gonçalves e Sousa, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, director e professor do Instituto Industrial do Porto.

Principe, 158.

Pedro de Amorim Vianna, bacharel formado na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo professor no lyceu nacional de Lisboa.

Setubal.

Adriano d'Abreu Cardoso Machado, ministro e secretario d'Estado honorario, do conselho de Sua Magestade, dou-

tor da faculdade de Direito da Universidade de Coimbra, antigo lente substituto ordinario da mesma faculdade, e reitor da Universidade de Coimbra.

II—CADEIRAS

1.ª CADEIRA

Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Luiz Ignacio Woodouse.*

2.ª CADEIRA

Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Francisco Gomes Teixeira.*

3.ª CADEIRA

Mechanica racional; cinematica.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *Joaquim d'Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque.*

4.ª CADEIRA

Geometria descriptiva:—*1.ª parte.*—Geometria descriptiva e projectiva; grapho-estatica.—3 lições semanaes. —*2.ª parte.*—Applicações de geometria descriptiva.—1 li-

ção semanal.—Lente proprietario *Duarte Leite Pereira da Silva*.

5.ª CADEIRA

Astronomia e geodesia:—*1.ª parte.*—Astronomia e geodesia.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Topographia.—1 lição semanal.—Vaga. Rege interinamente o lente proprietario da primeira.

6.ª CADEIRA

Physica:—*1.ª parte.*—Physica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Physica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão*.

7.ª CADEIRA

Chimica inorganica.—*1.ª parte.*—Chimica inorganica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Chimica inorganica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. José Diogo Arroyo*.

8.ª CADEIRA

Chimica organica e analytica:—*1.ª parte.*—Chimica organica geral e biologica.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Chimica analytica.—1 lição semanal.—*3.ª parte.*—Chimica organica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Joaquim Ferreira da Silva.*

9.ª CADEIRA

Mineralogia; paleontologia e geologia.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Wenceslau de Sousa Pereira Lima.*

10.ª CADEIRA

Botanica:—*1.ª parte.*—Botanica.—3 lições semanaes. —*2.ª parte.*—Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso.*

11.ª CADEIRA

Zoologia:—*1.ª parte.*—Zoologia.—3 lições semanaes. —*2.ª parte.*—Zoologia industrial. Materias primas de origem animal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Manoel Amandio Gonçalves.*

12.ª CADEIRA

Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções. Materiaes de construcção. Resistencia dos materiaes. Grapho-estatistica applicada. Processos geraes de construcção.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Roberto Rodrigues Mendes.*

13.ª CADEIRA

Hydraulica e machinas, curso biennal.—*1.º anno.*—Hydraulica. Machinas em geral. Machinas hydraulicas.—3 lições semanaes.—*2.º anno.*—Thermodynamica; machinas thermicas. Motores electricos. Machinas diversas. Construcção de machinas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel da Terra Pereira Vianna.*

14.ª CADEIRA

Construcções e vias de communicação, curso biennal. —*1.º anno.*—Edificios. Abastecimento de aguas e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.—3 lições semanaes.—*2.º anno.*—Estradas. Cami-

nhos de ferro. Pontes.—3 lições semanaes.—Vaga. Rege-a interinamente o lente proprietario da 12.ª cadeira.

15.ª CADEIRA

Montanistica e docimasia, curso biennal.—*1.º anno.* —*1.ª parte.*—Docimasia.—1 lição semanal.—*2.ª parte.* —Metallurgia.—2 lições semanaes.—*2.º anno.*—Arte de minas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel Rodrigues de Miranda Junior.*

16.ª CADEIRA

Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.—*1.ª parte.*—Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Alexandre Oliveira Lobo.*

17.ª CADEIRA

Commercio, curso biennal.—*1.º anno.*—*1.ª parte.*— Calculo commercial. Escripturação em geral e especialmente dos bancos.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Contabilidade industrial.—1 lição semanal.—*2.º anno.*—Economia commercial e geographia commercial.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *José Joaquim Rodrigues de Freitas.*

18.ª CADEIRA

Desenho.—*1.ª parte.*—Desenho de figura, paizagem e ornato.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Desenho de architectura e aguadas.—3 lições semanaes.—*3.ª parte.*— Desenho topographico. Desenho de machinas (esboços á vista acompanhados de cótas, para reduzir a desenho geometrico.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Francisco da Silva Cardoso.*

II

Plano dos estudos dos diversos cursos da Academia Polytechnica

(*DECRETO DE 10 DE DEZEMBRO DE 1885*)

I — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE OBRAS PUBLICAS

1.º ANNO	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
5.º ANNO		
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
30. Construcções I ou II.	6	.
23. Projectos de construcções	.	2
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
Exercicios praticos de topographia . . .	.	2
Missões.		
	20	10
	30	

6.° ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
32. Construcções II ou I.	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial.	2	.
33. Projectos de construcções II ou I . . .	.	6
27. Projectos de machinas II ou I	.	6
Missões.		
	14	12
	26	

II — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE MINAS

1.° ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	12	14
	26	
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
37. Montanistica e docimasia I ou II . . .	6	.
25. Projectos de hydraulica e machinas. . .	.	6
38. Projectos de arte de minas	.	6
Exercicios praticos de topographia . . .	.	2
Missões.		
	20	14
	34	

6.º ANNO	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
34 e 35. Montanistica e docimasia II ou I . .	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
27. Projectos de machinas	.	6
36. Projectos de metallurgia.	.	2
Exercicios de docimasia	.	2
Missões.		
	14	10
	24	

III — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS INDUSTRIAES

1.º ANNO	Numero de horas semanaes: Lições	Numero de horas semanaes: Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.º ANNO	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	2	.
14. Chimica organica e biologica	4	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicio de geometria descriptiva I . .	.	2
Chimica prática	.	2
	16	10
	26	

4.º ANNO	Lições	Exercicios
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
20. Zoologia geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
13. Chimica inorganica industrial	2	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 6.º)	2	.
28. Projectos relativos a machinas e a chimica industrial	.	6
Missões.		
	18	6
	24	

6.º ANNO	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
16. Chimica organica industrial	2	.
11. Physica industrial.	2	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 5.º)	2	.
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial	.	6
Missões.		
	16	6
	22	

IV — CURSO DE COMMERCIO

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
10. Physica geral.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
Physica prática, especialmente trabalho com o microscopio.	.	2
Chimica prática	.	2
	12	4
	16	
2.º ANNO		
43. Commercio I ou II	6	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
15. Chimica analytica.	2	.
Chimica prática	.	2
	10	2
	12	
3.º ANNO		
41 e 42. Commercio II ou I.	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial	4	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
47. Analyse chimica commercial.	.	2
	12	2
	14	

V—CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DO EXERCITO

a. Para officiaes de estado maior e de engenheria militar; e para engenheria civil.

1.º ANNO

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
14. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO

	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
15. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	..	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	

4.º ANNO

	Lições	Exercicios
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

b. Para officiaes de artilheria.

1.º ANNO

	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
2.° ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva	.	2
	16	8
	24	

VI — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA NAVAL

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
a. Para officiaes de marinha.		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
10. Physica geral.	6	.
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
	12	4
	16	
b. Para engenheiros construtores navaes.		
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
14. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
Physica prática	.	2
	18	10
	28	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
18. Botanica geral	6	.
46. Desenho	.	6
	12	6
	18	

VII—CURSO PREPARATORIO PARA AS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
10. Physica geral. Physica prática	6	2
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
20. Zoologia geral	6	.
18. Botanica geral	6	.
	30	6
	36	

VIII — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DE PHARMACIA NAS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
18. Botanica geral	6	.
	18	4
	22	

O numero de horas de exercicios, projectos e trabalhos praticos é, no começo de cada anno, fixado pelo conselho academico.

Condições d'admissão dos alumnos

As condições de admissão dos alumnos no corrente anno lectivo constam do edital da Directoria com data de 30 de julho. N'elle se diz:

«Os estudantes que pretenderem matricular-se devem lançar na caixa que está no corredor de entrada da secretaria, até ao dia 5 de outubro proximo futuro, os seus requerimentos datados, assignados e competentemente documentados, declarando-se n'elles a *naturalidade, freguezia e concelho, filiação paterna, idade e os cursos que desejam seguir.*

«Os alumnos que pretenderem, no proximo anno lectivo de 1886-1887, ser admittidos á primeira matricula

nos cursos especiaes e no preparatorio para a Escola do Exercito, devem apresentar certidões de approvação nas seguintes disciplinas, ou nas equivalentes, segundo a legislação anterior (decreto de 14 de outubro de 1880):

1.ª Lingua portugueza (1.ª e 2.ª partes).
2.ª Lingua franceza (1.ª e 2.ª partes).
3.ª Arithmetica, geometria plana, principios de algebra e escripturação (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).
4.ª Algebra, geometria no espaço e trigonometria (1.ª e 2.ª partes).
5.ª Elementos de physica, chimica e introducção á historia natural (1.ª e 2.ª partes).
6.ª Desenho (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).
7.ª Litteratura nacional (1.ª e 2.ª partes).
8.ª Lingua latina (1.ª e 2.ª partes).
9.ª Philosophia racional, e moral, e principios de direito natural (1.ª parte).
10.ª Geographia e cosmographia, historia universal e patria (1.ª e 2.ª partes).
11.ª Elementos de legislação civil, de direito publico e administrativo portuguez e de economia politica.

Os alumnos que, segundo a legislação vigente, pretendam matricular-se como voluntarios, são admittidos á matricula apresentando certidões nas sete primeiras disciplinas acima mencionadas. Aos alumnos do curso preparatorio para a escola de pharmacia nas Escolas Medico-Cirurgicas são exigidas as certidões de approvação nas disciplinas dos n.ºs 1, 2, 3, 5, 7, 8 e 9.

Os alumnos militares, que pretendam frequentar os cursos preparatorios para a Escola do Exercito, precisam requerer ao Ministerio da Guerra a respectiva licença.

Dias e horas das aulas e dos exercicios

1.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 3.as; das 2 ás 4 horas.

2.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.

3.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.

4.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 9 ás 11 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.

5.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 5.as; das 12 ás 2 horas.

6.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; 1.ª turma, das 12 ás 2 horas. 2.ª turma, das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.

7.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 1.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas. Aula, 2.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 4.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.

8.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 1.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 8 ás 10 horas. Aula, 2.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 8 ás 10 horas.
—2.ª parte—aula, 3.as; das 8 ás 10 horas.
—3.ª parte—aula, 5.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.

9.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.

10.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—2.ª parte—aula, 6.as; das 10 ás 12 horas.

11.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.

—2.ª parte—aula, 5.as; das 12 ás 2 horas.

12.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.

13.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.

—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.

14.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as, e 6.as; das 2 ás 4 horas.

—exercicios, 2.as, 4.as, e 6.as; das 10 ás 12 horas.

15.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 10 ás 12 horas.

—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.

16.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.

17.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 9 ás 11 horas.

18.ª Cadeira—aula, 1.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 10 ás 12.—2.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 10 ás 12 horas.

IV

Livros que servem de texto e aconselhados para consulta nas diversas cadeiras, no anno lectivo de 1886-1887

1.ª Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Introducção á theoria das funcções.

2.ª Cadeira—*Gilbert (Ph.)*: Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 2.e édition. 1 vol. 8.º Paris et Louvain, 1878.

3.ª Cadeira—*Laurent (H.)*: Traité de mécanique rationelle, á l'usage des candidats á l'Aggrégation et á la Licence, 2.me edition. 2 vol. in-8.º Paris, 1877-1878.

4.ª Cadeira—*La Gournerie (Jules de)*: Traité de géometrie descriptive. 2.me edition, in-4.º, en trois parties: 1.re partie, texte de XIX-143 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1880.—2.me partie, texte de XIX-222 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1885. 3.me partie, texte de XX-230 p. et atlas de 46 planches. Paris, 1885.

5.ª Cadeira—*Faye (H.)*: Cours d'astronomie de l'École Polytechnique. 2 vol. in-8.º Paris, 1881-1883. I. partie: Astronomie sphérique. Description des instruments. Théorie des erreurs. Géodésie et géographie mathématique, 1881. 1 vol. in 8.º de VIII-374 p.—II. partie: Astronomie solaire. Théorie de la lune. Navigation. 1883.

Habets: Topographie.

Calheiros:—Apontamentos de geodesia.

6.ª Cadeira—*Jamin (J.):* Petit traité de physique á l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. Nouveau tirage, augmenté des *Notes sur les progrès récents de la physique*, par M. E. Bouty. 1 vol. in-8.º Paris, 1882.

Ganot (A.): Traité élémentaire de physique. 19.º edition, entièrement refondue, par George Maneuvrier. 1 vol. in-8.º de 1160 p. contenant 1014 gravures intercalées dans le texte et deux planches en couleur. Paris, 1884.

7.ª e 8.ª Cadeiras—Agenda du chimiste á l'usage des ingénieurs, physiciens, chimistes, etc. Paris, librairie Hachette, ultima edição.

Barthelot (M.): Traité élémentaire de chimie inorganique, 2.me edition, avec la collaboration de Jungfleisch. 2 vol. in-8.º de XX-483 pag. e XV-489 pag. Paris, 1880.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas agricolo-florestaes. 1.ª parte: Productos fermentados. 3.ª edição. 1 vol. in-8.º de 734 p. Lisboa, 1885. 2.ª parte: Azeites lacticinios, cereaes, farinhas, pão e féculas. 2.ª edição. 1 vol. in-8.º de 221 pag. Lisboa, 1875. 3.ª parte: Productos saccharinos, florestaes, textis, animaes e salinos. 1 vol. in-8.º Lisboa.

Payen (A.): Précis de chimie industrielle, á l'usage: 1.º des écoles d'arts et manufactures et des arts et métiers; 2.º des écoles préparatoires aux professions industrielles; 3.º des fabricants et des agriculteurs; 6.me édition, revue et mise au courant des dernières décourvertes scientifiques, par Camille Vincent. 2 tom. in-8.º de 832 e 1:014 pag. et 1 atlas de XLIV planches. Paris, 1877-1878.

Silva (A. J. Ferreira da): Tratado de chimica elementar. I. Chimica mineral. 1 vol. in-8.º de XV-580 p. Porto, 1883.

Debray: Cours élémentaire de chimie. 2 vol.

9.ª Cadeira—*Lapparent (A. de):* Cours de minéralogie. 1 vol in-8.º de XII-560 pag. avec 519 gravures dans le texte et une planche chromo-lithographiée. Paris, 1884.

Gonçalves Guimarães (Dr. A. J.): Tratado elementar de mineralogia. Principios geraes. Porto, 1883. 1 vol. in-8.º de 239 pag. e 1 atlas de XXII est.

10.ª Cadeira—*Cauvet (D.):* Cours élémentaire de botanique. I. Anatomie et physiologie végétales; paléontologie végétale, géographie botanique. 1 vol. in-8.º de VIII-316 pag. avec 404 figures. Paris, 1885.

Le Maout (E.) et *Decaisne (J.):* Flore des jardins et des champs.

Brotero (F. A.): Flora lusitanica.

11.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

12.ª Cadeira—*Flamant:* Stabilité des constructions et résistance des matériaux. 1886. (Baudry).

13.ª Cadeira—*Collignon:* Cours de mécanique, appliquée aux constructions. 2.me partie. Hydraulique.

14.ª Cadeira—*Durand-Claye* (*Ch. L.*) et *L. Marx:* Routes et chemins vicinaux.

Debauve: Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.

15.ª Cadeira—*Balling:* Manuel pratique de l'art de l'essayeur.

Callon (*J.*)*:* Cours de exploitation des mines.

Gruner: Traité de métallurgie.

Haton de la Goupillière: Cours de exploitation des mines.

16.ª Cadeira—*Rodrigues de Freitas* (*J. J.*)*:* Principios de economia politica.

Codigo administrativo.

Codigo Commercial Portuguez.

17.ª Cadeira—*Léfévre:* La comptabilité.

Pereire: Tables de l'intérêt composé des annuités et des rents viagères.

Estabelecimentos da Academia

I. — Bibliotheca

1. Sobre a historia e desenvolvimento d'este estabelecimento veja-se:

Memoria historica da Academia Polytechnica do Porto, pelo conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado, no *Annuario* de 1877-1878, pag. 206, 208-210, 225 e 226.

Catalogo da Bibliotheca da Academia Polytechnica do Porto; 1.ª parte. Catalogo dos livros de Mathematica e de

Philosophia natural. Porto, 1883; *Annuario* de 1878-1879, pag. 29-37; *Annuario* de 1879-1880, pag. 33 a 41; *Annuario* de 1880-1881, pag. 45-54; *Annuario* de 1881-1882, pag. 55-82; *Annuario* de 1882-1883, pag. 167-195; *Annuario* de 1883-1884, pag. 100-116; *Annuario* de 1884-1885, pag. 48-57.

2. Obras offerecidas á Bibliotheca

Actas e Pareceres do Congresso da Instrucção do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 vol.

Albuquerque (Dr. P. A. da Matta): Philosophia do direito publico. Rio de Janeiro. 1 vol.

Albuquerque (F): Revista de Horticultura, vol. I. Rio de Janeiro. 1 vol.

Almeida (A. E. Ribeiro d'): Lições lythographadas para a Escóla do exercito. Força da polvora e Balistica interna. 1 vol. Lisboa.

— Material d'artilheria. 1 vol.

Annuario della R. Università degli Studi di Torino por l'anno accademico 1885-86. 1 vol.

Annuario estatistico de Portugal. Lisboa, 1886. 1 vol.

Arroyo (Dr. M. Raymundo): Discurso lido en solemne inauguracion del curso academico de 1886 á 1887 en la Universidad de Salamanca. Salamanca, 1886. 1 vol.

Arthur Indio do Brazil: Memoria descriptiva do electro marégrapho. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Atheneu Polytechnico: Revista polytechnica, n.º 1 a 3, vol. 2.º, 1884. Rio de Janeiro. 3 fasc.

Azambuja (Conselheiro d'): Doutrinas pedagogicas. Rio do Janeiro. 1 fasc.

Bachelin (L.): Interprétation littéraire et philologique de la prémière idylle de Théocrite. (Académie de Neuchatel. Année 1886–1887). 1 vol.

Bandeira, filho (Dr. A. H. de Sousa): Relatorio sobre a instrucção publica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Barcellos (N. V. C.): Obras de desobstrucção do Rio Jaguarão. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bede (E.) et Hospitalier: A telephonia. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bicalha (Honorio): A estrada de ferro de Cantagallo, ramal do rio Bonito. Rio de Janeiro. 1 fasc.

—Estudos sobre a largura das estradas de ferro e resistencia dos trens. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Bicker (J. F. J.): Collecção de tratados e concertos de pazes que o estado da India Portugueza fez com os Reis e Senhores com quem teve relações nas partes da Asia e Africa Oriental, desde o principio da conquista até ao fim do seculo XVIII, tomo VI, IX, XII, XIII e XVIII. Lisboa. 5 v.

Bocayuva (R.): A crise da lavoura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Boletim da Sociedade de Geographia Commercial do Porto, 1886, n.os 1 e 2. Porto, 1886. 2 fasciculos.

Boletim da Sociedade de Geographia de Lisboa, 5.a serie. Lisboa, 1885. 1 volume.

Brandão (F. de C. S.): Relatorio do Ministerio dos Negocios Estrangeiros. Rio de Janeiro. 1 vol.

Breve noticia sobre a collecção das madeiras do Brazil. Exposição internacional de 1867. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bueno (F. A. P.): Memoria justificativa dos planos apresentados ao Governo Imperial para o prolongamento da estrada de ferro de S. Paulo. Rio de Janeiro. 1 vol.

—Memoria sobre a provincia de Matto Grosso. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Burnier (M. N. N.): Estrada de ferro de D. Pedro II. Rio de Janeiro. 1 volume.

Cabo Submarino na provincia do Maranhão. Rio de Janeiro. 1 f.

Cabral (J. A. C. das Neves): Estatistica mineira (anno de 1882). Lisboa, 1886. 1 vol.

Calvo (Carlos): La República del Paraguay. Rio de Janeiro. 1 vol.

Calaça (Francisco José Gomes): Estrada de ferro de Cuyabá á Lagoinha. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Camara (J. Ewbank da): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Camara (J. Ewbank): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Camara (J. E. da): Caminhos de ferro do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 vol.

Camara (J. H. da): Caminhos de ferro de S. Paulo. Rio de Janeiro. 1 volume.

Caminhoá (Dr. J. Monteiro): Relatorio sobre os jardins botanicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Carvalho (Augusto de): O Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Catalogo da Exposição de Obras Publicas do ministerio da agricultura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Catalogo dos pergaminhos do cartorio da Universidade de Coimbra. Coimbra. 1 fasc.

Catalogue of Dartmouth College and the Associated Institutions, for the year 1885-86. Hanover, 1885. 1 vol.

Choffat (Paul): Section des travaux géologiques du Portugal. Description de la Faune Jurassique du Portugal. Mollusques Lamellibranches. Deuxième ordre. Asiphonidae. Première livraison. Pages 1 à 36. Planches 1 a 10. Lisboa, 1885. 1 fasc.

Conferencias effectuadas na Exposição pedagogica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Congresso Agricola do Recife em 1878. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Cornell (The) University register, 1885-86. 1 vol.

Coutinho (J. M. da Silva): Estrada de ferro do Recife a S. Francisco Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Couty (Louis): Le Brésil en 1884. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Couty (Louis): L'esclavage au Brésil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

— Propaganda na Europa do mate, do café e da carne secca. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Dedications of Rollins Chapel and Wilson Hall (Dartmouth college). June 24, 1885. 1 vol.

Delgado (J. F. N.): Estudo sobre os bilobites e outros fosseis dos quartzistes da base do systema silurico de Portugal. Lisboa, 1886. 1 vol.

Discorso inaugurale e annuario accademico (Regia Universitá degly studi di Modena). 1885-86. 1 vol.

Documentos para a historia das Côrtes Geraes da Nação Portugueza, coordenação auctorisada pela Camara dos Senhores Deputados. Tomo III—anno de 1827. Lisboa. 1 vol.

Doucet: Rapport annuel lu en séance publique le octobre 1886. (Université Libre de Bruxelles. Année académique 1886-1887) Bruxelles, 1886. 1 volume.

Durão (H. C.): Memoria justificativa sobre os estudos definitivos para a estrada de ferro do Rio Grande ao entroncamento no Cacequy. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Estudo pratico sobre vias de ferro portateis e fixas. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Estrada (A) **de ferro de D. Pedro II e o administrador do estado.** Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Exposição feita pelo presidente aos accionistas da Companhia Telephonica do Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ferreira (Felix): Lyceu d'artes e officios. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Folque (Filippe): Collecção de taboas para facilitar varios calculos astronomicos e geodesicos. Lisboa, 1865. 1 vol.

—Instrucções para o serviço geodesico de primeira ordem. Lisboa, 1870. 1 vol.

— Instrucções e regulamento para a execução e fiscalisação dos trabalhos geodesicos chorographicos e hydrographicos do Reino. Lisboa, 1874. 1 volume.

Fleury (A. A. de Padua): O presidio de Fernando de Noronha e as nossas prisões. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freire (Dr. D. J.): Relatorio apresentado ao governo imperial pelo presidente da Junta Central de Hygiene Publica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freio automatico de ar comprimido Westinghouse. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freitas (Dr. Antonio de Paula): Relatorio do Lazareto do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Guiguet (C. G.) Relatorio sobre chimica industrial, agricultura e silvicultura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Hargreaves (H. E.): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Hippeau (M. C.): A instrucção publica nos Estados-Unidos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Hayez (Martinus): O imposto, considerado á luz dos principios economicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Illuminação Publica. Alguns apontamentos sobre o serviço das Companhias do Gaz. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Inauguracion del curso academico de 1886 á 1887 en la Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1886. 1 vol.

Instituto (O), Revista Scientifica e litteraria. Coimbra, 1885 e 1886. 2 volumes.

Jordão (Elias F. Pacheco): Revista do Instituto Polytechnico. N.º 1—1876; n.º 2—1878. Rio de Janeiro. 2 fasc.

Jorge (R. d'Almeida): Relatorio apresentado ao Conselho Superior de Instrucção Publica na sessão de 1 d'outubro de 1885. Porto, 1885. 1 vol.

Leão (M. J. da Silva) e Moitinho (Domingos): Breve noticia sobre a provincia das Alagoas. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ligação do Observatorio Astronomico de Lisboa com a triangulação fundamental. Lisboa, 1886. 1 vol.

Limpo (Brito): Memoria sobre a determinação do comprimento do pendulo. Lisboa, 1865. 1 vol.

— Taboas para o calculo das refracções terrestres e resolução analytica d'um problema de topographia. Lisboa, 1865. 1 vol.

— Estudos sobre o nivelamento. Lisboa, 1870. 1 vol.

— Telemetro d'inversão. Lisboa, 1874. 1 vol.

— Instrucções para o exercicio dos nivelamentos geometricos de precisão. Lisboa, 1883. 1 vol.

Luque (Doctor D. Rafael Conde y): Discurso leido en la Universidad Central en la solemne inauguracion del curso academico de 1886 a 1887. Madrid, 1886. 1 vol.

Mathieu (M. Emile): Cours de physique mathematique. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Mattos (Antonio Gomes de): Esboço de um manual para os fazendeiros de assucar no Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Memoria estadistica del curso de 1884 a 1885 y Annuario de 1885-86. (Universidad Central). Madrid, 1886. 1 vol.

Memoria sobre o estado de la instruccion en la Universidad Litteraria de Salamanca y estabelecimientos de enseñanza de su districto correspondiente al curso académico de 1884 a 1885. Salamanca, 1885. 1 vol.

Mendoça (Salvador de): Trabalhos asiaticos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Moraes (E. J. de): Estradas de ferro da Provincia de S. Pedro do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Moreira (Conselheiro Dr. N. J.): O auxiliador da industria nacional. Vol. LI, anno de 1883. N.º 1 a 10—Janeiro-Outubro de 1884. N.º 12—Dezembro, 1884. Rio de Janeiro. 11 fasc.

Moreira (Dr. Nicolau Joaquim): Relatorio sobre a emigração nos Estados-Unidos da America, 1876. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Moreira (Dr. Nicolau Joaquim): Revista agricola do Imperial Instituto Fluminense de agricultura, 1880-1884. Rio de Janeiro. 17 fasc.

Mourloy (Charles): Noticia sobre o systema de telegraphia e telephonia simultaneas. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ministerio do Reino (Contas da gerencia do) do anno economico de 1884-1885 e do exercicio de 1883-1884. Lisboa, 1886. 1 vol.

Nuitter (Charles): Le nouvel opera. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Obras (As) da nova praça do Commercio do Rio. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Observações metereologicas feitas no observatorio metereologico e magnetico da Universidade de Coimbra no anno de 1885. Coimbra, 1886. 1 vol.

Oliveira (A. de Almeida): Relatorio apresentado á assembleia geral legislativa na 4.ª sessão da 18.ª legislatura pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da marinha. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Oliveira (Luiz Augusto de): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ottoni (Conselheiro Ch. B.), Almeida e Penna: Memoria justificativa dos planos apresentados ao governo imperial para a construcção da estrada de ferro de Porto Alegre á Uruguyana. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Paraizo (C.ro F. P. de Souza): Relatorio apresentado á assembleia geral legislativa na 4.ª sessão da 18.ª legislatura, pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da justiça. Rio de Janeiro. 1 vol.

Pays (Le) du Café: Voyage de M. Durand au Brézil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Penna (A. A. M.): Relatorio do Ministerio dos Negocios da Agricultura, Commercio e obras publicas. Rio de Janeiro 1 vol.

Pereira (L. R.): Relatorio do Ministerio da fazenda. Rio de Janeiro. 1 vol.

Picanço (Francisco): Ensaio de um vocabulario de estrada de ferro e de rodagem. Rio de Janeiro. 1 fasc.

— Viação ferrea do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Pinto (José Augusto. Nascentes): Demonstração da taboa das joias. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Pizarro (Dr. João Joaquim): Memoria historica dos factos mais notaveis occorridos na faculdade de medicina do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Primeira exposição pedagogica do Rio de Janeiro.—Documentos. Rio de Janeiro. 1 vol.

Proença (João Justino de): O melhor porto ao sul do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Programma do ensino do Imperial Collegio de D. Pedro II. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Projecto de melhoramento da barra e construcção de um porto no Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Queiroz (Aristides Galvão de): Observações sobre alguns erros da moderna escola da «barateza kilometrica» nas estradas de ferro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Rebouças (André e José): Ensaio do indice geral das madeiras do Brazil.—1.º fasc. (A B C). 1877.—2.º fasc. (D a L). 1878.—3.º fasc. (L a Y). 1878. Rio de Janeiro. 3 v. enc.

Reis (Malvino da Silva): Situação economica do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Relatorio dos actos da Direcção da Associação Commercial do Porto no anno de 1885. Porto, 1886. 1 vol.

—do Director do Jardim Botanico, Rio de Janeiro. 1 fasc.

—do Lyceu d'Artes e Officios. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Relatorio sobre o melhoramento da barra do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 3 vol.

Relatorios da direcção da Sociedade Martins Sarmento, 1885 e 1886. Porto. 2 fasc.

Revista do Instituto Polytechnico Brazileiro e das obras publicas do Brazil. Rio de Janeiro. 1 vol.

Revista de Guimarães. Publicação da Sociedade Martins Sarmento. 1885-1886. Porto. 2 vol.

Revista da Secção da Sociedade de Geographia de Lisboa no Brazil. 2.ª serie. N.º 1, 2 e 3. Rio de Janeiro, 1885-1886. 3 fasc.

Revista Scientifica publicada pela sociedade Athneo do Porto. N.º 1 a 4. Porto, 1885. 4 fasc.

Ribeiro (João): Estudos philologicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Sabonadière (Guilherme): O fazendeiro de café em Ceylão. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Saldanha da Gama (Dr. José de): Relatorio sobre a exposição Universal de Philadelphia em 1876. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Santos (Dr. Thomaz Delfino dos): Discurso na faculdade de medicina do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Senna (Dr. Antonio Joaquim de): Systema de telephonia e telegraphia Van Rysselberghe, privilegiado pelo governo imperial. Rio de Janeiro. 1 f.

Senado (O): e a reforma constitucional. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Silva (F. J. Betencourt da): Vulgaridades de arte. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Siqueira (Dr. José de Goes e): Breve guia para o tratamento das molestias pelo methodo dosimetrico. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souto (Vieira): Revista do Instituto Polytechnico Brazileiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souza (José Alvares de Araujo e): Provincia de Minas Geraes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souza (Paulino José Soares de): Administração local. Projecto apresentado á camara dos snrs. deputados. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Vecchio (Bacharel Adolpho José Del): Madeiras e granitos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Trabalhos da Commissão scientifica de exploração. Rio de Janeiro. 1 fasc.

---

3. Livros adquiridos por compra

Agenda du Chimiste. 1886. 1 vol.

Allard (A.): Discours sur la crise agricole et manufacturière. Bruxelles, 1886. 1 vol.

André Daniel: L'année politique, 1884. Paris, 1885. 1 vol.

— L'année politique, 1885. Paris, 1886. 1 vol.

Annales de Physique et de Chimique. Paris, 1885-1886. 6 vol.

Annales des ponts et chaussées. Paris, 1885-1886. 2 vol.

Annales scientifiques de l'Ecole Normale superieure. Paris, 1886. 1 vol.

Aranha (Brito): Dicccionario Bibliographico portuguez, tomo X. Lisboa, 1883. 1 vol.

Armengaud (Ainé): Le vignole des mécaniciens. Essai sur la construction des machines. Paris, 1875. 1 vol. e atlas.

— Traité théorique et pratique des moteurs hydrauliques. Paris, 1858. 1 vol. in-4.º e atlas.

— Les scieries mécaniques et les machines-outils à travailler les bois. Paris, 1881. 1 vol. e atlas.

Atlas général composé de trent sept carts coloriées et gravées sur cuivre. Paris, 1885. 1 vol.

Angier (C. M.): Traité complet théorique et appliquée de comptabilité commerciale et industrielle. Paris, 1886. 1 vol.

Baillon (M. H.): Dictionnaire de Botanique. Paris. 1 fasc. 16 a 21.

Balling. Manuel pratique de l'art de l'essayeur. Paris, 1881. 1 vol. in-8.º

Bauschinger (J.): Elemente der graphischen Statik. Munchen, 1880. 1 vol. e atlas.

Bayle (E.): Cours de minéralogie et de géologie. Paris, 1869, (lith). fasc. 1 e 2.

Belanger (J. B.): Essai sur la solution mécanique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes. Paris, 1828. 1 vol.

Benevides (F. da Fonseca): Relatorio sobre a exposição universal de Paris em 1867. Instrumentos de physica e machinas de vapor. Lisboa, 1867.

Bertrand (P.): Systeme de navegation fluviéte. Paris, 1801. 1 vol.

Block (Maurice): Annuaire de l'économie politique et de statistique. Paris, 1885.

— Annuaire de l'économie politique et de la statistique. 1886. Paris, 1886. 1 vol. 12.º

Bluntschli (M.): Le droit international codifié. Paris, 1881. 1 vol.

Boileau (P.): Notions nouvelles d'hydraulique. 1881. 1 vol.

Bonnami (H.): Manuel de l'operateur ou tachéometre. Paris, 1883. 1 vol.

Bonniceau. Etudes et notions sur les constructions à la mer. Paris. 1 vol. e atlas.

Boussinesq (J.): Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris, 1877. 1 vol.

Bresse. Cours de mécanique et machine. Paris, 1885. 2 vol.

Bresse (Ch.) et ch. Rivière: Nouveau cours de physique. 2.me edition. Paris, 1886. 2 fasc.

Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. Paris, 1875. 1 volume.

Brun (F.): Traité pratique des operations sur le terrain. Paris, 1884. 1 volume.

Buchetti (J.): Les machines à vapeur actuelles. Paris. 1 vol. e atlas.

Buffon (N. de): Les canaux d'irrigations de l'Italie Septentrional. Paris, 1861. 3 vol.

Bulletin de la Société Chimique de Paris. Paris, 1885 e 1886. 2 vol.

Bulletin des sciences mathématiques. Paris, 1885-1886. 2 vol.

Burmester (Dr. L.): Lehrbuch der Kinematik. Leipzig, 1886. 2 fasc. e atlas.

Cacheux (E.): L'économiste pratique, texte e atlas. Paris, 1885. 2 v.

Carnoy (Joseph): Cours de géometrie analytique. Paris, 1882 a 1886. 2 vol.

Cauchy (Augustin): Oeuvres complétes. 1.ª serie, tomo V. Paris. 1 v

Cauvet (D.): Cours élémentaire de botanique, tomo 2.º Paris, 1885.

Cavallero (Agostino): Le Macchine a vapore il materiale e l'esercizio technico delle strade ferrate. Torino, 1882. 1 vol. e atlas.

Chalon (P. F.): Les explosifs modernes. Paris, 1886. 1 vol. in-8.º

Chateau (Th.): Technologie des batiments. Paris, 1882.

Claudel (G.): Étude sur le rivetage. Paris, 1882. 1 vol.

Cohen (D. X.): Bases para orçamentos. Lisboa, 1881. 1 vol.

Coligny (Le M. Anatole de): Recherches théoriques et expériment - les sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes avec huit planches. Paris, 1883. 2 vol.

Collignon (E.): Cours de mécanique appliquée aux constructions. 1.re partie. Résistance des matériaux. 3.me edition. Paris, 1885.

Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, 1885-1886. 4 vol.

Cornil (A. V.) et V. Babes: Les Bactéries et leur role dans l'anatomie et l'histoire pathologique. Paris, 1886. 1 vol.

Coste (H. et L. Maniquet: Traité théorique et pratique des machines à vapeur du point de vue de la distribution). Paris, 1886. 1 vol. e atlas.

Courtin (J.): Eléments de la théorie mécanique de la chaleur. Mons, 1882. 1 vol.

Courtois (A. H.): Étude sur les machines centrifuges, pompes et ventilateurs. Paris, 1881. 1 vol.

Cremona (L.): Les figures réciproques en statique graphique. Paris, 1885. 1 vol. e atlas.

Cresy (Edward): Encyclopedia of civil engineering. London, 1880. 1 volume.

Debauve (A.): Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées. 9.me fascicule, texte. Routes, 1 atlas. Paris, 1873.

—Procédés et matériaux de constructions. Paris, 1885, texte e atlas, 4 vol.

Debray (H.) et Joly: Cours de chimie. Paris 1876 e 1883 tomo 1.º e 2.º 2 vol.

Demombynes (G.): Les constitutions européennes. Parlements conseils provinciaux et communnaux et organisation judiciaire. Paris, 1883. 2 vol.

Desnoyers (M. Ph. Croizette) Cours de constrution des ponts. Paris, 1885. 2 vol. in-4.º e atlas.

Despeyrous. Cours de mécanique. Paris, 1884. 2 vol.

Diccionario Universal portuguez illustrado, vol. I e VI. Lisboa.

Dictionaire des finances, publiée sur la direction de M. Léon Say. Paris, 1883-1884. 4 fasc.

Dunker (J.): Atlas manuel de botanique. Paris. 1 vol.

Dini (U.): Fondamenti per la teorica delli funzioni di variabili reali. Pisa, 1878. 1 vol.

Dubosque: Murs de soutènement. Paris. 1 vol.

Dubuisson (J.): Études définitives d'une voie ferrée entre deux points données. Paris, 1882-83. 3 fasc.

Dumoncel (Le comte Th.) et Geraldy: L'electricité comme force motrice. Paris, 1884. 1 vol.

Dupuit (J.): Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables. Paris, 1863. 1 vol.

—Traité théorique et pratique de la conduits et de la distribution des eaux. Paris, 1865. 1 vol. e atlas.

Durand-Claye (C. Léon): Chimie appliquée à l'art de l'ingéniéur. Paris, 1885. 1 vol.

—et Leopold Marx. Routes et chemins vicinaux (Encyclopedie des travaux publics). Paris, 1885. 1 vol., 8.º

Émy (A. R.): Traité de l'art de la charpenterie. Paris. 4 vol.

Faye (H.): Sur l'origini du monde. Paris, 1885. 1 vol.

Fernique (A.): Album d'eléments et organes des machines. Paris, 1882. 1 vol.

Ferreira (C. A. P.): Guia de mecanica pratica. Lisboa, 1822.

—Guia do fogueiro conductor de machinas de vapor. Lisboa, 1883.

Fiedler (Dr. W.): Dei daretellende Geometrie in organischer Verbindemy mit der Geometrie des Lage. Leipzig, 1883 e 1885. 2 vol.

Figuier (L.): L'année scientifique et industrielle. 28ème et 29ème année. Paris. 2 vol.

Fino (G. C. da G. C.). Legislação e disposições regulamentares sobre empreitadas. Lisboa, 1879. 1 vol.

—Sobre caminhos de ferro. Lisboa, 1883. 1 vol.

—Ácerca do serviço d'obras publicas. Lisboa, 1881. 1 vol.

—Legislação e disposições regulamentares sobre expropriações. Lisboa, 1877. 1 vol.

—Sobre o serviço de pesos e medidas. Lisboa, 1884. 1 vol.

Flamant (A.): Stabilité des constructions, Résistance des materiaux. Paris, 1886. 1 vol. in-8.º

Foyot (L.) et A. Lanjalley: Dictionnaire des finances, publié sous la direction de Léon Say. Paris, 1884. 4 fasc.

Fréminville: Cours de machines à vapeur. Paris, 1880-1881. 1 vol. e atlas.

Frémy (M.): Encyclopedie chimique. Paris, 1885 e 1886. 10 vol.

Ganot (A.): Traité élèmentaire de physique. Paris, 1884.

Gaumet (F.): Traité de topographie. Paris, 1 vol.

Gayffier (J. de): Nouveau manuel complet des ponts et chaussées. Paris, 1868. 1 vol. 18.º

—Nouveau manuel complet des ponts et chaussés—Ponts et Aqueducs en maçonnerie. Paris, 1881. 1 vol. 16.º

Gomes (B. B.): Cartas elementares de Portugal. Lisboa, 1878.

Goupillière (Haton de la): Cours d'exploitation des mines. Paris, 1884. 2 vol. e atlas.

Graëff (M. A.): Traité d'hydraulique, précédé d'une introduction sur les principes généraux de la mécanique. Paris, 1882-1883. 3 vol.

Gruner (L.) Traité de métallurgie. 2 vol. e atl.

Guillemin: Navigation intérieure. Riviéres et canaux (Encyclopedi) des travaux publics). Paris, 1885. 2 vol.

Habets (A.): Cours de topographie. Paris, 1884. 1 vol.

Hallauer (O.): Moteurs à vapeur. Étude critique sur les essais de moteurs à vapeur. Paris, 1881. 1 vol.

Herget (F. et): Traité de mécanique théorique et appliquée 1.^me^ et 2.^e^ parties. Paris, 1885. 2 vol.

Herrmann (G.): Statique graphique des mécanismes. Paris, 1882. 1 volume.

Heumann (Capitaine): Les Russes et les Anglais dans l'Asie Centrale. Paris, 1885. 1 vol.

Hydraulique fluviale (Encyclopedie des travaux publics). Paris, 1884. 1 vol.

Ibanes (D. Carlos Ibanez e): Description geodesica de las Ilhas Baleares. Madrid, 1871. 1 vol.

—Estudos sobre nivelacion geodesica. Madrid, 1884. 1 folh.

—Experiencias hechas con el aparato de medir bases pertenciente a la comision des mapas de España. Madrid, 1859. 1 vol.

—D. Freitas Saavedra Menezes, D. Fernando Monet e D. Cesáreo Queiroga: Base central de la triangulation géodesique d'Espagne. Traduit par A. Laussedat. Madrid, 1865. 1 vol. in-4.°

Jacobi: Gesammelte Werke. Vierter Band. Berlin, 1886. 1 vol.

Jacquet (A.): Baréme du poids de métaux. Paris, 1879. 1 vol.

Jamin et Bouty: Cours de physique á l'usage de la classe de mathématiques spéciales. Paris, 1886. 2 vol. in-8.°

Jordan (M. Camille): Cours d'analyse de l'E'cole Polytechnique de Paris.—Tomo I. Calcul différentiel, 1882.—Tomo II. Calcul intégral. (Intégrales definies et indéfinies), 1883. Paris. 2 vol.

Jullien (C. E.): Traité theorique et pratique de la construction des machines à vapeur fixes, locomotives et marines. Paris. 1 vol. e atlas.

Kutter (W. R.): The new formula for meon velocity of dischange of rivers and canals. London, 1876. 1 vol.

La colonisation scientifique et les colonies françaises. Paris, 1884. 1 volume.

Laffineur (Jules): Hydraulique et hydrologie sauterraine et superficielle. Paris, 1882. 1 vol.

—Traité de la construction des romes hydrauliques. Paris. 1 vol.

—Guide pratique de l'ingénieur agricole. Paris. 1 vol.

Lagreve (H. de): Cours de navigation interieure. Paris, 1869. 2 vol.

Laissle (Fr.) et Ad. Schnebler: Calcul et constructions des ponts métalliques. Paris. 2 vol.

La Gournerie: Traité de géometrie descriptive. 1.^er^ partie. Paris, 1873. 1 vol.

Lanessan (J. L. de): Manuel d'histoire naturelle médicale. Paris. 3 volumes.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas, agricolas e florestaes. 2.ª e 3.ª edição. Lisboa, 1879 e 1885. 2 vol. in-8.°

Laurent: Traité de analyse. Tome I. Paris, 1885.

Lelontre (Georges): Les transmissions par courroies, cordes et cables métalliques. Paris, 1884. 1 vol.

Leroy-Beaulieu (P.): Le collectivisme. Paris, 1885. 1 vol.

Liagre (J. B. J.): Calcul des probabilités et théorie des erreurs. Bruxelles et Paris, 1879. 1 vol. in-8.º

Liais (Emm.): Traité d'astronomie appliquée à la géographie et a la navigation suivie de la géodesie pratique. Paris, 1869. 1 vol. 8.º

Linglin (E.): Traité elementaire de la résistance des materiaux. Paris, 1882. 1 vol.

Liouville (J.): Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, 1836 a 1855. 20 vol.

—Journal de mathématiques pures et appliquées. 4.me serie, tome 1.er Année 1885. Paris. 1 vol.

Martins (J. P. d'Oliveira): A circulação fiduciaria. Lisboa, 1883.

Mascart (E.): Leçons sur l'éléctricité et le magnétisme. Paris, 1886. 1 vol.

Mastaing: Cours de mécanique appliquée a la resistance des materiaux. Paris, 1874. 1 vol.

Maurer (Maurice): Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planches, pentres, ponts. Deuxième edition. Paris, 1886. 1 v. e atlas.

Menger (Dr. C.): Die Irrthümer des historismus in der Deutschen Nationalökonomie. Wien, 1884.

Moessard (P.): Topographie et géodesie. Cours de Saint-Cyr. 1 vol.

Moinot (J.): Levés de plans à la Stadia. Paris, 1877. 1 vol.

Morton (Fr.): Traité théorique et pratique des opérations commerciales et financières. Paris, 1879. 2 vol.

Moutier (J.): La thermo dynamique et ses principales applications. Paris, 1885.

Muller (E.): Cours de constructions civiles. Paris, 1882. 1 vol.

Muller-Bresláu et F. Seyrig: Elements de Statique graphique appliquée aux constructions. Paris, 1886. 1 vol. e atlas.

Navièr: Resumé des leçons données à l'E'cole des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique. Paris 2 vol.

Nazzani (J.): Trattato di idraulica pratica. Milano, 1883. 1 vol.

Nouvelles annuales de la construction. Recueil mensuel fondé por C. A. Oppermann. Paris, 1886. 1 vol.

Novicour (J.): La politique internationale. Paris, 1886. 1 vol.

Oppermann (C. A.): 300 projects et propositions utiles. Paris, 1886. 1 vol.

Passy (G. de): E'tude sur le service hydraulique. Paris, 1876. 1 vol.

Pereire (E.): Tables de l'intérèt composé des annuités et des rentes viagères. Paris, 1882. 1 f. 4.º

Perriquet (E.): Traité théorique et pratique des travaux publics, tom 1.er et 2.e 1883. 2 vol.

Phillips (M.): Cours de hydraulique et d'hydrostatique professé à l'Eicole Centrale. Paris, 1875. 1 vol.

Plateau (J.): Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Paris, 1873. 2 vol.

Pochet (M. Léon): Nouvelle mécanique industrielle. Paris, 1874. 1 v.

Pellion (L.): Traité théorique et pratique des pompes et machines a elever les eaux. Paris, 1885. 1 vol. e atlas.

Pern (J.): La tachéometrie ou l'art de lever des plans... Paris, 1858. 1 vol.

Portefeuille économique des machines de l'outillage et du matériel. Paris, 1886. 1 vol.

Putzeys (Dr. F.): L'Hygiéne dans la construction des habitations privées. Paris, 1885. 1 vol.

Rankine (W. J. Macquorn): Manual of civil engineering. London, 1885. 1 vol.

Regains scientifiques (lithog.) Paris, fasc. 1 a 6 e 8.

Reid (Henry): The science and art of the manufacture of Portland ciment. London, 1877. 1 vol.

— Pratical treatrise on natural and artificial concreti; its vanieties and constructive adoptations. London, 1879.

Résal (J.): Ponts métalliques (Encyclopédie des travaux publics). Paris, 1885. 1 vol. in-8.º

Revista d'Obras Publicas e minas. Annos XV e XVI. Lisboa, 1884 e 1885. 2 vol.

Revue Scientifique. Paris, 1885 e 1886. 4 vol.

Ritter (Dr. Phil.): Elementary theory and calculation of iron bridges and roots. London, 1879. 1 vol.

Rodbertus-Jagetzow (Dr. Carl.): Das Capital. Berlin, 1884.

Rodrigues (F. d'Assis): Diccionario technico e historico de pintura, esculptura, architectura e gravura. Lisboa, 1875. 1 vol.

Roscher (Wilhelm): Nationalókonomik des Handels und Gerverbfleisszes. Stuttgart, 1882.

Schaffle (Dr. A. F.): Die Aussichtslosogkeit der social demokratie. Tübingen, 1885.

Schmoller (G.): Neber einige Grundfragen des Rechets und der Volkswirthschaft. Leipzig, 1875.

Sergent (E.): Traité pratique et complet de tous les mesurages, métrages, jangeages de tous les corps. Paris, 1874. 2 vol. e atlas.

Sicard (H.): Elèments de zoologie avec 750 figures intercalées dans le texte. Paris, 1883. 1 vol.

Smiths: Les coulitions et les grèves. Paris, 1885. 1 vol.

Société française de physique. Collection de memoires relatifs à la physique, tom II. Paris, 1885.

Summer (W. G.): Le protectionisme. Paris, 1886. 1 vol.

Taffe (A.): Application de la mécanique aux machines. Paris, 1872. 1 vol.

Tannery (Jules): Introduction a la théorie des fonctions d'une variable. Paris, 1886. 1 vol.

Thompson (Silvanus): Traité théorique et pratique des machines dynamo électriques. Trad. de l'angláis pàr E. Boistel. Paris, 1886. 1 vol.

Thomsen (J.): Thermochemische Untersuchungen. Leipzig, 1882. 4 vol. in-8.º

Turazza (Domenico): Tratatto di idraulica pratica. Padova, 1880. 1 v.

Uhland (W. H.): Les nouvelles machines à vapeur, notamment celles

qui ont figuré à l'Exposition Universelle de 1878. Paris, 1879. 6 fasc. e atlas.

Unwin (M. W. Cauthorne): Éléments de construction de machines. Paris, 1882. 1 vol.

Valleroux (P. Hubert): Les corporations d'arts et métiers et les syndicats professionelles en France et à l'etranger. Paris, 1885. 1 vol.

Vambery (Arminius): La lutte future pour la possessions de l'Inde. Paris, 1885. 1 vol.

Vigreux: Theorie et pratique de l'art de l'ingénieur ou constructeur de machines ** Paris, 18 fasc. e atlas.

Wanderley (G.): Traité pratique de constructions civiles. Paris, 1881-85. 3 vol.

Wits (M. Aimé): E'tudes sur les moteurs à gaz tonnant. Paris, 1884. 1 vol.

Wolf (C.): Les hypotheses cosmogoniques. Paris, 1886. 1 vol.

Wurts (A.): Dictionnaire de chimie pure et appliquée.—Supplement. Paris, 1886.

Zeller (F.): Zur Erkeuntnisz unserer Staatswirthschaftlichen Zustände. Berlin, 1885.

II. — Gabinete de historia natural

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* para 1878-1879, pag. 39-41.

Relação d'apparelhos e mineraes obtidos este anno:

Microscopio para trabalhos de mineralogia de Zeiss com o apparelho de illuminação de Albe, cinco oculares, seis objectivos, micrometros objectivos e oculares e camara clara de Abbe.

Goniometro de Carrangeot.

Goniometro de Wollaston.

Dichroscopio de Haidinger.

50 preparações microscopicas de rochas.

10 mineraes dichroicos.

25 laminas de crystaes uni e biaxiaes.

100 mineraes mostrando a diversidade de côr e lustre.

75 mineraes para o estudo das modalidades de estructura, fractura e aggregação.

25 mineraes mostrando as principaes direcções de clivagem.
25 mineraes para a demonstração das propriedades opticas.
25 mineraes para mostrar a diversidade de peso especifico.
25 mineraes para o estudo dos phenomenos electricos e magneticos.
25 mineraes para o estudo das propriedades organolepticas.
100 pseudomorphoses.
300 exemplares de rochas e fosseis.

III. — Gabinete de Machinas e de Physica

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* para 1884-1886, pag. 57.

IV. — Laboratorio Chimico

1.—Sobre este Laboratorio veja-se o *Annuario* de 1878-1879, pag. 45-59; *Annuario* de 1879-1880, pag. 47-57; *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-67; *Annuario* de 1881-1882, pag. 83-97; *Annuario* de 1882-1883, pag. 143-162; *Annuario* de 1883-1884, pag. 117-203; *Annuario* de 1884-1885, pag. 58-59.

2.—Apparelhos adquiridos para o laboratorio:

1 Apparelho de Berthelot para medir o calor especifico dos liquidos, I.

307— 1 Apparelho de Scheibler completo, para seccar e evaporar no vacuo, I.

146— 2 Apparelhos para desenvolver acido sulphydrico ou carbonico, I.
897— 4 Apparelhos de deslocamento de Drechsel (2 de 250 centimetros e 2 de 500 centimetros), I.
95— 1 Apparelho de Victor Meyer, para determinar a densidade dos vapores, I.
96— 1 Apparelho. Idem, outro modelo, I.
101— 3 Apparelhos de Anschütz e Schulz, para determinar o ponto de fusão, I.
Apparelho para determinar o ponto 0 dos thermometros, I.
1 Apparelho de Jungfleisch para a preparação da acetylena, I.
1448—12 Arcos de madeira, (2 de 18 cent.; 2 de 21; 2 de 25; 2 de 30; 2 de 35; 2 de 40), IX.
496— 1 Armadura para tubos de Geissler, IX.
1 Balão de 10 litros, de collo curto, para a theoria da fabricação do acido sulfurico, I.
1041—10 Balões de collo estreito, (5 de 1000 cent.; 5 de 500 cent.), X.
738— 1 Barometro de Geissler, I.
495— 1 Bobina de inducção de Rhumkorff, n.° 3, I.
259 l— 2 Campanas de torneira, com manometro, assentes sobre prato de vidro, X.
14—40 Capsulas de porcellana de Berlim, de fundo chato e bico: (10 n.° 1; 10 n.° 2; 10 n.° 3; 10 n.° 4), XI.
948— 3 Cavalleiros de centigramma, VI.
949— 3 Cavalleiros de milligramma, de fio d'aluminio, VI.
299— 1 Desseccador de Fresenius, com torneira e tubo na tampa, para o vacuo, I.
1735— 2 Desseccadores de Scheibler, I.

2 Frascos de 10 litros para o apparelho de analyse organica de Cloez, X.
683— 5 Frascos para densidades, com tara, de 10, 20, 25, 50, 100 gr. em um estojo, IV.
1 Frasco de dois orificios para o apparelho de Cloez, X.
95— 5 Frascos pequenos para determinação de densidades, IV.
259 f—15 Frascos Erlemmeyer de fórma conica para filtrações accelleradas, de 350, 400, 500 cent., X.
1733— 4 Funis de Victor Meyer de 21 e 26 cent., X.
1574— 4 Garrafas de lavagem com rolha esmerilhada de 400 cent., IX.
1006— 1 Hygrometro de cabello de Hermann e Pfister, IX.
1060— 1 Machuca-rolhas de ferro, IX.
Pesos de aluminio, 3 collecções: de 0,0001; 0,0002; 0,0005; 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 gr., com pinça, em um estojo, IV.
689— 1 Picnometro de Sprengel, IV.
781— 1 Pilha de 4 elementos de Keiser e Schmidt, I.
1 Pipeta de Mohr com estojo, V.
1 Proveta de seccar para o apparelho de Cloez, X.
2 Pyrometros de Berthelot, sem supporte, VII.
1 Pyrometro calorimetrico de Salleron, VII.
1 Regulador Moitessier, IX.
1454—20 Retortas tubuladas, de 250, 500, 1000 cc., X.
2 Rolhas de cobre para o apparelho d'analyse organica, IX.
739— 1 Supporte com pinça, para o barometro, IX.
1 Thermometro para o barometro, VII.
272— 4 Trompas hydropneumaticas aperfeiçoadas, de Bulk, IX.

271— 4 Trompas hydropneumaticas aperfeiçoadas, de Bulk, pequenas, IX.
3 Tubos curvos nas extremidades, para chloreto de calcio, para o apparelho de Cloez, X.
2 Tubos de ferro para o apparelho de Cloez, IX.
1478*b*—10 Tubos de destillação fraccionada, de 300 e 400 cc., I.
833— 4 Vasos de porcellana, para decantação, de 3 e 6 litros, XI.

N. B. Os numeros que antecedem estes artigos são os do *Preis-verzeichimes Cheimischer apparate*, von C. Gerhardt, Sechste auflage, Bonn, 1882.

3 Allongas, X.
Apparelho de Berthelot para determinar o ponto de ebullição, I.
Apparelho de Schloesing para doseamento de ammoniaco, II.
2 Apparelhos de S.[te] Claire Deville para filtrar o mercurio, I.
Apparelho de Zulkorwsky, para recolher o azoto, I.
Apparelho de Stadel, idem, I.
18 Balões, X.
Balão de densidades de Chancel, IV.
5 Balões de 300 cc. para determinações calorimetricas, de Baudin, V.
5 Ditos de 500, V.
5 Ditos de 1000, V.
Bureta de gaz de Bunte, III.
4 Copos de experiencias, X.
Estufa de Anchütz e Kekulé, IX.
Estufa de Wiesnegg, IX.
4 Frascos com rolha comprida e em ponta, de dupla rolha a capsula, X.
4 Frascos tubulados, X.

5 Funis de bola para filtração d'acidos sobre o amiantho, de 9 cent. de diametro, X.
2 Funis de cobre, IX.
Mesa de experiencias de electricidade, I.
5 Matrazes para oxydo de cobre, X.
Microscopio invertido para estudos chimicos, I.
5 Pipetas para gazes, simples, III.
2 Pipetas para trasvasar gazes, duplo cylindro, III.
50 Pires de porcellana para o apparelho de Marsh, IX.
3 Placas porosas absorventes de 12 vezes 17 cent.
6 Provetas para chloreto de calcio, para balanças, grande modelo, X.
18 Retortas, X.
8 Retortas tubuladas, X.
2 Syphões de torneira para acidos, X.
1 metro de têa de cobre, IX.
2 Thermometros calorimetricos de 0° a 13°, divididos em $\frac{1°}{50}$, construidos por Baudin, n.os 10423 e 10424, VII.
2 Ditos de 12 a 23°, n.os 10425 e 10426, VII.
2 Ditos n.os 10427 e 10428, VII.
1 Dito de 1° a 30°, dividido em $\frac{1}{10}$, VII.
20 Tubos em U para doseamento da agua, X.
15 Tubos para pesagens, X.
2 Tubos de Winkler, X.
1 k.° Tubo de cautchu, IX.
Vareta de carvão, IX.
2 Vasos electrolyticos, X.
10 Vasos de precipitação, X.
5 Ditos de 250 cc., X.
5 Ditos de 500 cc., X.

N. B. Os numeros romanos depois dos artigos referem-se ás divisões adoptadas no catalogo (Annuario da Academia Polytechnica de 1883-1884 pag. 117).

V.—Jardim Botanico

1. Sobre este jardim veja-se: *Annuario* de 1877-1878, pag. 29-30; *Annuario* de 1878-1879, pag. 51-56; *Annuario* de 1879-1880, pag. 44-45 e 230; *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57; *Annuario* de 1881-1882, pag. 99-113; *Annuario* de 1882-1883, pag. 137-142; *Annuario* de 1883-1884, pag. 203-247.

VI. — Observatorio Astronomico

Veja-se a *Memoria historica* do conselheiro Adriano Machado, já citada, *Annuario* de 1877-1878, pag. 207 e 223. Conserva-se, ainda hoje, imprestavel para observações.

1—*Collecções de instrumentos astronomicos e maritimos.* Vejam-se os artigos XLIX e LVII do decreto de 29 de julho de 1803; a memoria, já citada, a pag. 206 do *Annuario* de 1877-1878; *Annuario* para 1878-1879, pag. 57-59; e o *Annuario* para 1884-1885, pag. 60.

Relação dos instrumentos de topographia comprados no presente anno lectivo:

Um theodolito.

Um tacheometro.

VII. — Gabinete de Cinematica (Systema Reuleaux)

Director, o lente da 3.ª cadeira J. A. Albuquerque

Continuação do catalogo publicado nos *Annuarios* de 1881-1882, pag. 115 a 120, de 1884-1885, pag. 61 e 62. (Modelos adquiridos no anno lectivo anterior).

Numeração geral	Numeração de classe	DESIGNAÇÃO DOS MODELOS	Formulas
		***M.)* Parafusos**	
70	1	Cadeia simples de parafuso. . . . } reversiveis.	$(S^{\pm}PC)$
71	2	Cadeia de parafuso } reversiveis.	(S')
72	3	Dito . . . . . . } reversiveis.	(S'_2C')
73	4	Cadeia de parafuso com espera movendo-se automaticamente	$(S'P'C')^{\circ}+2(C''C_2)$
74	5	Parafuso alternante de *Whitworth*	$(S'P'C')^{\circ}_{5}$
75	6	Parafuso duplo de *Napier*. . .	$(\dot{S}P'C')^{\circ}+(C'P)$
76	7	Parafuso differencial	(S'_2P')
77	8	Parafuso differencial com engrenagem de rodas.	$(S'C'P')+2(C''_2C_2)$
78	9	Machina furadora cylindrica com rodas recorrentes . . .	$(S'P'C')+(C_{23}C''_3)$

FREQUENCIA — ESTATISTICAS

Lista alphabetica dos alumnos da Academia, indicando a sua filiação, naturalidade, e as cadeiras em que se matricularam

1—Abel Brandão Leite Pereira Cardoso de Magalhães, filho de Antonio Brandão de Andrade da Cunha e Lima, natural de Thomé de Covellos, concelho de Baião—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

2—Abel Fontoura da Costa, filho de João Maria da Costa, natural de Alpiárça, concelho de Almeirim—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

3—Abilio Ribeiro de Miranda, filho de Joaquim Corrêa de Miranda, natural de Santo Thyrso—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 8.ª (2.ª parte);

4—Accacio de Sampaio Telles e Paiva, filho de José de Paiva Cardoso, natural de Leiria—8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

5—Adelino Pereira da Silva, filho de Francisco Pereira da Silva, natural de Leiria—6.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

6—Affonso da Silveira Machado de Vasconcellos Castello Branco, filho de João da Silveira Machado Castello Branco, natural de Vizeu—3.ª e 4.ª (1.ª parte), e 6.ª (1.ª parte);

7—Adolpho Augusto de Vasconcellos Artayett, filho de José Augusto de Vasconcellos Artayett, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

8—Adolpho Augusto Baptista Ramires, filho de Antonio Augusto Baptista, natural de Bragança—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

9—Adolpho Maria Barbosa, filho de Antonio Joaquim Rodrigues Barbosa, natural de S. Salvador, concelho de Villa Pouca d'Aguiar—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

10—Albano Annibal de Barros, filho de Francisco Augusto de Barros, natural de Bragança—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

11—Albano Augusto d'Oliveira, filho de Delphina da Rocha Oliveira, natural de Recarei, concelho de Paredes—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

12—Alberto Alvaro d'Armada, filho de Joaquim Alvaro d'Armada, natural do Rio de Janeiro, freguezia de S. José—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

13—Alberto Augusto Gomes d'Almeida, filho de José Gomes d'Almeida, natural de Castellões, concelho de Macieira de Cambra—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

14—Alberto Barbosa de Queiroz, filho de Antonio Barbosa de Queiroz, natural d'Ancede, concelho de Baião—11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

15—Alberto Nunes de Figueiredo, filho de Agostinho José de Figueiredo, natural do Porto—1.ª;

16—Alberto Ortigão de Miranda, filho de João Baptista de Miranda Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

17—Alberto Pereira Pinto d'Aguiar, filho de Anna Emilia d'Aguiar, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

18—Alberto Vieira Gomes, filho de Manoel Joaquim Gomes, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

19—Alberto Xavier Teixeira de Barros, filho de Ignacio Xavier Teixeira de Barros, natural de Viade, concelho de Celorico de Basto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

20—Alexandre Carneiro Geraldes da Silva Moreira, filho de José Carneiro Geraldes da Silva Moreira, natural de Villa-Boa do Bispo, concelho d'Amarante—4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

21—D. Alexandre de Castro Pamplona, filho do conde de Rezende, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

22—Alexandre Gomes da Silva, filho de Antonio Gomes da Silva, natural de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

23—Alexandre Martins Pamplona Ramos, filho de Antonio Ramos Moniz Corte Real, natural de S. Pedro dos Biscoitos, concelho de Villa Nova da Praia (Ilha Terceira)—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

24—Alfredo Araujo d'Almeida Campos, filho de Antonio d'Almeida Querido, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

25—Alfredo Arthur Lopes Navarro, filho de Antonio José Lopes Navarro, natural de Coimbra—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

26—Alfredo Augusto Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

27—Alfredo Baptista Coelho, filho de João Baptista Coelho, natural de Santo Thyrso—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

28—Alfredo de Barros Leal, filho de José Joaquim de Barros, natural de Perozêllo, concelho de Penafiel—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

29—Alfredo da Costa Rodrigues, filho de Antonio da Costa Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

30—Alfredo Ernesto Dias Branco, filho de Henrique Guilherme Thomaz Branco, natural de Villa Real—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

31—Alfredo Pereira Martins de Lima, filho de José Joaquim Martins de Lima, natural de Vianna do Castello—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

32—Alfredo Pereira Pimenta, filho de Eduardo Pereira Pimenta, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

33—Alfredo Simões Ramos, filho de José Ramos de Proença Saraiva, natural de Souto da Caza, concelho de Fundão—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

34—Alfredo da Silva Reis, filho de João José da Silva, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

35—Alfredo de Souza Azevedo, filho de João Baptista de Souza Azevedo, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

36—Alipio Augusto Trancoso, filho de Firmino Antonio Trancoso, natural de Bragança—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

37—Alvaro Aurelio de Souza Rego, filho de José Maria Rego, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

38—Alvaro Augusto Ferreira, filho de Antonio Bernardo Ferreira, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

39—Amilcar de Castro Abreu e Motta, filho de João Maria d'Abreu e Motta, natural de Arcos de Val-de-Vez—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

40—Annibal Augusto Sanches Souza e Miranda, filho de Eduardo Augusto Sanches Souza Miranda, natural de Beja—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

41—Annibal Augusto Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

42—Annibal Barbosa de Pinho Lousada, filho de Luiz Barbosa de Pinho Louzada, natural de Irivo, concelho de Penafiel—11.ª (1.ª parte);

43—Annibal Bettencourt, filho de Nicolau Moniz Bettencourt, natural d'Angra do Heroismo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

44—Annibal Lopes Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

45—Anthero Elysio do Nascimento Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

46—Antonio Alberto Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

47—Antonio d'Almeida Moraes Pessanha, filho de José Pereira da Silva Cardoso, natural de Passos, concelho de Sabroza—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

48—Antonio Augusto d'Aguiar Cardoso, filho de Silvestre d'Aguiar Bizarro, natural da Villa da Feira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

49—Antonio Augusto d'Almeida, filho de João Antonio d'Almeida, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

50—Antonio Augusto de Castro Soares, filho de José Bonifacio do Carmo Soares, natural de Oleiros, concelho da Feira—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

51—Antonio Augusto Pereira Cardoso, filho de João Pereira Cardoso, natural d'Armamar—10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

52—Antonio Augusto da Rocha Peixoto, filho de Antonio Luiz da Rocha Peixoto, natural da Povoa de Varzim—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

53—Antonio Baptista Alves de Lemos, filho de Joaquim Baptista Alves de Lemos, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

54—Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de S. Miguel de Bairros, concelho de Castello de Paiva—3.ª, 4.ª, (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

55—Antonio Evaristo de Moraes Rocha, filho de João Evaristo Rocha, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

56—Antonio Ferreira da Silva Barros, filho de José Ferreira da Silva Barros, natural de S. Mamede de Infesta, concelho de Bouças—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 9.ª;

57—Antonio Geraldo da Cunha, filho de José da Cunha Alves de Souza, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

58—Antonio Joaquim de Gouveia Osorio, exposto, natural de Moncorvo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª);

59—Antonio Joaquim Judice Cabral, filho de José Augusto Pinto Cabral, natural de Lagos—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

60—Antonio José de Lima, filho de José Antonio de Lima, natural de Pereiro, concelho de Barcellos—3.ª, 4.ª, (1.ª parte) 16.ª (1.ª parte) 18.ª (3.ª parte);

61—Antonio José da Motta Campos Junior, filho de Antonio José da Motta Campos, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

62—Antonio José Teixeira Junior, filho de Antonio José Teixeira,

natural de Casaes do Douro, districto de Vizeu—3.ª, 4.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

63—Antonio Julio Ferreira de Barros, filho de Sabino Ferreira de Barros, natural de Murça, districto de Villa Real—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

64—Antonio Lopes Baptista, filho de João Lopes Baptista, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

65—Antonio Luiz Soares Duarte, filho de Manoel Francisco Duarte, natural do Porto—4.ª (1.ª parte) e 5.ª (1.ª parte);

66—Antonio Manoel Botelho, filho de Francisco de Paula Botelho, natural de Belem—2.ª, 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

67—Antonio Manoel Pelleias, filho de Luiz Manoel Pelleias, natural da Torre de Dona Chamma, concelho de Mirandella—1.ª e 9.ª;

68—Antonio Maria Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Provezende, concelho de Sabroza—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

69—Antonio Martins Delgado, filho de João Martins Delgado, natural de Perre, concelho de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

70—Antonio Pedro Saraiva, filho de José Pedro Saraiva, natural de Villa Nova de Fozcôa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

71—Antonio Pinto Rodrigues Fernandes, filho de Joaquim Pinto Fernandes, natural d'Ancede, concelho de Baião—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

72—Antonio Rigaud Nogueira, filho de Francisco Rodrigues Nogueira, natural da Bahia (Brazil)—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª —;

73—Antonio dos Santos Pinto, filho de Manoel dos Santos Pinto, natural de S. Bartholomeu de Paramos, concelho de Carrazeda d'Anciães—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª) e 11.ª (1.ª parte);

74—Antonio de Souza Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª e 14.ª —;

75—Antonio Thomaz Ferreira Cardoso, filho de Antonio Joaquim Santhiago, natural d'Oliveira d'Azemeis—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

76—Antonio Xavier Gomes dos Santos, filho de Antonio Gomes dos Santos, natural de S. Miguel do Souto, concelho da Feira—3.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

77—Armindo Augusto Girão Guimarães, filho de José Antonio Girão, natural de Vizeu—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

78—Arnaldo Arthur Ferreira Braga, filho de Arthur Aureliano Ferreira Braga, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

79—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira, filho de João Antonio Lourenço Gomes Ferreira, natural de Villarinho de Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

80—Arthur Alberto Vaz Pereira, filho de Antonio Pereira, natural de Valença do Minho—11.ª (1.ª parte);

81—Arthur Augusto d'Albuquerque Seabra, filho de Armando Arthur

Ferreira de Seabra da Motta e Silva, natural do Porto—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 8.ª, (2.ª parte) e 9.ª;

82—Arthur Hygino Soares, filho de José Victorino Soares, natural d'Angra do Heroismo—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

83—Arthur Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (3.ª parte);

84—Arthur Pinto Malheiro, filho de Manuel Pinto Malheiro, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

85—Arthur Vieira de Castro, filho de José Antonio Vieira de Castro, natural de Fafe—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

86—Augusto Guedes da Silva, filho de Clemente Guedes da Silva, natural de Crestuma, concelho de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

87—Augusto Vieira Nobre, filho de José Pereira Nobre, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

88—Augusto Velloso Ferreira, filho de Augusto Alberto da Silva Ferreira, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

89—D. Aurelia de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

90—Aurelio Belizario Carrajola Travassos Neves, filho de José Francisco Travassos Neves, natural de Tavira—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

91—Bellarmino Baptista Vasconcellos, filho de Antonio Soares Moreira de Vasconcellos, natural de Cepellos, concelho d'Amarante—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

92—Bento de Carvalho Miranda, filho de José de Carvalho Miranda Leite, natural do Porto—2.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte):

93—Bernardo José Borges, filho de Manuel José Borges, natural da Regoa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

94—Bomfilho Diniz, filho de Antonio Diniz, natural de Macau—9.ª, 10.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

95—Carlos Alberto Vianna Pedreira, filho de Joaquim Maria Pedreira, natural de Vianna do Castello—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

96—Carlos d'Andrade Villares, filho de Antonio Joaquim d'Andrade Villares, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte):

97—Carlos Augusto Affialo Carneiro Geraldes, filho de José Carneiro Geraldes, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

98—Carlos Augusto Teixeira Babo, filho de José Joaquim Teixeira Babo, natural de Figueiró, concelho d'Amarante—11.ª (1.ª parte);

99—Carlos Fernando Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—1.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

100—Carlos Frederico Braga, filho de Frederico Ernesto Braga, natural do Porto—1.ª —;

101—Carlos Henriques Coisne, filho de Pedro Francisco José Coisne, natural de Steeniverk (França)—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

102—Carlos Henriques da Silva Maia Pinto, filho de Henrique Pinto, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

103—Carlos José Gomes Brandão, filho de José Antonio Gomes Brandão, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—2.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

104—Casimiro Antonio d'Oliveira, filho de Francisco José d'Oliveira, natural de Mosteiro, concelho de Vieira—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

105—Casimiro Jeronymo de Faria, filho de Jeronymo Domingos de Faria, natural de Galafura, concelho da Regoa—3.ª, 4.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

106—Cesar Augusto Gonçalves da Costa Lima, filho de Francisco Gonçalves da Costa Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

107—Christovão Teixeira Machado, filho de Francisco Teixeira Machado, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

108—Custodio Martins Henriques, filho de Joaquim Martins Henriques, natural de Pecegueiro, concelho de Sever do Vouga,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

109—Delfim Ferreira da Silva, filho de Antonio Joaquim Ferreira da Silva, natural de Couto de Cucujães, concelho de Oliveira d'Azemeis—7.ª (1.ª parte);

110—Deolindo Ferreira de Mello e Souza, filho de José Ferreira de Mello, natural de Margaride, concelho de Felgueiras,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

111—Eduardo Alfredo de Souza, filho de João José de Souza, natural do Porto,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

112—Eduardo Augusto Soares de Freitas, filho de Antonio Joaquim de Freitas, natural de Villa Cova da Lixa,—6.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

113—Eduardo de Barros, filho de Adelaide Candida de Barros, natural do Porto,—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

114—Eduardo Gonçalves de Mattos, filho de José Gonçalves de Mattos, natural do Porto,—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª) e 10.ª (1.ª parte);

115—Eduardo de Moura, filho de Francisco Antonio Marques de Moura, natural de Ilhavo,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

116—Eduardo Nunes d'Oliveira, filho de Manuel Nunes Cancella, natural de Figueiró dos Vinhos,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

117—Eduardo Teixeira Leite, filho de Antonio Teixeira Leite, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte) 9.ª, 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

118—Eduino Rocha, filho de Justino Augusto Rocha, natural da Horta, ilha do Fayal (Açores),—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

119—Ernesto Augusto de Castro Guimarães, filho de João Jeronymo da Fonseca Guimarães, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 17.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

120—Ernesto Eugenio Alves de Souza Junior, filho de Ernesto Eugenio Alves de Souza, natural do Porto—12.ª, 13.ª e 14.ª;

121—Feliciano Moreira Alves, filho de Manoel Moreira Alves, natural de Capello, concelho de Penafiel—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

122—Fernando José d'Almeida, filho de Francisco José d'Almeida, natural de S. Pedro do Sul—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

123—Fernando de Miranda Montenegro, filho de Manoel Monteiro da Silva Ribeiro de Miranda, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

124—Fernando de Souza Magalhães, filho de Antonio Ignacio de Souza, natural de Jugueiros, concelho de Villa do Conde—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª, 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

125—Filippe de Souza Carneiro Canavarro, filho de Cypriano de Souza Carneiro Canavarro, natural da Regoa—12.ª 13.ª e 14.ª;

126—Flavio Augusto Marinho Paes, filho de Carlos Augusto Paes, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

127—Flavio Norberto de Barros, filho de Manoel Antonio de Barros, natural de Valença do Minho—8.ª (1.ª e 2.ª) e 10.ª (1.ª parte);

128—Fortunato d'Azevedo Varella, filho de Antonio d'Azevedo Varella, natural de Infias, concelho de Guimarães—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

129—Francisco Antonio de Magalhães, filho de Antonio Manoel de Magalhães, natural de Sarzedinho, concelho de S. João da Pesqueira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

130—Francisco d'Araujo Castro Coutinho, filho de Francisco José d'Araujo, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

131—Francisco Bernardino Pinheiro de Meirelles Junior, filho de Francisco Bernardino Pinheiro de Meirelles, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

132—Francisco Ferreira Figueiredo Leitão, filho de José Ferreira Figueiredo Leitão, natural de Santa Eulalia de Bésteiros, concelho de Felgueiras—7.ª, (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

133—Francisco Forbes de Bessa, filho de Joaquim de Bessa Pinto, natural do Porto—2.ª 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

134—Francisco Ignacio Párra, filho de Simão Antonio Párra, natural de Urros, concelho de Mogadouro—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

135—Francisco Ignacio Valladas Paes, filho de Antonio Maria Valente Paes Senior, natural de Serpa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

136—Francisco de Pina Vaz, filho de Jacintho de Pina Vaz, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

137—Francisco da Rocha e Cunha, filho de Manuel da Rocha e Cunha, natural de Pedorido, concelho de Paiva—1.ª e 11.ª (1.ª parte);

138—Francisco de Souza Pinto Cardoso Machado, filho de José de Souza Pinto Cardoso Machado, natural de Balteiro, concelho de Armamar—5.ª (1.ª parte);

139—Francisco Xavier de Souza Pinto Leitão, filho de Jeronymo Pinto Leitão, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

140—Gaspar José Tavares de Castro, filho de Antonio Tavares, natural de Castellões de Cambra—11.ª (1.ª parte);

141—Gregorio Corrêa Pinto Rolla, filho de Simplicio Arlindo Corrêa Rolla, natural da Regoa—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

142—Guilherme Louzada Marcenal, filho de Francisco Louzada Marcenal, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

143—Guilherme Moreira Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

144—Guilherme Nunes Godinho, filho de Manuel Gomes Godinho, natural de Almeirim—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª párte) e 11.ª (1.ª parte);

145—Heitor Corrêa da Silva Sampaio, filho de João Corrêa da Silva Sampaio, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

146—Henrique Carlos Rodrigues, filho de Antonio Francisco Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

147—Henrique José Martins Ferreira, filho de Antonio José Martins Ferreira, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

148—Humberto Pinto de Castro Araujo, filho de Manuel Rodrigues Sequeira Araujo, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

149—Hugo de Noronha, filho de Tito Augusto Duarte Noronha, natural de Ovar—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

150—Izidoro Pedro Leger Pereira Leite, filho de Pedro Euzebio Leite, natural de Lisboa—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

151—Izolino Aurelio Ferreira Ennes, filho de José Augusto Ennes, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

152—Jayme Augusto da Graça Falcão, filho de José Maria da Graça, natural de Bragança—2.ª, 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

153—João Alves Martins, filho de José Alves Martins, natural de Fontes, concelho de Santa Martha de Penaguião—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

154—João Antunes Leite, filho de João Antunes Leite, natural de Lamego—11.ª (1.ª parte);

155—João Augusto dos Santos Teixeira, filho de Augusto Cesar Justino Teixeira, natural de Lamego—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

156—João Baptista Barreira Junior, filho de João Baptista Barreira, natural da Chamusca—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

157—João Carlos de Castro Corte Real Machado, filho de João Castro d'Almeida Machado, natural de Oliveirinha, concelho d'Aveiro—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

158—João Chrysostomo Baptista Alves Novaes, filho de José Antonio da Silva Baptista, natural de Villa Real—11.ª (1.ª parte);

159—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos, filho de João d'Oliveira Ramos, natural de Vallega, concelho de Ovar—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

160—João Delfim de Mattos Rivára, filho de Antonio Eloy da Cunha Rivára, natural de Arrayollos,—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª partes) e 11.ª (1.ª parte);

161—João Dias Pereira da Graça, filho de Januario Dias Pereira da Graça, natural de Sôza, concelho de Vagos,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

162—João Gomes da Silva Osorio Junior, filho de João Gomes da Silva Osorio, natural de Lamego,—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

163—João José Pimentel Teixeira Pinto Feio, filho de Francisco Antonio Pimentel Feio, natural de Chaves,—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

164—João Machado d'Araujo, filho de Joaquim da Costa Araujo, natural de Landim, concelho de Famalicão,—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

165—João Manoel Pires, filho de Domingos Pires, natural de Moledo, concelho de Caminha,—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

166—João Maximino de Carvalho, filho de Manoel Antonio de Carvalho, natural de Lamego,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

167—João de Mello Pereira Sampaio, filho de Paulo de Mello Pereira Sampaio, natural de Guimarães,—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

168—João Monteiro Guedes, filho de Rita Laró, natural de Moura Morta, concelho da Regoa,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

169—João Pacheco de Castro Côrte Real, filho de João Pacheco Godinho de Castro Côrte Real, natural de Avanca, concelho d'Estarreja,—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

170—João Pereira Vasco, filho de Manoel Pereira Vasco, natural de Olhão,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

171—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco, filho de Antonio Pereira Rodrigues Pacheco d'Almeida, natural de Sande, concelho de Lamego,—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (2.ª parte);

172—Joaquim José Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Penafiel,—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

173—Joaquim Raymundo da Fonseca, filho de Joaquim Antonio da Fonseca, natural de Olhão,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

174—Joaquim da Silva Junior, filho de Soaquim da Silva, natural de Salreu, concelho d'Estarreja,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

175—Joaquim de Souza Brandão, filho de Francisco José de Souza Brandão, natural de Lordello, concelho de Paredes,—6.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

176—Jorge Vieira, filho de José de Souza Vieira, natural do Porto, —11.ª (1.ª parte);

177—José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello,—5.ª (2.ª parte) 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (3.ª parte);

178—José Alves Ferreira da Silva, filho de Augusto Alves Ferreira da Silva, natural de Santo Antonio da Lomba, concelho de Gondomar,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

179—José Antonio de Castro, filho de Francisco Antonio de Castro, natural de Villa Nova de Foscôa,—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

180—José Antonio Duarte, filho de Francisco Antonio Duarte, natural das Caldas da Rainha,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

181—José Antonio Gonçalves Lima, filho de Antonio Gonçalves Lima, natural do Porto,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

182—José Antonio da Silva Moreira, filho de Antonio da Silva Moreira, natural do Porto,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

183—José Baptista Cid, filho de José Baptista Cepéda Cid, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

184—José Baptista Gonçalves Dias Junior, filho de José Baptista Gonçalves Dias, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte):

185—José Caetano Ferreira Pinto dos Reis, filho de José Caetano dos Reis, natural de Lamas, concelho da Feira,—11.ª (1.ª parte);

186—José Corrêa Pinto da Fonseca, filho de José Francisco Corrêa Pinto, natural de Samodães, concelho de Lamego,—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

187—José da Cunha Rôlla, filho de José da Cunha Rôlla, natural de Santa Christina de Lordello, concelho de Felgueiras,—1.ª, 6.ª, (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

188—José Estevão Coelho de Magalhães, filho de José Estevão Coelho de Magalhães, natural de Lisboa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

189—José Ferreira Ferrão Castello Branco, filho de José Antonio Ferreira Ferrão Castello Branco, natural de S. Thiago, concelho de Cêa—1.ª, 6.ª (1.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

190—José Gonçalves da Costa, filho de Manoel Gonçalves da Costa, natural de Balazar, concelho da Povoa de Varzim—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª e 18.ª (2.ª parte);

191—José Guedes Junior, filho de José Guedes de Carvalho, natural de Ervedoza, concelho da Pesqueira—3.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

192—José Henriques Meirelles Pinto, filho de Manoel Antonio Meirelles, natural da freguezia de S. Bartholomeu, concelho de Villa Flôr—7.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

193—José Lopes dos Rios, filho de José Lopes Rios, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

194—José Machado Pinto Saraiva, filho de Felix Tristão Pinto Saraiva, natural de Villa Real—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

195—José Maria Rebello da Silva, filho de José Antonio Rebello da Silva, natural de Braga—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

196—José Maria Rebello Valente de Carvalho, filho de João Nepo-

muceno Rebello Valente, natural de Oliveira de Azemeis—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

197—José Maria Rodrigues de Faria, filho de Lino Antonio Rodrigues de Faria, natural de S. Thiago de Lanhoso, concelho de Povoa de Lanhoso—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

198—José Mendes Esteves Guimarães, filho de Antonio José Esteves Guimarães, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

199—José Rodrigues Braga, filho de José Rodrigues Braga, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

200—José Rodrigues Gonçalves Curado, filho de Miguel Gonçalves Curado e Silva, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

201—José Vicente d'Araujo, filho de Antonio Vicencio de Araujo, natural de Villa do Conde—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

202—José Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

203—Julio Baptista da Cunha Braga, filho de João Baptista Braga, natural de Braga—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

204—Julio Lopes Valente da Cruz, filho de João Carlos da Cruz, natural da Guarda—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

205—Lauriano Pereira de Castro Brito Junior, filho de Lauriano Pereira de Castro e Brito, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

206—D. Laurinda de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

207—Lucindo Martins d'Oliveira, filho de Francisco Moreira de Oliveira, natural de Souza, concelho de Gondomar—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

208—Luiz de Freitas Viegas, filho de Luiz de Freitas Viegas, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

209—Luiz Gonzaga Vaz da Victoria, filho de Faustino José da Victoria, natural do Porto—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) e 9.ª;

210—Luiz José de Lima, filho de Antonio José de Lima Junior, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

211—Luiz Pinto Ribeiro da Fonseca, filho de Manoel Ribeiro da Fonseca, natural de Villar do Paraiso, concelho de Villa Nova de Gaya—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

212—Luiz de Souza Lemos, filho de Antonio Alves de Souza, natural de Castello de Vide—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

213—Manoel Augusto Dias Milheiro, filho de Francisco José Milheiro, natural de Grijó, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

214—Manoel Augusto Gomes de Faria, filho de João Gomes de Faria, natural d'Arnôso, concelho de Famalicão—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

215—Manoel Augusto de Queiroz e Castro, filho de Joaquim Augusto de Queiroz, natural de S. Cosmado, concelho d'Armamar—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

216—Manoel Barba de Menezes, filho de Carolina Guerreiro Canto Lobo, natural de Lisboa—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

217—Manoel Garrido Monteiro, filho de Manoel Garrido Baqueiro, natural de Santa Maria d'Insua, concelho de Ponte-Caldella (Galliza)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

218—Manoel Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves de Araujo, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

219—Manoel José Aguia, filho de Francisco Aguia, natural de Candêdo—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

220—Manoel José Ferreira de Miranda, filho de Domingos José Ferreira, natural de Villar de Figos, concelho de Barcellos—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

221—Manoel Luiz Mendes, filho de João Francisco Mendes, natural do Seara, concelho de Ponte do Lima—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

222—Manoel Marques de Lemos, filho de Margarida Ferreira dos Santos, natural de Albergaria-Velha—11.ª (1.ª parte);

223—Manoel de Medeiros Tavares, filho de Viriato de Freitas Tavares, natural de Pernambuco (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

224—Manoel Nunes de Oliveira, filho de José Nunes d'Oliveira, natural de Sôsa, concelho de Vagos—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

225—Manoel Pinto Pimentel, filho de Joaquim Pinto Furtado, natural de Favaios, concelho d'Alijó—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

226—Manoel de Souza Machado Junior, filho de Manoel de Souza Machado, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

227—Miguel Albano Cerqueira Coimbra, filho de Joaquim Augusto Rodrigues Coimbra, natural d'Amarante—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

228—Olympio Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte), 17.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

229—Oscar Cibrão e Garção, filho de Francisco Luiz Garção, natural de Valença do Minho—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

230—Paulo Ferreira, filho de Luiz José Ferreira, natural do Porto —1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

231—Raul Corrêa Bettencourt Furtado, filho de José Candido de Bettencourt Furtado, natural da Ilha do Fayal—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

232—Raul Larose Rocha, filho de José Gonçalves Rocha, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

233—Raymundo Ferreira dos Santos, filho de Antonio Ferreira dos Santos, natural do Porto—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 9.ª e 18.ª (3.ª parte);

234—Ricardo Severo da Fonseca Costa, filho de José Antonio da Fonseca Costa, natural de Lisboa—3.ª, 4.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

235—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães, filho de Augusto Dias Gui-

marães, natural do Porto,—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

236—Romão José Braz Fernandes, filho de José Braz Fernandes, natural da Regoa,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

237—Ruy da Rocha e Castro, filho de Agostinho da Rocha e Castro, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

238—Sebastião Barroso Monge, filho de Pedro Monge, natural d'Aldeia Nova, concelho de Serpa,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

239—Theodorico Teixeira Pimentel, filho de João Rodrigues Pimentel, natural de Alijó,—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

240—Vasco Ortigão de Sampaio, filho de José Joaquim d'Oliveira Sampaio, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte):

241—Vicente de Bessa, filho de Leonardo Joaquim de Bessa, natural de Real, concelho de Castello de Paiva, 6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

242—Victor Henriques Ayres Móra, filho de Emygdio Antonio Móra, natural do Sardoal,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

Quadro estatistico dos alumnos matriculados em 1886 e 1887 distribuidos segundo a sua naturalidade

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos: por conc.	por dist.	Total
Porto	Amarante	3	96	115
	Baião	3		
	Bouças	1		
	Felgueiras	3		
	Gondomar	2		
	Marco de Canavezes	1		
	Paredes	2		
	Penafiel	4		
	Porto	66		
	Povoa de Varzim	2		
	Santo Thyrso	2		
	Villa do Conde	2		
	Villa Nova de Gaya	5		
Aveiro	Albergaria Velha	1	19	
	Aveiro	1		
	Castello de Paiva	3		
	Estarreja	2		
	Feira	4		
	Ilhavo	1		
	Oliveira d'Azemeis	3		
	Ovar	2		
	Sever do Vouga	1		
	Vagos	1		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
Transporte				115
Beja	Beja	2	3	
	Serpa	1		
Braga	Barcellos	2	14	
	Braga	4		
	Celorico de Basto	1		
	Fafe	1		
	Famalicão	2		
	Guimarães	2		
	Povoa de Lanhoso	1		
	Vieira	1		
Bragança	Bragança	4	13	35
	Carrazeda d'Anciães	2		
	Mirandella	1		
	Mogadouro	1		
	Moncorvo	3		
	Villa-Flor	1		
	Vinhaes	1		
C. Branco	Fundão	1	1	
Evora	Arrayollos	1	1	
Faro	Lagos	1	4	
	Olhão	2		
	Tavira	1		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
Transporte				150
Guarda	Côa	1	3	
	Guarda	1		
	Villa Nova de Foz Côa	1		
Leiria	Caldas da Rainha	1	4	
	Leiria	3		
Lisboa	Belem	1	7	
	Lisboa	6		
Portalegre	Castello de Vide	1	1	
Santarem	Almeirim	2	4	50
	Chamusca	1		
	Sardoal	1		
V. do Castello	Arcos de Val-de-Vez	1	11	
	Caminha	2		
	Ponte do Lima	1		
	Valença	3		
	Vianna do Castello	4		
Villa Real	Alijó	2	20	
	Chaves	3		
	Murça	1		
	Regoa	6		
	Sabroza	2		
	Santa Martha de Penaguião	1		
	Villa Pouca d'Aguiar	1		
	Villa Real	4		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos: por conc.	por dist.	Total
	Transporte			200
Vizeu	Armamar	3	16	
	Lamego	8		
	Tondella	1		
	Vizeu	2		
	S. João da Pesqueira	1		
	S. Pedro do Sul	1		
	ILHAS ADJACENTES			
A. Heroismo	Angra do Heroismo	1	5	
Fayal	Fayal	3		
Praia	Praia	1		
	POSSESSÕES ULTRAMARINAS			36
E. G. da India	Macau	1	1	
	PAIZES ESTRANGEIROS			
Hespanha (Galliza)	Ponte Caldella	1	1	
França	Steenwesk	1	1	
Brazil	Bahia	1	12	
	Pernambuco	1		
	Rio de Janeiro	10		
	Total geral			236

Quadro do exercicio dos cursos no anno lectivo de 1885 a 1886

DESIGNAÇÃO DOS CURSOS	ABERTURA DO CURSO	ENCERRAMENTO DO CURSO	N.º total das lições e exercicios	Duração das lições	N.º de horas semanaes de cada curso
1.ª—Geometria analytica no plano e no espaço; trigonometria espherica; algebra superior	12 de novembro de 1885	22 de maio de 1886	59	2	6
2.ª—Calculo differencial e integral	10 » »	22 » »	62	2	6
3.ª—Mecanica racional: Cinematica	9 » »	21 » »	63	2	6
4.ª—Geometria descriptiva	12 » »	21 » »	52	2	6
5.ª—Astronomia e geodesia	11 » »	22 » »	58	2	6
6.ª—Physica	9 » »	21 » »	49	2	6
7.ª—Chimica inorganica	10 » »	21 » »	61	2	6
8.ª—Chimica organica e analytica	10 » »	21 » »	69	2	6
9.ª—Mineralogia e geologia	9 » »	21 » »	55	2	6
10.ª—Botanica	12 » »	21 » »	57	2	6
11.ª—Zoologia	9 » »	21 » »	56	2	6
12.ª—Resistencia de materiaes	13 » »	21 » »	53	2	6
14.ª—Construcções	12 » »	21 » »	55	2	6
16.ª—Economia politica e direito administrativo	10 » »	21 » »	60	2	6
17.ª—Commercio	10 » »	20 » »	57	2	6
18.ª—Desenho	10 » »	21 » »	63	2	6

Alumnos premiados e distinctos nas cadeiras dos cursos da Academia no anno lectivo de 1885 e 1886, proclamados em sessão solemne de 20 d'outubro de 1886.

1.ª CADEIRA

Accessit.—Alberto Maria Lisboa de Lima.
Distincção.—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.

2.ª CADEIRA

Premio honorifico.—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
Accessit.—Manoel de Sousa Machado Junior.
Distincção.—Casimiro Jeronymo de Faria.

3.ª CADEIRA

Accessit.—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.

5.ª CADEIRA

Accessit.—José Alves Bonifacio.

6.ª CADEIRA

Accessit.—Alberto Maria Lisboa de Lima.
1.ª distincção.—Manoel Augusto Dias Milheiro.
2.ª » —Antonio Augusto de Castro Soares.

7.ª CADEIRA

1.º accessit.—José Antonio de Castro.
» —José Maria Rebello da Silva.
2.º » Arthur Hygino Soares.
1.ª distincção.—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira.
2.ª » —Humberto Pinto da Costa Araujo.

8.ª CADEIRA

Premio honorifico—José d'Oliveira Serrão d'Azevedo.
1.º accessit.—Antonio Augusto Pereira Cardoso.
» —Antonio Caetano Ferreira de Castro.
» —João Maria Pacheco da Silva Lemos.
2.º » —Antonio Coutinho d'Araujo Pimenta.
» —Antonio Venancio da Gama Pimentel.
» —Carlos Alberto de Lima.
» —João Leite de Castro.
» —Alberto d'Almeida Magro.
» —José Maria Marreiros.
» —Fernando de Miranda Monterrôso.
Distincção.—Carlos Affonso da Silva Rios.
» —José Pinto de Queiroz Magalhães.
» —Manoel José Pinhal.
» —Joaquim Augusto de Macedo Freitas.

10.ª CADEIRA

Distincção.—Alberto d'Almeida Magro.
» —Alypio Augusto Trancoso.
» — D. Maria Leite da Silva Tavares Paes Moreira.

11.ª CADEIRA

Accessit.—José de Oliveira Serrão d'Azevedo.
» —Carlos Alberto de Lima.
» Antonio Caetano Ferreira de Castro.
1.ª distincção.—João Leite de Castro.
2.ª » —Alberto d'Almeida Magro.
3.ª » —Ricardo de Lemos e Castro.
4.ª » —D. Maria Leite da Silva Tavares Paes Moreira.

12.ª CADEIRA

Accessit.—José Alves Bonifacio.

18.ª CADEIRA

Premio honorifico.—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.
Accessit.—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
Distincção.—Antonio Duarte Pereira da Silva.
» —Antonio José de Lima.

Designação dos alumnos que tiraram carta de capacidade de cursos da Academia no anno lectivo de 1884 e 1885

Nomes e designação do curso	Data em que foi conferida a carta de curso
Obras publicas	
José Maria de Mello de Mattos ..	9 de outubro de 1885.
Manoel d'Albuquerque de Mello Pereira e Caceres	12 de dezembro de 1885.
Theophilo Leal de Faria	9 de fevereiro de 1886.
Caetano Maria d'Amorim.......	22 de julho de 1886.
Francisco da Silva Monteiro	22 de julho de 1886.
Francisco Xavier Esteves.......	22 de julho de 1886.
Joaquim Augusto de Macedo Freitas......................	22 de julho de 1886.
Minas	
Manoel d'Albuquerque de Mello Pereira e Caceres	12 de dezembro de 1885.
Theophilo Leal de Faria	5 de março de 1886.
Geographos	
Estevão Torres	1 de dezembro de 1885.
Agricultores	
Bento de Sousa Carqueja Junior .	10 de dezembro de 1885.

Mappa estatistico do movimento dos alumnos da Academia no anno lectivo de 1885 a 1886

CADEIRAS	ALUMNOS MATRICULADOS POR CADEIRAS		APPROVADOS		REPROVADOS	NÃO EXAMINADOS	ALUMNOS DISTINCTOS COM			TOTAL DOS DISTINCTOS
	ordinarios	voluntarios	n. d.	simp.			premio honorifico	accessit.	m. honrosa	
1.ª—(Algebra superior, etc.) . . .	24	29	12	5	4	32		1	1	2
2.ª—(Calculo differencial, etc.) . .	6	12	11	5	1	1	1	1	1	3
3.ª—(Mecanica; Cinematica) . . .	5	6	8	2		1		1		1
4.ª—(Geometria descriptiva) . . .	19	28	32	6	2	7				
5.ª—(Astronomia e geodesia) . . .	7	2	8		1			1		1
6.ª—(Physica)	21	35	33	11	3	9		1	2	3
7.ª—(Chimica inorganica)	32	57	39	8	8	34		3	3	6
8.ª—(Chimica organica e analytica)	36	55	27	4	16	44	1	10	4	15
9.ª—(Mineralogia e geologia) . . .	9	6	8			7				
10.ª—([illegible])	25	58	65			19			3	3
11.ª—(Zoologia)	33	36	28		12	29		3	4	7
12.ª—(Resistencia de materiaes) . .	5	1	5			1		1		1
14.ª—(Construcções)	4	2	4			2				
16.ª—(Economia politica, etc.) . . .	9	12	11			10				
17.ª—(Commercio)	1	1	1			1				
18.ª—(Desenho)	31	43	37	10		20	1	1	2	4

DOCUMENTOS

PARA A HISTORIA DA

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

Relatorio da Commissão
nomeada por portaria de 31 de dezembro de 1880
para elaborar o plano do
edificio do Paço dos Estudos do Porto

— -

ILLUSTRISSIMO E EX.^{mo} SNR.

A commissão nomeada por portaria de trinta e um de dezembro de mil oitocentos e sessenta, para proceder ao exame de todas as condições do edificio da Academia Polytechnica do Porto, organisar um plano geral da obra acompanhado das competentes plantas e desenhos, e finalmente confeccionar um orçamento com toda a possivel individuação, tem a honra de levar ao conhecimento de v. ex.ª o resultado dos seus trabalhos.

A commissão, não desejando cançar a attenção de v. ex.ª com a numeração das vantagens que para a cidade do Porto e provincias do Norte resultam do acabamento do edificio, em que hoje se acha a Academia Polytechnica, e confiando além d'isso no provado e esclarecido patriotismo de v. ex.ª, limita-se n'este relatorio a desenvolver os pontos, que, pela supracitada portaria, foram submettidos ao seu exame.

N'este presupposto, a mais importante questão que se offerece é saber quaes os estabelecimentos scientificos e litterarios que no edificio se podem accommodar, tendo na devida consideração a distribuição e numero das aulas, officinas, e gabinetes indispensaveis para o ensino das sciencias varias, que nos ditos estabelecimentos se professam.

A commissão, tendo em vista não as necessidades actuaes dos estabelecimentos, taes como elles hoje se acham imperfeitos e incompletos, mas as necessidades futuras, quando o ensino fôr devidamente organisado, como pedem as necessidades da epocha, julga que no edificio chamado da Graça, depois de completo, segundo as plantas e alçados, que fazem parte d'este relatorio, se podem accomodar ampla e convenientemente, com grande vantagem para o ensino e para o publico, quatro dos estabelecimentos scientificos e litterarios da cidade do Porto, a saber: a Academia Polytechnica, a Escóla industrial, a Academia portuense de bellas artes, e a Bibliotheca publica.

O mais importante d'estes estabelecimentos pela sua origem, pelos fins para que foi creado, e pelos uteis resultados que já tem fornecido no espaço de sessenta annos de existencia, é, sem duvida alguma, a Academia Polytechnica do Porto, filha e herdeira da antiga Academia de commercio e marinha, creada por alvará de nove de janeiro de mil oitocentos e tres.

Sem insistirmos agora, por não ser nosso intento provar o que está de mais provado nas vantagens e fructos d'esta escóla, bastará para o nosso fim fazer saber a v. ex.ª que são urgentissimas as obras projectadas em relação ás necessidades d'esta academia.

Mesmo no estado de limitação em que se acha actualmente o ensino, por faltarem muitas cadeiras necessarias, e os indispensaveis gabinetes de physica e de historia natural, mesmo n'este estado de pobreza, dizemos, a academia lucta constantemente contra a falta de espaço tão necessario para poder funccionar regularmente.

As salas de aula são em tão pequeno numero, que se torna muito difficil a combinação das horas para harmonisar as lições dos differentes cursos; a sala, chamada

dos exames, e que serve para as sessões solemnes da academia, como são a abertura dos cursos, a distribuição dos premios, e os concursos publicos para o provimento das cadeiras, é nos termos ordinarios, dividida em duas por um tapamento de lona a fim de augmentar o indispensavel numero das aulas; a secretaria está, por assim dizer, n'um corredor de passagem, com grave prejuizo dos trabalhos d'esta repartição; a bibliotheca é o logar unico, mas improprio, onde se reunem os lentes emquanto esperam as horas das aulas, ou quando não sahem logo que ellas terminam; e os poucos instrumentos de physica e objectos de historia natural, que possue a academia, acham-se amontoados em pequenas estantes. E' escusado dizer mais, para demonstrar a v. ex.ª a urgencia da obra, concluida a qual, como se vê das plantas e competente explicação d'ellas, ficará a Academia Polytechnica com a indispensavel largueza para as aulas, gabinetes, e officinas.

A escóla industrial do Porto, creada por decreto de trinta de dezembro de mil oitocentos e cincoenta e dois, funcciona, desde a sua origem, no mesmo edificio da Academia Polytechnica; mas lucta, como esta, com as mesmas difficuldades por falta d'espaço.

A commissão tambem a considerou no seu completo para a distribuição da parte que lhe é destinada, e v. ex.ª verá pela planta e competente explicação, que se lhe não deu de mais senão o necessario, sendo communs para a Academia Polytechnica e escóla industrial a aula e laboratorio de chimica, o gabinete do preparador, a aula e gabinete de physica, e o gabinete das machinas, communidade esta, de que resulta grande economia para a fazenda, e vantagem para o ensino.

A conveniencia de ficarem no mesmo edificio de portas a dentro os dois estabelecimentos de que temos fallado, é tão clara e obvia, que não precisa demonstração.

São complementares um do outro, tendo além d'isso muitas aulas communs.

A academia portuense de bellas artes, que a commissão propõe para funccionar no mesmo edificio, é tambem por assim dizer complementar da Academia Polytechnica.

Os alumnos que se destinam a certos cursos n'esta escóla, vão estudar na Academia de bellas artes o desenho de ornato, o de architectura, e o das cartas hydrographicas, por onde se vê qual será a vantagem de reunir estas aulas no mesmo edificio.

Além d'isso a localidade actual da academia de bellas artes (em S. Lazaro) é tão fóra do centro da cidade, e fica tão longe das outras escólas, que os alumnos gastam um tempo precioso nas idas e voltas, que poderiam facilmente aproveitar em outras occupações.

São estas, em resumo, as razões que moveram a commissão a incluir na repartição do projectado edificio a academia portuense de bellas artes.

Resta fallar da bibliotheca publica. A bibliotheca publica da cidade do Porto, e a cargo da sua municipalidade, é incontestavelmente um rico e utilissimo estabelecimento, mas no actual edificio de S. Lazaro, collocado n'um extremo da cidade, fica tão longe e tão á desamão, que só póde ser frequentado por grande necessidade de consultar livros, e não com aquella assiduidade que convinha para popularisar convenientemente a instrucção.

E se estes inconvenientes se fazem sentir para todos, e são communs a todas as classes de leitores, muito mais sensiveis se tornam para os estudantes que frequentam as aulas, a quem não sobeja tanto tempo das obrigações diarias, que possam, sem inconveniente, dispôr de algumas horas para irem a um arrabalde da cidade frequentar a bibliotheca publica.

Pelo contrario, sendo mudada a bibliotheca para o

edificio da Graça, fica a leitura commoda, e ao alcance de todos, aos particulares no centro da cidade, e aos lentes e estudantes de todas as escólas, ou em casa ao pé da porta, por isso que a escóla medico-cirurgica é na mesma praça da Cordoaria, em que existe o edificio da Graça.

Mas além d'estas razões ha outras pelas quaes a commissão julgou dever propôr a mudança da bibliotheca publica.

Por muito cuidado que tenha tido a camara, como effectivamente tem tido, na collocação, arranjo, e augmento da sua bibliotheca, a actual casa resente-se do primitivo fim para que foi destinada, de tal sorte que nem as salas da livraria teem a construcção propria em relação ao arranjo e luz, nem o numero d'ellas é sufficiente para conter em ordem o crescido numero de livros, que a bibliotheca possue, sendo certo que muitos milhares d'elles estão em monte á espera de estantes onde sejam collocados.

A estes motivos accresce ainda um outro, no entender da commissão, muito attendivel, e é que tirados que sejam do edificio de S. Lazaro a academia de bellas artes e a bibliotheca, fica disponivel para o estado um magnifico terreno, que junto com o edificio, na opinião dos entendidos, póde valer para cima de oitenta contos de reis.

Por todas estas razões a commissão julga muito vantajosa a mudança da bibliotheca para o novo edificio, no qual lhe destina, como se vê das plantas e synopse explicativa, optimas accommodações construidas segundo as melhores condições, e muito proprias para o fim a que são destinadas.

Satisfeito este primeiro ponto, e demonstrada a vantagem de ficarem no mesmo edificio os quatro estabelecimentos de que temos tratado, julga a commissão dever amiudar algumas considerações a respeito da execução da obra e submettel-as á consideração de v. ex.ª

A remoção do collegio dos meninos orphãos, que actualmente habitam no andar superior do edificio da Graça, é a primeira condição para se concluirem as obras, e se levar ávante o projecto que a commissão tem a honra de pôr nas mãos de v. ex.ª

O terreno sobre o qual se começou a levantar em 1803 o actual edificio da Academia Polytechnica (então da marinha e commercio) pertencia aos meninos orphãos, que n'aquelle tempo habitavam uma casa existente no dito terreno, e cujos restos ainda se veem em parte.

Esse edificio, uma igreja que ainda funcciona servida pelos ecclesiasticos, que dirigem o collegio, e um grupo de pequenas casas, cujo aluguel constituia a renda dos meninos orphãos, eram toda a sua propriedade, fundada com esmolas, e devida á beneficencia de almas caritativas.

Mandando o senhor D. João VI, então principe regente, proceder á edificação do actual edificio, para o que se levantou um imposto especial na cidade do Porto, ordenou que em compensação da perda da sua propriedade, os meninos orphãos tivessem dentro do novo edificio habitação propria e commoda, que em lógar da antiga igreja se edificasse uma nova, e que, para indemnisar o collegio das rendas que perdia, se alugassem os baixos do edificio, e o producto d'elles fosse usufruido pelos meninos orphãos.

Assim se fez. Como, porém, por occasião da nova organisação politica do paiz, ficassem suspensas as obras, e o tributo especial lançado á cidade tenha acabado, ou se ache confundido com as demais rendas do estado, os meninos orphãos continuaram a habitar parte do antigo collegio, ainda não destruida, utilisando-se d'alguns quartos do novo edificio; a igreja é a antiga, por se não ter feito a nova, e como indemnisação das casas destruidas recebe o collegio as rendas dos baixos da parte feita do novo edi-

ficio. Esta renda, segundo uma nota official mandada a esta commissão pela camara municipal, actual superintendente do collegio, monta á quantia de 1:563$000 reis.

A' vista d'isto a commissão, para proceder legalmente e com justiça, officiou á camara municipal para que esta corporação informasse o que lhe occorresse a respeito da transferencia do collegio dos meninos orphãos, a fim de se completar o edificio, e destinal-o para os quatro estabelecimentos de que acima se falla.

A camara em 22 de janeiro do anno passado respondeu que só consentiria na demolição da igreja com a condição de se transferir provisoriamente o collegio para o convento do Carmo, devendo tambem no novo projecto do edificio darem-se as accommodações necessarias para se estabelecer alli definitivamente o mesmo collegio.

A commissão tendo na devida conta os interesses dos meninos orphãos, mas vendo a impossibilidade de condescender com a camara, por isso que de nenhuma sorte o collegio póde continuar a existir dentro do novo edificio, não só porque no plano d'elle é eliminada a igreja, mas tambem porque a coexistencia do collegio e dos outros estabelecimentos no mesmo local se torna impossivel, attendendo á falta d'espaço, e a motivos bem obvios de disciplina e administração, vê só um meio de sair da difficuldade, e é a remoção do collegio, sendo este indemnisado da casa, das rendas, e da igreja que perde.

Em quanto á casa e igreja a commissão concorda inteiramente com a camara de que a melhor e mais apropriada ao intento, e talvez a unica, é o convento do Carmo, actual quartel da guarda municipal.

Casa ampla e bem situada, igreja magnifica, terreiro sufficiente para recreio, proximidade das aulas publicas de todos os graus, são condições que muito devem influir para ser este o local escolhido.

Em quanto á guarda municipal poderá esta ser dividida em estações, organisação muito mais accommodada ao serviço, ou poderá ser transferida para outro quartel que o governo lhe destinar.

Pelo que diz respeito ás rendas que o collegio dos orphãos aufere pelo aluguel dos baixos do edificio da academia, a commissão é de parecer e propõe que aquelle estabelecimento seja indemnisado em inscripções de capital correspondente á renda actual, visto que nenhuma parte do novo edificio deve continuar a ser alugada a particulares.

Com effeito, continuando este mau uso de alugar os baixos do edificio, não só se torna impossivel a realisação do plano que esta commissão tem a honra de levar ao conhecimento de v. ex.ª, porque esses baixos são destinados para officinas e arrecadações das duas escólas industrial e polytechnica, mas ainda porque é muito pouco conveniente que em um edificio destinado á instrucção se entre pela mesma porta para as aulas e para as tabernas.

As razões expendidas parecem á commissão tão fortes e tão claras, que seria duvidar da boa vontade e patriotismo de v. ex.ª insistir n'ellas por mais tempo.

Resta fallar das expropriações e orçamento.

Em quanto ás expropriações a commissão tem a honra de remetter a v. ex.ª um mappa feito e assignado pela junta das obras da camara municipal, e por elle verá v. ex.ª que o valor das casas a expropriar não excede a quantia de trinta e quatro contos, nove centos e quatro mil reis; e ainda a esta quantia ha a abater dois contos trezentos e setenta mil reis d'uma casa, que valendo hoje dois contos oitocentos e oitenta mil reis foi reedificada debaixo da condição que a todo o tempo seria apropriada pelo valor primitivo de quinhentos e dez mil reis.

Em quanto ao orçamento da obra, que a commissão

confeccionou com toda a possivel individuação, como se vê dos respectivos mappas que fazem parte d'este relatorio, talvez á primeira vista pareça excessivo; mas se se attender ao magnifico edificio com que fica dotada a cidade do Porto, e as vantagens que para o publico ensino resultam d'uma casa propria e accommodada para os quatro grandes estabelecimentos de instrucção, de que fallamos no principio, julgar-se-ha pequeno o sacrificio.

A commissão abstendo-se de fallar mais miudamente a este respeito, porque não faria mais do que repetir o que se acha amplamente indicado na synopse, mappas, e plantas juntas, julga ter satisfeito ao que lhe foi ordenado na supracitada portaria de trinta e um de dezembro de mil oitocentos e sessenta.

Porto e sala das sessões da commissão em vinte e seis de janeiro de mil oitocentos e sessenta e tres.—Miguel do Canto e Castro, João Baptista Ribeiro, director da Academia Polytechnica, José de Parada e Silva Leitão, lente da Academia Polytechnica, e director interino da escóla industrial; Luiz Victor Silves, director das obras publicas, Antonio Luiz Ferreira Girão, lente da Academia Polytechnica do Porto.

Está conforme.—Secretaria d'estado dos negocios do reino em 16 de maio de 1864.—*José Eduardo Magalhães Coutinho.*

SYNOPSE EXPLICATIVA DO PROJECTO DE EDIFICIO PARA O PAÇO DOS ESTUDOS NO PORTO

O edificio da Graça, onde se acham incommodamente estabelecidas a Academia Polytechnica, a Escóla industrial, e o Real collegio dos meninos orphãos, póde depois de concluido accommodar convenientemente os dois mencionados estabelecimentos scientificos, bem assim a Academia portuense de bellas artes e a Bibliotheca publica.

O projecto para este fim apresentado distribue do seguinte modo por estes quatro estabelecimentos todo o espaço de que é possivel dispôr.

BIBLIOTHECA PUBLICA

Na parte central do edificio, e para o lado do sul, um vestibulo de sessenta e tres metros e setenta centimetros quadrados de superficie, com portas e janellas envidraçadas, dará entrada em um salão de quarenta e dois metros e noventa centimetros de comprimento, treze metros e sessenta centimetros de largura, e dezeseis metros e oitenta e cinco centimetros d'altura (quasi a total do edificio), guarnecido com duas galerias niveladas com os pavimentos dos dois andares do edificio, e allumiado por dois grandes zimborios, e por dezesete janellas e dez portas.

O serviço do salão e das galerias far-se-ha por meio da escada circular e dos corredores marcados nas plantas.

Em um dos corpos lateraes do edificio, e no pavimento terreo, foram estabelecidos gabinetes para os dois bibliothecarios, a secretaria da bibliotheca, um quarto para o porteiro, outro para arrecadação, e uma sala de vinte e tres metros e trinta e cinco centimetros de comprimento, seis metros e sessenta e cinco centimetros de largura, e sete metros d'altura, guarnecida com uma galeria ao nivel do pavimento dos sotãos, e destinada para arrecadar manuscriptos.

Os sotãos correspondentes á secretaria, e as outras salas mencionadas devem servir para n'elles se estabelecerem officinas de encadernador, de typographo e lythographo. Estas officinas são servidas por uma escada inteiramente independente da escada de serviço da bibliotheca, e por uma porta tambem independente da entrada do sa-

lão, e que é além d'isso destinada para entrada particular dos empregados.

Um corredor particular estabelece communicação entre a bibliotheca publica e a escada da academia portuense de bellas artes, a qual foi tambem projectada para o serviço do museu portuense, actualmente estabelecido no convento de Santo Antonio da cidade, mas que deve juntamente com a bibliotheca ser transferido para o paço dos estudos.

ACADEMIA PORTUENSE DE BELLAS ARTES

Ao meio do quarteirão occidental do edificio, e no pavimento terreo um vestibulo dá entrada para a aula de esculptura (sala de cento e vinte e cinco metros e cinco decimetros quadrados de superficie) e para a escada que conduz aos andares superiores.

No primeiro andar uma sala de quarenta e nove metros e oito decimetros de comprimento, e seis metros e sessenta e cinco centimetros de largura é destinada para galeria de pinturas. Esta sala communica por um lado com o museu (o qual tem vinte metros e cincoenta e cinco centimetros de comprimento, e onze metros e quatro decimetros de largura) e pelo outro lado com um salão onde devem reunir-se os museus de historia natural pertencentes ao municipio e a Academia Polytechnica do Porto.

Tem além d'isto a Academia de bellas artes n'este primeiro andar um quarto para lavatorio, e outro para arrecadação.

No segundo andar tem igualmente dois quartos para arrecadação e lavatorio; uma aula de pintura de vinte e tres metros e quinze centimetros de comprimento, e seis metros e sessenta e cinco centimetros do largura, e mais cinco espaçosas salas, sendo uma para secretaria, outra

para as reuniões do conselho da academia, e as tres restantes para aulas de architectura, desenho e gravura.

As salas de aula receberão luz das janellas correspondentes, e de zimborios praticados no tecto do edificio.

Os corredores marcados nas plantas servem ao uso independente d'estas differentes salas.

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

Todo o quarteirão voltado ao norte (fachada principal), bem como uma parte dos quarteirões oriental e occidental, do edificio serão occupados pela Academia Polytechnica do Porto.

Projectou-se para este estabelecimento no pavimento terreo um espaço de dezenove metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, de nove metros e vinte e cinco centimetros de largura, e de toda a altura do edificio, para alojar o navio que serve á explicação das lições de manobra; uma sala de espera, outra para secretaria, outra para as reuniões do conselho da academia, um gabinete para o director, uma sala para archivos, outra para o guarda-mór, uma officina metallurgica, e dois quartos, sendo um para os guardas, e outro para arrecadação.

Quatro salas mais completam as accommodações da academia no pavimento terreo do edificio.

Estas salas, que devem igualmente servir á escóla industrial, são destinadas para aula e laboratorio de chimica, e para gabinetes do lente respectivo e guarda preparador.

A aula de chimica tem dezoito metros e quarenta centimetros de comprimento, e oito metros e quarenta e cinco centimetros de largura, e o laboratorio tem quinze metros e cincoenta e cinco centimetros de comprimento, e seis metros e cincoenta centimetros de largura.

Os sotãos correspondentes a estas ultimas quatro sa-

las, exceptuando a do laboratorio chimico (cuja altura deverá comprehender a dos sotãos), devem ser utilisados para deposito de utensilios, drogas, e machinas, e para n'elles se estabelecer uma pequena officina para a escóla industrial.

Com o deposito de utensilios communicar-se-ha por meio d'uma escada, especialmente construida para esse fim, e os outros sotãos pertencentes á Academia Polytechnica serão servidos pelas duas escadas marcadas nas plantas.

Uma arcada, fechada com gradaria de ferro de quatro metros e vinte e cinco centimetros de largura, e de todo o comprimento do quarteirão voltado ao norte, dá entrada para as salas mencionadas, e para um vestibulo de oitenta e um metros e dez centimetros quadrados de superficie, que conduz á grande escada destinada para o serviço do primeiro andar do edificio.

N'este primeiro andar projectou-se para a Academia Polytechnica um salão nobre de quatorze metros e quinze centimetros de comprimento, e onze metros e quinze centimetros de largura, para servir exclusivamente para festas nacionaes e academicas; uma sala para actos de vinte e um metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, e onze metros de largura; outra de eguaes dimensões para o desenho; um gabinete de leitura; uma sala para a aula de physica, tendo de comprimento dezoito metros e quarenta e cinco centimetros, e de largura oito metros e quarenta e cinco centimetros; outra para gabinete de physica tendo de comprimento trinta metros e oitenta centimetros, e de largura seis metros e sessenta centimetros (estas duas salas pertencerão tambem á escóla industrial), e uma sala de mais de dezoito metros e quinze centimetros de comprimento, onze metros e vinte e cinco centimetros de largura, e nove metros e quarenta e cinco centimetros de altura, e

guarnecida com uma galeria ao nivel do pavimento do segundo andar do edificio, e destinada para muzeu de historia natural.

Um espaçoso corredor serve, como se vê da planta respectiva, á independencia d'estas differentes salas.

Uma escada especial conduz ao segundo andar, onde a academia tem uma sala para as aulas de construcções e de mechanica; outra de doze metros e dezenove centimetros de comprimento, e onze metros e cinco centimetros de largura para a de geometria descriptiva; uma terceira para o primeiro anno mathematico e commercio, outra para o segundo anno de mathematica e economia politica, e, junto á galeria do muzeu de historia natural outra sala para as aulas de zoologia e botanica.

O corredor que dá serventia a estas salas conduz tambem ao muzeu industrial, e ao gabinete de machinas pertencentes á escóla industrial, e dos quaes a academia deve tambem poder servir-se.

Uma escada especial leva ao observatorio e á aula e gabinete de astronomia estabelecidos no andar inferior ao observatorio.

ESCÓLA INDUSTRIAL DO PORTO

Fica occupando parte do quarteirão voltado ao sul, e a maior parte do quarteirão oriental. A entrada da escóla será pelo lado do sul.

Um vestibulo conduz ao corredor que dá commmunicação para quatro salas occupadas pela aula e laboratorio de chimica e suas pertenças, e para quatro officinas estabelecidas no pavimento terreo, as quaes poderão communicar tambem com o exterior do edificio por uma porta particular voltada ao nascente.

Uma escada construida dentro d'umas das officinas

dará serventia para os sotãos, onde deve ser estabelecido o resto das officinas e a habitação do guarda.

Além das accommodações mencionadas, tem tambem a escóla, no pavimento terreo, dois quartos para a arrecadação e carvoeira, e outro para o contador do gaz e para o porteiro.

No primeiro andar tem a escóla, além das duas salas destinadas para aula e gabinete de physica, mais seis grandes salas, sendo uma para aula de geometria, outra para aula d'instrucção primaria, outra para aula de economia industrial, e as tres restantes para secretaria, gabinete do director, e sala dos conselhos da escóla.

No segundo andar tem cinco salas, que são destinadas para museu industrial, gabinete de machinas, aula de desenho de machinas, e geometria descriptiva, aula de mecanica industrial, aula de desenho de ornato; e tem além d'estas uma outra sala para o estudo do gesso e modelação, e um quarto para os guardas.

O museu industrial tem trinta metros e oitenta centimetros de comprimento, e seis metros e sessenta centimetros de largura; o gabinete de machinas tem de comprido dezesete metros e trinta e cinco centimetros, e de largo sete metros e trinta centimetros; e a aula de desenho de machinas tem vinte e seis metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, e oito metros e quarenta e cinco centimetros de largura; e a aula de desenho de ornato tem vinte metros e cincoenta centimetros de comprimento, e sete metros e vinte e cinco centimetros de largura.

O vão do pateo interior, que vai marcado nas plantas (pateo de quatrocentos e treze metros e vinte e cinco centimetros quadrados de superficie), allumia as salas do edificio, que pela sua collocação não podem receber a luz das janellas e das portas praticadas nas quatro paredes principaes do edificio. No centro d'este pateo haverá uma fonte

para o serviço dos quatro estabelecimentos que o edificio tem de accommodar.

Está conforme.—Secretaria de estado dos negocios do reino, em 16 de maio de 1864.—*José Eduardo Magalhães Coutinho.*

Valor dos predios situados entre o passeio da Graça e a travessa do Carmo, que tem de ser demolidos com a conclusão do edificio da Academia Polytechnica, avaliados como allodiaes . . . . . . 34:904$000 reis
Total do orçamento . . . . . 234:929$550 reis

Está conforme.—Secretaria de estado dos negocios do reino em 16 de maio de 1864.—*José Eduardo Magalhães Coutinho.*

Projecto de lei apresentado pelo conselheiro Adriano Machado á camara dos snrs. deputados na sessão de 15 de março de 1879

Senhores.—O projecto das obras dos paços dos estudos do Porto exige a expropriação das lojas situadas nos baixos do antigo edificio da Academia da marinha e commercio da cidade do Porto, que andam arrendadas em proveito dos orphãos do collegio de Nossa Senhora da Graça, das quaes a camara municipal da mesma cidade é administradora.

O projecto de lei que tenho a honra de submetter á vossa approvação, tem por fim principal habilitar o governo a realisar a expropriação d'aquellas lojas, conforme lhe permittir a verba auctorisada para aquellas obras, emquan-

to se não promulga uma lei com bases mais largas para a conclusão do edificio.

A dotação da Academia para premios de estudantes, despezas de expediente, bibliotheca, jardim botanico, museus de mineralogia e zoologia, laboratorio chimico, compras de instrumentos de astronomia, e de modelos para o ensino da geometria descriptiva e mechanica applicada, não passa de 1:730$000 reis!

Tendo, como tenho, por angustiosa a situação da fazenda publica, não ouso propôr o augmento d'esta verba até á cifra que seria rasoavel para o provimento de tantos e tão importantes estabelecimentos. Mas peço, visto que não vai n'isso augmento algum de despeza, que da verba de 4:000$000 reis, votada para as obras da Academia Polytechnica no exercicio corrente, seja destinada a quantia de 1:000$000 reis para a compra de apparelhos e utensilios do laboratorio chimico.

Uma relação, annexa a este projecto de lei, dos objectos indispensaveis áquelle estabelecimento, justifica esta providencia.

Parece-me, pois, que será digno da vossa approvação o seguinte:

PROJECTO DE LEI

Artigo 1.°—É o governo auctorisado para contractar com a camara municipal do Porto, a expropriação das lojas existentes nos baixos do edificio da Academia Polytechnica.

§ 1.°—As expropriações serão pagas em inscripções da divida publica de 3 por cento, de rendimento egual ao das lojas que forem expropriadas.

§ 2.°—As inscripções serão compradas com o dinheiro votado annualmente para as obras da Academia Polytechnica.

Art. 2.º—Da verba votada para as obras da Academia Polytechnica do Porto, no exercicio de 1878-1879, será applicada até á quantia de 1:000$000 reis para a compra e collocação de apparelhos e utensilios destinados ao laboratorio de chimica da dita Academia.

§ unico.—A importação dos alludidos apparelhos e utensilios será livre de direitos e emolumentos na Alfandega do Porto.

Art. 3.º—Fica revogada a legislação em contrario.

Sala das sessões da camara dos senhores deputados, 15 de março de 1879.—*Adriano Machado.*

Apparelhos e utensilios de chimica a que se refere o presente projecto de lei.

I

OBJECTOS DEVENDO SER COMPRADOS NA ALLEMANHA

		Mk. Pf.
1456	Balança de analyse podendo pesar 1 kilogramma, sensivel a 0gr.,001 ...	370—80
1456	Balança podendo pesar 500 grammas, sensivel a 0gr.,0005.........	315—00
552	Collecção de areometros do dr. Geissler, dando os pesos especificos de 0gr.,700 a 1gr.,850..............	75—00
363	Apparelho para a decomposição electrolytica do acido chlorhydrico, da agua e do ammoniaco............	12—50
364	Apparelho para determinar a quantidade de hydrogenio contido n'um volume de acido chlorhydrico.....	15—50
365	Apparelho para provar que um volu-	

		Mk. Pf.
	me de chloro e um volume de hydrogenio dão dois volumes de acido chlorhydrico	17—50
367	Apparelho para provar que a agua se compõe de dois volumes de hydrogenio e um de oxygenio..........	32—50
368	Apparelho para demonstrar que dois volumes de agua gazosa se formam de dois volumes de hydrogenio e um de oxygenio medidos a 100°......	852—00
369	Apparelho para demonstrar que o ammoniaco se compõe de tres volumes de hydrogenio e um de azote.	16—50
370	Apparelho para demonstrar que da combinação de tres volumes de hydrogenio com um de azote resultam dois volumes de ammoniaco	16—50
371	Apparelho para a decomposição electrolytica simultanea da agua, do acido chlorydrico e do ammoniaco..	33—00
372	Apparelho para provar que a composição do acido chlorydrico não soffre mudança......................	15—00
373	Apparelho para provar que o oxygenio e o hydrogenio se combinam na proporção dada pela agua	22—50
374	Apparelho para provar que um volume de gaz dos pantanos contém dois volumes de hydrogenio...........	17—00
377	Apparelho para demonstrar as bases physicas da hypothese de Avogrado e Ampère	230—00
378	Apparelho para provar que a com-	

		Mk. Pf.
	bustão dos solidos no ar produz augmento de peso..................	35- 00
382	Apparelho para mostrar os phenomenos da combustão...............	20—00
384	Apparelho para medir a densidade dos vapores....................	171—00
381	Apparelho para demonstrar a igualdade de volume do oxygenio e do anhydrido carbonico e sulfuroso formados por elle.................	24—00
383	Apparelhos para as experiencias com o acido sulfuroso liquido.........	15—00
375	Apparelho para decompor o acido azotico pelo calor...............	15—55
330-331	Apparelho de Bunzen para determinar as leis da absorpção dos gazes nos liquidos..................	152—00
332	Apparelho para medir a densidade dos vapores produzidos pela combustão no eudiometro	28—00
333	Apparelho para a diffusão	12—00
349	Gazometro de mercurio	5—50
352	Cuva de mercurio com supporte para eudiometro....................	17—00
353	Apparelho para medir a densidade dos gazes pela velocidade do seu escoamento....................	45—00
355 e 357	Apparelho para medir o volume dos gazes.........................	14—00
344	Apparelho para limpar os tubos de vidro.........................	1—25
358	Apparelho para produzir o gaz oxhydrogenio	16—00

		Mk. Pf.
115	Cinco apparelhos de Fresenius para doseamento do chloro	12—00
113	Apparelho para conservar o chloro .	22—00
657-658	Uma collecção de modelos de madeira para o estudo da crystalographia chimica (dr. Kekulé)	150—00
75	Uma collecção de alcaloides.......	120—00
(a)	Um apparelho de distillação	
	Somma (excepto o artigo *a*).	2315—30

II

OBJECTOS DEVENDO VIR DE FRANÇA

		Francos
	Um calorimetro de Berthelot completo	470
	Um apparelho de Berthelot para determinar os pontos de ebulição....	18
	Apparelho de Berthelot para medir o calor especifico dos liquidos.......	12
	Idem para medir o calor da vaporisação dos liquidos	12
	Idem para a decomposição do acido formico	12
	Idem para produzir o ozono	5
	Idem para a synthese da benzina..	2
326	Apparelho de Sainte Claire Deville e Troost para determinar a densidade dos vapores	30
343	Idem de Sainte Claire Deville para o estudo da chamma	15
599	Idem para a producção do hydrogenio	70

		Francos
340 bis	Quatro tubos para repetir as experiencias da dissociação da agua....	10
341	Apparelho para a dissociação do oxydo de carbone..................	10
424	Idem para purificar o mercurio....	10
1311 bis	Apparelho de Dumas para a synthese da agua.....................	60
1311	Apparelho de Dumas e Boussingault para a analyse do ar	60
1347	Apparelho de Mohr para doseamento do gaz carbonico nas aguas mineraes	55
	Pipeta de Mohr para tirar a agua das fontes mineraes.................	5
5	Apparelho de Laurent para o tratamento dos silicatos pelo acido fluorhydrico	18
594	Apparelho para a producção do oxygenio pelo chlorato de potassio.....	70
1320	Tubo de Houzeau para produzir ozono	5
	Torno de copellação, de gaz	50
	Apparelho de Schilling para determinar o peso especifico dos gazes.....	72
	Somma.......	1074

Os preços dos objectos vindos da Allemanha são os indicados no catalogo da casa C. Gerhardt, de Bonn. Os dos objectos vindos de França são os da casa Alvergniat.

PROPOSTA

Renovo a iniciativa do projecto de lei, apresentado em 15 de Março de 1879 pelo deputado por um dos circulos do Porto, Adriano Machado, em relação á verba de 4:000$000 reis, votada no orçamento para as obras da Academia Polytechnica.

Lisboa, 13 de Abril de 1880.—*Antonio Pinto Magalhães Aguiar.*

PARECER N.º 185

Senhores.—A' vossa commissão de obras publicas foi remettida a proposta de lei apresentada em 15 de Março de 1889 pelo snr. deputado Adriano Machado, havendo sido renovada a iniciativa da mesma proposta, na presente sessão, pelo snr. deputado Magalhães Aguiar.

Considerando:

Que está consignada no orçamento do estado a verba de 4:000$000 reis, para as obras dos Paços dos Estudos no Porto, e que taes obras não podem progredir convenientemente sem que sejam expropriadas as lojas situadas nos baixos do antigo edificio da Academia de Marinha e Commercio;

Que é indispensavel a continuação das obras para que ali se possam accommodar diversos estabelecimentos scientificos da mesma cidade;

Que as lojas do edificio referido andam arrendadas em beneficio dos meninos orphãos do collegio de Nossa Senhora da Graça, sendo administradora a Camara municipal;

Que ao laboratorio chimico da Academia Polytechnica pertence annualmente uma exigua verba, em virtude de

ser pequenissima a dotação consignada no orçamento para todos os estabelecimentos da mesma academia, d'onde resulta achar-se aquelle laboratorio longe de poder satisfazer ás necessidades do ensino;

E' a vossa commissão, d'accordo com o governo, e ouvida a illustre commissão de fazenda, de opinião que seja convertida a proposta no seguinte:

PROJECTO DE LEI

Artigo 1.º—Fica o governo auctorisado a contratar com a Camara municipal do Porto a expropriação das lojas existentes nos baixos da Academia Polytechnica.

§ 1.º—As expropriações serão pagas em inscripções da divida publica de 3 por cento do rendimento equivalentes ao das lojas expropriadas.

§ 2.º—As inscripções serão compradas pela verba votada annualmente para as obras da Academia Polytechnica.

Art. 2.º—Da verba votada para as obras da Academia Polytechnica do Porto no exercicio de 1879-1880 será applicada até á quantia de 1:000$000 reis para a compra e collocação de apparelhos e utensilios destinados ao laboratorio de chimica da dita Academia.

§ unico—A importação dos alludidos apparelhos e utensilios será livre de direitos e emolumentos na alfandega do Porto.

Art. 3.º—Fica revogada a legislação em contrario.

Sala da commissão, em 3 de Maio de 1880.

João Candido de Moraes—Pinheiro Borges—Elvino de Brito—Antonio José d'Avila—J. Bandeira Coelho—A. L. Guimarães Pedrosa—Goes Pinto, relator.

Senhôres. — A vossa commissão de fazenda examinou com a devida attenção o projecto de lei, n.º 84-V, da iniciativa do snr. deputado Adriano Machado, renovado n'esta sessão pelo snr. deputado Magalhães Aguiar com o n.º 163-D.

Considerando que da approvação do referido projecto não provém augmento de despeza e unicamente a applicação conveniente e util de uma verba do orçamento;

E' a nossa commissão de parecer que seja approvado o referido projecto com a seguinte substituição ao artigo 2.º: 1879-1880 em vez de 1878-1879.

Mariano de Carvalho — Manoel Pereira Dias — Antonio Candido — Pereira de Miranda — Francisco Beirão — Antonio Ennes — Joaquim Valle — A. Fonseca — Joaquim de Vasconcellos Gusmão, relator.

Unico documento que existe na Secretaria da Junta Inspectora da Academia a respeito do Director da Aula de Desenho

Senhor — A Junta d'Administração da Companhia Geral d'Agricultura dos Vinhos do Alto Douro Inspectora da R. A., munida com a benigna permissão que lhe concede o § 50 dos Estatutos da mesma R. A., tem a honra de propor a Vossa Alteza Real para Director da Aula do Desenho, e Pintura da mesma R. A. a Domingos de Sequeira, cujo Lugar se acha vago por fallecimento de Francisco Vieira, por se persuadir que elle terá todas as qualidades necessarias para n'este principio dar ao dito Estabelecimento o methodo, e boa ordem necessaria afim de progredir com lustre e utilidade publica, mediante a sua assistencia na referida Aula, ao menos pelo tempo de tres mezes cada anno, para poder vencer o ordenado, como era

obrigado o dito Francisco Vieira, para lhe promover os beneficios que elle estava obrigado de lhe procurar, e que não se poderão verificar pelo seu fallecimento.

Parece á Junta que o referido Domingos de Sequeira, mediante a sua assistencia, merece que V. A. R. seja servido nomeal-o para occupar o Emprego de Director d'Aula do Desenho na R. A. d'esta cidade do Porto.

V. A. R., porém, Determinará o que for mais do seu R. Agrado. Porto em Junta de 7 de Janeiro de 1806 — *P. Gaspar Cardoso de Carvalho Fonseca — Domingos Martins Gonçalves — Christovão Guerner — Antonio de Mello Correia — José Monteiro de Carvalho — Martim Affonso Borne — José Antonio Taveira de Magalhães — José de Souza Mello.*

PROGRAMMAS

PROGRAMMAS

I Cadeira — **Algebra superior e geometria analytica**

Lente *L. I. Wodhouse*. Seis horas semanaes

ALGEBRA

I

1. *Determinantes.* — Noções preliminares. Disposição par, disposição impar. Permutação de dous elementos. Permutação circular. Definição do determinante. Notação. Ordem do determinante. Termo principal. Propriedades geraes dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento dos determinantes. Regra de Sarrus. Calculo dos determinantes. Resolução das equações do primeiro grau a muitas incognitas. Producto de dous determinantes.

2. *Generalisação da noção de quantidade.* — Propriedades combinatorias das operações de arithmetica. Numeros irracionaes. Introducção da ideia de direcção no symbolo representativo da grandeza. Quantidades geometricas. Módulo, argumento. Definição das operações geometricas. Verificação das propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Quantidades imaginarias. Interpretação geometrica de $\sqrt{-1}$. Notação algebrica e trigonometrica das quantidades imaginarias. Operações sobre imaginarios. Formula de Moivre. Raizes da unidade.

3. *Series.* — Series convergentes e divergentes. Series de termos reaes. Regras de convergencia. — Series de termos imaginarios. Series absolutamente convergentes. Operações sobre series. Series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. Circulo de convergencia. Series uniformemente convergentes.

4. *Productos infinitos.* — Condição de convergencia. Limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n cresce indefinidamente.

5. *Fracções continuas.* — Definição. Transformação de fracção em se-

rie. Estudo do caso em que os numeradores das integrantes são a unidade.

6. *Principios geraes da theoria das funcções.* — Continuidade e descontinuidade. Theoremas sobre continuidade. Funcções uniformes e multiformes.

Funcção algebrica inteira. — Formula de Taylor. Definição e formação das derivadas. Continuidade da funcção inteira. Decomposição (1) da funcção em factores lineares. Funcções racionaes fraccionarias. Sua decomposição.

Funcção exponencial. Sua periodicidade. A funcção exponencial é uniforme e continua em todo o plano. Funcção inversa ou logarithmica. Ramos da funcção. Continuidade.

Funcções circulares directas e inversas. Ramos e pontos criticos. Continuidade.

II

7. *Theoria geral das equações algebricas.* — Theoremas preliminares. A equação algebrica tem pelo menos uma raiz. Decomposição do seu primeiro membro em n factores lineares. A equação algebrica de grau n tem n raizes. Composição dos coefficientes. Divisores algebricos. Reducção da equação com raizes eguaes. Soluções communs a duas equações. Transformação das equações. Irreductibilidade.

8. *Separação das raizes das equações numericas.* — Resolução algebrica e numerica das equações. Limites dos módulos das raizes e limites das raizes reaes de uma equação de coefficientes reaes. Theoremas relativos á substituição da variavel por dois numeros e corollarios. Theorema sobre a mudança de signal de $\frac{F(z)}{F'(z)}$ quando $F(Z)$ passa por zero. Theorema de Rolle. Theorema de Sturm. Applicação ás condições de realidade das raizes de uma equação de grau dado.

Separação das raizes pelo theorema de Sturm.

Separação das raizes pelo methodo de Lagrange.

Theorema de Cauchy e separação das raizes imaginarias.

9. *Calculo das raizes.* — Raizes commensuraveis. Raizes incommensuraveis. Methodo de Newton e Fourier. Raizes imaginarias.

10. *Funcções symetricas.* — Eliminação.

11. *Resolução algebrica das equações.* — Equação do terceiro grau. Equação do quarto grau.

GEOMETRIA ANALYTICA

I

1. *Trigonometria espherica.* — Formulas fundamentaes. Resolução dos triangulos.

(1) A demonstração dá-se na theoria das equações.

II

2. *Ponto.* — Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Distancia entre dois pontos. Transformação de coordenadas.

3. *Linha recta.* — Equação de uma linha. Equação da linha recta. A equação do primeiro grau representa uma recta. Differentes formas da equação da linha recta. Equação da recta que passa por dois pontos. Condição para que tres pontos estejam em linha recta. Angulo de duas rectas. Condição de parallelismo e de perpendicularidade. Intersecção de duas rectas. Condição para que tres rectas sejam concorrentes. Equação de uma recta que passa pela intersecção de outras duas. Distancia de um ponto a uma recta.

4. *Applicação do methodo de notação abreviada á linha recta.* — Da equação $\alpha - k\beta = 0$. Applicação do methodo á demonstração de theoremas e resolução de problemas. Relação harmonica e anharmonica. Systemas de rectas homographicas. Coordenadas trilineares. Coordenadas tangenciaes.

5. *Equações de grau superior ao primeiro representando rectas.* — Generalidade sobre equações que se decompõem em fractores. Rectas imaginarias.

6. *Circulo.* — Equação do circulo. Differentes fórmas. Circulo que passa por tres pontos. Equação do segundo grau que representa um circulo; determinação do raio e coordenadas do centro.

7. *Parabola.* — Definição e equação. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação em coordenadas polares.

8. *Ellipse.* — Definição e equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

9. *Hyperbole.* — Definição e equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

10. *Definição d'estas curvas pela relação das distancias de seus pontos a uma recta e a um ponto.* — Equação geral.

11. *Tangentes.* — Tangentes em geral. Tangente e normal ao circulo. Tangentes por um ponto exterior. Corda de contactos.

Tangente e normal á parabola. Subtangente e subnormal. Differentes propriedades.

Tangente e normal á ellipse e hyperbole. Subtangente e subnormal Differentes propriedades.

12. *Cordas supplementares.*

13. *Asymptomas.*

14. *Centros e diametros.* — Centros e diametros na parabola, na ellipse e na hyperbole. Diametros conjugados.

15. *Discussão da equação geral do segundo grau.*

16. *Polos e polares.*

III

17. *Ponto, recta e plano.* — Coordenadas do ponto no espaço. Distancia entre dois pontos. Coordenadas polares de um ponto. Transformação de coordenadas. Superficies e linhas. Equações da recta e do plano. Problemas sobre a recta e o plano.

18. *Superficies cylindricas conicas e de revolução.*

19. *Discussão da equação do segundo grau.*

II Cadeira — Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações

Lente *Dr. F. Gomes Teixeira.* Seis horas semanaes

Na exposição das doutrinas que são comprehendidas n'esta cadeira, o respectivo lente segue os **Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal,** que são publicados n'este *Annuario,* e de que elle é auctor.

III Cadeira — **Mecanica racional e cinematica**

Lente *J. A. Albuquerque*. Seis horas semanaes

I — MECANICA RACIONAL

Noção de movimento e de força: objecto da mecanica; distincção entre mecanica racional e mecanica physica. Divisão da mecanica racional em Phoronomia, Estatica e Dynamica. Representação ideal dos corpos em mecanica racional: ponto material e systema material.

Caracter vectorial das grandezas em mecanica. Noções de geometria de systemas de vectores como propedeutica da mecanica moderna.

A. — PHORONOMIA

a) MOVIMENTO ABSOLUTO

1) Phoronomia do ponto material

Objecto da Phoronomia; correlação entre esta sciencia e a geometria. Movimento absoluto e relativo. A fluxão das grandezas: noção geral de velocidade.

Theoria da velocidade

Equação do movimento do ponto sobre a trajectoria. Movimento uniforme e variado, rectilineo e curvilineo. Velocidade linear. Representação graphica da lei do movimento: curva dos espaços e das velocidades. Importancia da representação graphica do movimento como methodo de investigação das leis naturaes.

Decomposição do movimento: a simultaneidade de movimentos como pura concepção. Expressão do movimento de um ponto pelo de tres movimentos rectilineos coordenados: equações finitas do movimento. Composição de velocidades simultaneas de um ponto: parallelogrammo, parallelipipedo, e, geralmente, polygono das velocidades. Movimento de um ponto em relação a um polo fixo: movimento areolar no plano e no espaço; movimento de circulação, e de resvalamento angular; velocidades respectivas. Propriedades projectivas do movimento de um ponto.

Applicações: projecção de um movimento circular e uniforme sobre um diametro — principaes propriedades da velocidade de um planeta no seu movimento ao redor do sol — methodo de Roberval para o traçado das tangentes ás curvas: exemplifica-se o methodo na aspira de Archimides, na conchoide, na quadratriz, nas conicas e na cycloide.

Theoria da acceleração

Incremento geometrico da velocidade; acceleração total; sua decomposição natural em acceleração tangencial e centripeta. Interpretação geometrica da acceleração total. Propriedades projectivas da acceleração total. Desvio elementar: importancia da sua consideração; expressão da acceleração no desvio. Equações differenciaes do movimento. Conhecimento que a consideração simultanea das noções de velocidade e acceleração dá do movimento de um ponto. Hodographos das accelerações.

2) Phoronomia dos solidos ou systemas invariaveis

Simplificações que ao estudo do movimento de um solido dá a hypothese da invariabilidade da fórma. Movimento elementar de um solido. As especies mais simples do movimento elementar de um solido; movimento de translacção e de rotação; suas propriedades geometricas e phoronomicas. Representação da rotação por um vector.

Figuras planas

Movimento de uma figura plana no seu plano: deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; centro ou polo instantaneo de rotação; determinação do polo pelo conhecimento das direcções das velocidades contemporaneas de dois pontos; situação do polo no infinito. Movimento continuo da figura plana; trajectorias polares; movimento epicycloidal plano.

Applicações ao movimento de uma recta de comprimento constante, cujos extremos são dirigidos pelos lados de um angulo: circulos de Cadran.

Movimento de uma figura plana no espaço: deslocação infinitamente pequena; fóco do plano; caracteristica; propriedades do fóco e da caracteristica. Caso em que a caracteristica passa ao infinito.

Figuras esphericas

Movimento de uma figura espherica na sua esphera; deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; polo e eixo instantaneo de rotação; sua determinação. Movimento continuo da figura espherica: trajectorias polares esphericas; reducção do movimento da figura ao de rolamento das trajectorias polares esphericas; movimento epicycloidal espherico.

Solidos

Movimento de um solido cujos pontos se deslocam parallelamente a um plano fixo; sua reducção ao de uma figura plana no seu plano; rolamento cylindrico.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: sua reducção ao de uma figura espherica na sua esphera; theorema de Poinsot: rolamento conico. Relação que liga a velocidade angular ao redor do eixo instantaneo, a velocidade angular d'este eixo descrevendo as duas superficies conicas e os raios de curvatura d'ellas. Solução analytica: expressão em determinantes das componentes da velocidade linear de um ponto do solido.

Movimento o mais geral de um solido livre no espaço; deslocação finita; reducção a uma translacção e rotação; infinidade de combinações de dois movimentos do mesmo genero; quantidades que permanecem constantes em todos os systemas d'essas combinações; systema notavel em que a translacção é parallela ao eixo da rotação; seu estado unico: movimento heliçoidal; eixo de rotação e de resvalamento, sua construcção — deslocação infinitesimal: eixo instantaneo de rotação e de resvalamento; determinação da velocidade do movimento heliçoidal. Movimento continuo: imagem de Poinsot; imperfeição d'esta representação. Axoides: imagem de Poncelet. Superficies e contornos complementares dos axoides: theorema de Rouleaux que reduz o movimento mais geral de um solido ao rolamento de duas curvas.

b) MOVIMENTO RELATIVO

1) Movimento relativo de um ponto material

Relação entre a velocidade absoluta, relativa e de arrastamento. Casos de movimento relativo em que o movimento de arrastamento é uma translacção simples, uma rotação simples: exemplifica-se no movimento apparente do sol e no movimento diurno dos astros. Relação entre a acceleração absoluta, relativa, de arrastamento e complementar: theorema de Corolis, sua demonstração geometrica e analytica. Expressão em determinantes das componentes da acceleração complementar.

2) Movimentos elementares compostos ou relativos de um solido

Composição de translacções. Composição de rotações: 1.º ao redor de eixos parallelos: binario de rotações — 2.º ao redor de eixos convergentes. Composição de translacções e rotações.

Expressões analyticas da deslocação elementar de um ponto do solido em funcção dos seis parametros que definem o movimento mais geral do solido.

Acceleração no movimento dos solidos: centro das accelerações; logares geometricos dos pontos materiaes em que as accelerações tangenciaes e centripetas são nullas. Theorema de Rivals.

Passagem da phoronomia á estatica e dynamica

Principios fundamentaes da mecanica racional, considerados como factos primarios da constituição cosmica: I Principio da persistencia — II Principio da coexistencia — III Principio da mutualidade de acção.

As forças comparadas aos seus effeitos: noção de massa. Avaliação numerica das massas pelos pesos; densidade; homogenidade. Representação das forças por vectores.

Como a noção de massa opera a passagem dos theoremas e construcções da phoronomia para a dynamica: composição das forças applicadas a um mesmo ponto material; projecção das forças: decomposição de uma força applicada a um ponto material em força tangencial e normal á trajectoria do ponto; theorema de Coriolis em dynamica; força de inercia de arrastamento, força centrifuga composta.

Noção do trabalho das forças: alta importancia da noção do trabalho, tirada da sciencia economica, em vista da industria do homem e da grande industria da Natureza. Unidades de trabalho. Trabalho elementar de uma força: dois aspectos differentes de o considerar. Expressão do trabalho elementar de uma força emanante de um ponto fixo.

Trabalho virtual; importancia d'esta concepção como artificio de raciocinio. Theorema que liga o trabalho elementar da força resultante ao das forças componentes; theorema que liga o trabalho elementar de uma força relativo a uma deslocação qualquer aos trabalhos da mesma força relativos ás deslocações componentes d'aquella. Expressão do trabalho elementar de uma força em coordenadas rectangulares. Noção de momento de uma força em relação a um ponto, a um eixo e a um plano. Representação do momento por uma area plana; representação dos momentos por vectores: eixo do momento. Theorema do trabalho elementar de uma força na rotação do ponto de applicação da força ao redor do eixo. Determinantes que exprimem os momentos de uma força relativamente a tres eixos rectangulares. Modificações que soffrem estes determinantes devidas a uma translacção dos eixos coordenados. Expressão do momento de uma força relativamente a um eixo dado de posição em funcção d'aquelles determinantes. Theorema de Varignon.

B. — ESTATICA

1) Estatica do ponto material

Definição de equilibrio. Independencia das condições estaticas das forças e do estado de quietação ou de movimento do ponto material. Equações geraes do equilibrio. Reducção das tres equações do equilibrio a uma unica equação, por meio do trabalho virtual. Equilibrio de um ponto obrigado a uma curva e superficie; reacção normal da curva e da superficie; reducção d'este equilibrio ao do ponto livre. Equilibrio relativo de um ponto livre: applicação a um ponto pesado á superficie da terra; peso do ponto material.

2) Estatica dos systemas materiaes

Noções sobre a constituição dos systemas naturaes; distincção de forças interiores e exteriores. Hypothese da continuidade da materia nos corpos. Pressão n'um elemento dos systemas materiaes; isotropismo. Systemas obrigados a ligações: systemas invariaveis. Lemma relativo á somma dos trabalhos das forças interiores.

Equilibrio dos systemas obrigados a ligações (*principio das velocida-*

des virtuaes): reducção do systema ao de pontos livres. Theorema de Tschirn hausen servindo de lemma para obter a expressão do trabalho das forças de ligação. Annullação d'este trabalho para deslocações virtuaes compativeis com as ligações. Methodo de Lagrange para o estabelecimento analytico das equações geraes do equilibrio; sua importancia.

Exemplos.

Equilibrio dos systemas invariaveis; applicação do *principio das velocidades virtuaes* aos systemas invariaveis — 1.º caso em que o systema é livre: as seis equações necessarias e sufficientes que definem o equilibrio. Reducção do numero das equações de equilibrio em casos especiaes das forças applicadas: *a*) forças convergentes em um mesmo ponto; *b*) forças parallelas a um plano, a uma recta; *c*) forças situadas n'um mesmo plano. — 2.º caso em que o systema está obrigado a um ponto fixo, ou a um eixo fixo; equações da reacção do ponto ou do eixo.

Equivalencia das forças; sua expressão analytica por seis ou por uma equação. Consequencias immediatas da equivalencia.

Composição das forças; caso de forças convergentes; caso de duas forças parallelas — binario de forças.

Theoria dos binarios de forças: propriedades do binario; representação do binario por um vector (*eixo do binario*); propriedade projectiva do eixo; effeito dynamico de um binario applicado a um solido. Composição dos binarios.

Composição geral das forças: reducção de um systema qualquer de forças a duas; a uma resultante de transacção e a um binario; momento resultante. Expressão analytica da condição de reductibilidade de um systema de forças a uma unica força. Minimo dos momentos relativamente ás diversas posições da resultante de translacção (*dynamo*)*: eixo central dos momentos* — representação geometrica de Poinsot dos eixos no espaço relativamente aos quaes se tomam os momentos de um systema de forças. Theorema de Charles relativo á invariabilidade de volume do tetraedro cujas arestas oppostas são os dois vectores que representam as forças equivalentes a um systema.

Equilibrio de um corpo que se appoia n'um plano fixo por um numero determinado de pontos; solução do paradoxo relativo ás pressões.

Centro das forças parallelas; propriedades caracteristicas. Centro de gravidade: centro de massa de solidos, superficies e linhas. Caso da homogenidade. Theoremas que podem facilitar a determinação do centro de gravidade. Exemplos principaes da determinação do centro de gravidade na hypothese da homogenidade.

Methodo centrobarico: theorema de Pappus — Guldin.

Equilibrio dos systemas funiculares: noção de tensão do cordão: equilibrio de um cordão actuado por tres forças: equilibrio do polygono funicular; construcção graphica de Varignon: casos particulares do polygono funicular; equações do equilibrio da curva funicular: applicação a um fio tenso sobre uma superficie — à um fio homogeneo pesado suspenso pelas extremidades (catenaria). Equilibrio dos systemas polygonaes articulados sem attricto.

Theoria geral da funcção de força; determinação simples das quantidades relativas á força por meio da funcção de força; representação geometrica por meio das superficies de nivel. Caso fundamental em que existe

uma funcção de força: potencial. Theoremas de Laplace e de Poisson relativos ao parametro differencial da segunda ordem do potencial.

Applicação á attracção de uma esphera homogenea ou composta de camadas esphericas homogeneas sobre um ponto material situado no exterior ou interior da esphera.

Equações do equilibrio interior de um systema material qualquer: equilibrio do parallelipido e do tetraedro elementar. Ellipsoide das pressões. Orientação de um elemento plano sob uma determinada pressão.

Casos de systemas istropos: Hydrostatica. Equações geraes do equilibrio dos fluidos; equação de Clairaut. Superficie de nivel; expressão da pressão no parametro da superficie de nivel; propriedades isopiezica, isotherma e homogenica de uma camada de nivel.

Applicação aos liquidos pesados; altura representativa das pressões. Pressão de um liquido pesado sobre uma superficie immersa: centro de pressão; sua determinação geometrica e analytica no caso da superficie plana. Reducção das pressões elementares sobre uma superficie curva. Caso em que as pressões superficiaes dão resultante: *principio* de Archimedes. Equilibrio dos corpos fluctuantes.

Applicações: nivellamento barometrico; equilibrio relativo de um liquido que gira uniformemente ao redor de um eixo vertical.

Summaria exposição historica dos diversos principios sobre que se tem fundado a Estatica.

C.—DYNAMICA

1) Dynamica de um ponto material

Equações differenciaes dynamicas do movimento linear: problemas geraes que ellas exprimem; determinação das constantes arbitrarias. Expressão d'estas equações sob a fórma de equilibrio: força de inercia, equação do trabalho virtual que exprime o equilibrio dynamico.

Equações differenciaes dynamicas do movimento areolar.

Integraes geraes das equações differenciaes do movimento: Theorema do augmento da quantidade de movimento projectado — Theorema do trabalho; caso de funcção de força: theorema das forças vivas; expressão do theorema por meio das superficies do nivel. Dois casos importantes em que existe funcção de força — Theorema do accrescimo do momento da quantidade de movimento em relação a um eixo: interpretação phoronomica de Resal. Caso do theorema das areas. Forças centraes: expressão differencial de uma força central nos elementos da trajectoria.

Movimento de um ponto sobre uma curva e sobre uma superficie dadas: caso de funcção de força. Dynamica do movimento relativo de um ponto material: extensão dos theoremas geraes a este movimento.

Applicações:

Movimento rectilineo em geral: casos em que a integração se reduz a quadratura — Movimento rectilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central proporcional á distancia ao centro—Movimento rectilineo e vertical, descendente e ascendente, de um ponto pesado no vacuo e n'um meio resistente. Observação sobre as soluções singulares em meca-

nica: exemplo de Poisson — Movimento de um ponto pesado sobre uma recta inclinada.

Exemplos principaes de movimento curvilineo:

Movimento dos projectis no vacuo e em um meio resistente — Movimento curvilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central; *a*) proporcional á distancia ao centro; *b*) inversamente proporcional ao quadrado da distancia ao centro; movimento dos planetas ao redor do Sol; leis de Kepler e suas immediatas consequencias.

Exemplos principaes do movimento de um ponto sobre uma curva e uma superficie: Movimento de um ponto material pesado movel sobre um circulo vertical; pendulo circular simples no vacuo: pendulo cycloidal no vacuo. Tautochrona e brachistochrona de um ponto pesado no vacuo. Pendulo circular em um meio resistente no caso de mui pequenas oscillações.

Exemplos de movimentos relativos: queda de um ponto pesado no vacuo attendendo ao movimento da terra: desvio Este confirmado pela experiencia de Reich em Freyberg. Pendulo de Foucault.

2) Dynamica dos systemas materiaes

Systemas obrigados a ligações:

Reducção da dynamica dos systemas á estatica dos systemas: *principio* de d'Alembert : seus differentes enunciados, e expressão analytica. Equações geraes do movimento estabelecidas pela applicação do methodo dos multiplicadores; vantagem da introducção das indeterminadas. Exemples do emprego do methodo. Theorema de Hamilton: equações dynamicas de Lagrange (primeira forma canonica); equações dynamicas de Hamilton (segunda forma canonica). Applicação das equações de Lagrange ao movimento de um ponto obrigado a uma esphera (pendulo conico).

Integraes da equação geral do movimento: Theorema do movimento do centro de gravidade — Theorema das quantidades de movimento projectadas — Theorema dos momentos das quantidades de movimento; interpretação phoronomica do Resal: theorema das areas; plano do maximo das areas; caso do plano invariavel — Theorema das forças vivas; theorema da energia; conservação da energia total do Universo ; theorema de Ivon Villarceau relativo ao virial.

Summario historico dos theoremas geraes da dynamica.

Theorema de Gauss do minino esforço. Theorema da menor acção.

Equações dos pequenos movimentos.

Estabelidade e instabelidade do equilibrio: theorema de Dirichlet. Coexistencia das pequenas oscilações e sobreposição dos pequenos movimentos.

Extensão dos theoremas geraes ao caso do movimento relativo.

Theorema de Newton da similhança em mecanica.

Propriedades mecanicas do centro de gravidade; theorema de Kœnig; trabalho da gravidade.

Systemas invariaveis: Decomposição do movimento de um solido livre em movimento do centro de gravidade e ao redor d'este centro; expressão da somma dos momentos das quantidades de movimento e da força viva de um solido movendo-se ao redor de um eixo.

Theoria dos momentos de inercia: momentos de inercia em relação

a um eixo, a um ponto (*polar*), e a um plano; relação de dependencia das tres especies de momentos de inercia; raio de gyração; relação entre os momentos de inercia relativos a eixos parallelos; propriedade de minimo momento. Momento de inercia em relação a um eixo passante por um ponto; eixos principaes de inercia e momentos de desvio (*deviations moments, Ranckine*); propriedades dos eixos principaes e sua determinação; ellipsoide central. Expressão do momento de enercia de um solido de revolução em relação ao seu eixo. Momentos de inercia das figuras planas; ellipse central. Momento de inercia polar. Exemplos principaes da determinação de momentos de inercia.

Equações dynamicas do movimento de um solido ao redor de um eixo fixo; theoria do pendulo composto — pendulo simples synchrono; eixo de oscillação; propriedades de maximo e de minimo do tempo de uma oscillação.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: equações de Euler; formulas que exprimem as componentes de rotação instantanea nas velocidades de nutação, precessão e rotação propria do solido. Caso em que as forças são nullas, ou reductiveis a uma força que passam constantemente pelo ponto fixo: dois primeiros integraes das equações de Euler; estabelecimento directo d'estes integraes. Theoria geometrica de Poinsot.

Movimento de um solido de revolução homogeneo obrigado a um ponto fixo do seu eixo de figura — caso particular de uma precessão uniforme sem nutação, com rotação propria uniforme. — Applicação a um solido de revolução pesado homogeneo.

Movimento de um solido inteiramente livre, actuado por um systema qualquer de forças.

Theoria da percussão; theoremas relativos á variação da força viva na percussão. Applicação a um solido obrigado a um eixo fixo: centro de percussão. Pendulo balistico. Choque dos corpos; solução analytica de Poisson; solução geometrica de Darboux.

Hydrodynamica; equações geraes do movimento dos fluidos. Condições relativas á superficie. Fórma das equações ás derivadas parciaes no caso de funcção de força e de funcção de velocidade. Movimento permanente de um liquido pesado: theorema de Daniel Bernouilli; sua demonstração directa; theorema de Torricelli.

II — CINEMATICA

(THEORIA DOS MECANISMOS)

Objecto de cynematica theorica, considerado como sciencia da composição e do movimento das machinas, ou theoria dos mecanismos. Breve digressão historica sobre a origem e formação d'esta sciencia — exposição critica dos systemas de classificação dos mecanismos de Monge, Hachette, Lanz e Bétaucourt (1809-1819), Borgnis (1818); Limitação e denominação da sciencia por Ampère (1834); systema de Roberto Willis (1841), de Laboulaye (1849), de Haton de la Goupillière (1864). Razão da imperfeição dos systemas propostos. Constituição logica e scientifica da cinematica pelo systema

Reuleaux, fundado nas verdadeiras leis da formação dos mecanismos. Solução geral dos problemas das machinas: ponto de partida de Reuleaux; definição de machina. Caracteristica dos problemas relativos ás machinas. Analyse cinematica das machinas: decomposição em mecanismos, em cadeias, em binarios de elementos. Formação de um binario de elementos pela ligação reciproca dos elementos de dois binarios primitivos. Ligação de um numero qualquer de binarios de elementos: cadeia cinematica simples e composta; cadeia fechada desmodramica. Transformação da cadeia fechada em mecanismo. Pluralidade d'esta transformação. Transformação do mecanismo em machina.

Notação cinematica.

Differentes especies de binarios de elementos: condição a que deve satisfazer um binario de elementos para ser desmodramico. Binarios de elementos inferiores (parafuso, cylindro, prisma). Apoios necessarios e sufficientes dos elementos. Binarios superiores. Investigação geral dos perfis de elementos em vista de uma dada lei de movimento: processo geral de dentadura; theorema e construcção de Savary; processo approximado de Poncelet: processo de trajectorias polares auxiliares.

Caso em que a lei do movimento é definido por trajectorias polares circulares: engrenagens cylindricas nos tres typos principaes de lanterna, flancos, desenvolventes de circulo; processos de dentadura de Reuleaux. Engrenagem de cremalheira. Calculo do trabalho do attricto nos dentes de uma engrenagem. Engrenagens conicas; methodo practico de Tredgold. Engrenagens hyperboloides.

Binarios de elementos dependentes: clausura dos binarios por meio de forças sensiveis; clausura por meio de cadeias cinematicas. Elementos cinematicos ductis; binarios monocineticos (orgãos de tracção e de compressão); clausura cinematica completa dos elementos ductis.

Cadeiras cinematicas dependentes: pontos mortos nos mecanismos; passagem d'estes pontos por meio de forças sensiveis ou por clausura de cadeias.

Cadeia fundamental: *quadrilatero de manivella cylindrico;* trajectorias polares da cadeia; trajectorias polares reduzidas. Mecanismos derivados da cadeia. Transformação evolutiva da cadeia: *cadeia cylindrica de manivella de impulsão;* theoria geometrica e analytica da biella. Mecanismos d'ella derivados; machinas que elles constituem.

Principios geraes de modificação accessoria de fórma: 1.º amplificação dos moendes (Zapfen-Erweiterung) — 2.º reducção das cadeias. Applicação d'estes principios á cadeia de manivella ($C_3''P\perp$): amplificação 2 em 1, 1 em 2 (excentrico), 3 em 2, 2 em 3, 1 em 2 em 3, 3 em 2 em 1.

Transformação evolutiva da amplificação annular 2 em 3: *cadeia de corrediça em cruz rectangular;* mecanismos derivados.

Reducção do numero de membros de uma cadeia: exemplifica-se nas cadeias ($C_3''P\perp$) — c; ($C_3''P\perp$) — a — c; ($C_2\perp C_2$) — c.

Capsulismos de manivella derivados da cadeia ($C_3''P\perp$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schemas das machinas de vapor de Simpson e Shipton, de Cochrane, de Davies; schemas das bombas de Beale e de Ramelli, do ventilador de Wedding).

Capsulismos de rodas derivados da cadeia simples de rodas dentadas

cylindricas ($Cz + C_2''$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schema das machinas de Pappenheim, Fabry, Root, Evrard, Repsold, Dart, Revillion Galloway, Trens ordinarios de rodas dentadas; trens epicycloidaes.

Analyse cinematica das machinas tradicionalmente consideradas como *machinas simples:* alavanca, plano inclinado, cunha, roldana, sarilho, parafuso.

Analyse das machinas completas: concepção que considera a machina completa como o resultado da combinação das tres partes — receptor — transmissor — operador. Divisão das machinas em machinas de transporte e de transformação. Critica d'aquella concepção. Interpretação cinematica da machina completa.

Theoria geral do movimento das machinas.

METHODO DE ENSINO

O curso da 3.ª cadeira é dado em 70 lições (numero médio) de duas horas cada uma (seis semanaes) expostas na aula pelo professor. Depois de um certo numero de lições, que completem uma divisão do programma, os alumnos são interrogados pelo lente sobre as materias dadas (o numero dos interrogatorios não excede oito).

O professor expõe as lições segundo o programma, sem dependencia de compendio; para o que, préviamente á hora da lição, os calculos e as figuras são escriptos e traçadas com todo o desenvolvimento nas tres pedras da aula, sendo as duas horas da lição consagradas á exposição ora feita pelo professor. Indica-se, porém, como podendo servir de auxilio ao trabalho dos alumnos no estudo das lições expostas sobre o programma, a obra de *H. Laurent, Traité de mécanique rationnelle*, 2 vol., 2.ª edição, Paris, 1878; e faz-se opportunamente a bibliographia das principaes obras a consultar para maior desenvolvimento de alguns assumptos mais importantes do curso.

IV Cadeira — **Geometria descriptiva**

Lente *Duarte Leite Pereira da Silva.* Oito horas semanaes.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

PRIMEIRA PARTE

1 Objecto e historia da geometria descriptiva; methodo das projecções. Representação graphica do ponto, da recta e do plano, e problemas relativos; methodos de rebatimento e rotação. Projecções auxiliares, mudança de planos de projecção; pontos e linhas de construcção fóra do quadro graphico.

Problemas relativos aos angulos triedros; construcções respectivas.

2. Curvas planas, geometricas e graphicas. Tangente e normal, pontos singulares; traçado das tangentes e normaes a curvas graphicas, curvas d'erro. Curvatura, construcção do seu centro.

Projecções d'uma curva plana, e da tangente; partes uteis e parasitas.

Superficies; plano tangente, e normal. Curvatura; secções principaes, theorema d'Euler. Normalias, linhas de curvatura e geodesicas. Representação graphica d'uma superficie, contornos apparentes.

3. Cones e cylindros, em especial de 2.ª ordem, sua representação graphica. Construcção do plano tangente. Problemas em que entram como auxiliares cones e cylindros.

Secções planas d'um cone ou cylindro; caso em que são parallelas. Fórma das curvas; ramos infinitos e assymptotas. Processos para construir as projecções d'uma sécção, e das suas tangentes.

Construcção da secção no seu plano. Transformada por planificação; methodo geral para o seu traçado.

4. Superficies de revolução, modos de geração. Planos tangentes, e normaes. Representação graphica das superficies de revolução e construcção do plano tangente.

Secções planas; methodos geraes para determinar as suas projecções, e a tangente n'um ponto qualquer.

Toro; fórma das secções planas, theorema das Yvon Villarceau. Hyperboloide de revolução; principaes propriedades.

5. Superficies regradas, modos de geração. Superficies planificaveis, e enviezadas; planos tangentes, aresta de reversão. Concordancia de duas superficies regradas ao longo d'uma geratriz.

Hyperboloide regrado; principaes propriedades. Divisão homográphica e propriedades anharmonicas das geratrizes. Representação graphica: construcção de planos tangentes e secções planas.

Transição para o paraboloide; estudo especial d'esta superficie. Sua representação graphica; construcção de planos tangentes e de secções planas.

Construcção do plano tangente a uma superficie regrada qualquer, por meio de hyperboloides e paraboloides auxiliares.

Estudo summario dos conoides, cylindroides, e superficies d'egual declive.

6. Quadricas; modos de geração, propriedades e theoremas geraes. Representação graphica das differentes especies de quadricas; construcção de planos tangentes. Secções planas; sua construcção.

7. Intersecção de superficies; curvas empenadas. Tangente, e plano normal, pontos singulares; plano e circulo osculador. Propriedades projectivas das curvas empenadas.

Methodos geraes de construcção da intersecção de duas superficies, e da tangente n'um ponto qualquer.

8. Intersecção de cones e cylindros, processos de construcção da curva e da tangente. Penetrações, arrancamentos, e casos mixtos. Fórma da curva; ramos infinitos e assymptotas, pontos singulares.

9. Intersecção de superficies de revolução e cones ou cylindros; processo de construcção da curva por meio de projecções conicas ou cylindricas, e traçado da tangente.

Intersecção de superficies de revolução. Processo de construcção no

caso em que os seus eixos se encontram, e traçado da tangente, grau da projecção da intersecção no plano dos eixos. Caso geral em que os eixos se não encontram: varios processos de construcção, emprego de superficies auxiliares de revolução (Schiappa Monteiro), traçado da tangente.

10. Intersecção de quadricas. Discussão da curva; quarticas de segunda especie e cubicas; principaes propriedades. Theoremas geraes sobre as intersecções planas de quadricas.

Processos geraes de construcção da intersecção de quadricas, baseados na projecção conica (Schiappa Monteiro); traçado da tangente, e determinação dos pontos singulares.

Processos especiaes para o caso de duas quadricas de revolução (Chapuy), e duas quadricas regradas, com geratriz commum.

11. Noções de geometria projectiva.

12. Calculo graphico. Operações simples, potencias e raizes; logarithmos. Instrumentos de calculo. Operações graphicas sobre areas; transformação graphica de areas; planimetro polar.

13. Graphostatica. Representação graphica das forças. Composição de forças que actuam n'um ponto, parallelogrammo e polygono de forças. Composição de forças n'um plano; binarios, polygono funicular. Momentos de rotação das forças. Forças no espaço. Caso de forças parallelas; centro de gravidade. Momentos de inercia. Applicações.

SEGUNDA PARTE (4.º ANNO)

1. Superficies helicoidaes. Parafuzos de filetes triangulares e quadrados.

Traçado das engrenagens cylindricas, conicas e helicoidaes.

2. Projecções cotadas. Problemas relativos á recta e ao plano.

Cones e cylindros, construcção de planos tangentes.

Superficies topographicas.

3. Theoria das sombras. Definição; linha de separação de sombra e luz. Sombra propria e produzida. Methodos geraes para a resolução dos problemas de sombras; pontos brilhantes. Noções sobre aguadas.

4. Perspectiva linear conica. Definições; perspectiva de figuras no geometral, escala de larguras. Perspectiva d'uma elevação, escala de alturas; rebaixamento do geometral. Construcções directas sobre o quadro. Problema inverso da perspectiva.

5. Perspectiva cavalheira, axonometrica e isometrica.

6. Noções de stereotomia.

V Cadeira — **Astronomia e geodesia**

Lente (interino) *L. I. Wodhouse*. Oito horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 66 a 68).

VI Cadeira — **Physica**

Lente *Dr. Adriano de Paiva*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 68 a 83).

VII Cadeira — **Chimica inorganica**

Lente *Dr. José Diogo Arroyo*. Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 83 a 89).

VIII Cadeira — **Chimica organica**

Lente *A. J. Ferreira da Silva*. Oito horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

A. — CHIMICA ORGANICA GERAL

I. PRELIMINARES

1. *Noções geraes.* — Substancias existentes nos sêres vivos. Composição das substancias organicas. Substancias organisadas. Desenvolvimento historico da marcha seguida no estudo chimico dos compostos organicos: methodos analyticos, methodos syntheticos. Objecto e utilidade do estudo da chimica organica.

2. *Analyse elementar; formulas.* — Analyse qualitativa. Analyse quantitativa. Densidades gazosas; fundamentos dos principaes methodos empregados na sua determinação. Formulas racionaes baseadas na noção de atomicidade. Formulas de Berthelot.

3. *Isomeria. Metameria. Polymeria.* — Constituição dos isomeros.
4. *Classificação dos compostos organicos.* — Series homologas; funcções chimicas. Classificação por funcções (Berthelot). Divisão geral dos compostos organicos em gordos, aromaticos e de addição aromaticos.

II. CARBONETOS DE HYDROGENIO

1. *Carbonetos de hydrogenio em geral.* — Carbonetos fundamentaes. Classificação e nomenclatura dos carbonetos. Formação por analyse e por synthese.
2. *Carbonetos formenicos ou paraffinas.* — Formena ou methana. Oleos de petroleo; paraffina, vaselina, etc. Illuminação pelos compostos organicos. Chammas em geral e particularmente da lampada de Bunzen: applicações.
3. *Carbonetos ethylenicos (olefinas) e acetylenicos.* — Ethylena. Acetylena.
4. *Carbonetos camphenicos.* — Essencia de terebinthina. Oleos volateis ou essenciaes. Cautchu e gutaperka.
5. *Carbonetos benzenicos.* — Benzina e seus homologos; constituição e isomerias. Nitrobenzina.
6. *Outros carbonetos aromaticos.* — Breves noções sobre a naphtalina e a anthracena.

III. ALCOOES

1. *Alcooes em geral.* — Classificação, nomenclatura e principaes derivados dos alcooes. Importancia d'esta funcção.
2. *Alcooes monatomicos.* — Alcool ordinario; preparação do alcool. anhydro. Menção dos principaes alcooes monatomicos.
3. *Alcooes poly-atomicos em geral.* — Definição, derivados e classificação dos alcooes poly-atomicos.
4. *Glycerina ordinaria.*
5. *Alcooes hexatomicos e de atomicidade superior.* — Glucoses em geral e glucose ordinaria. Mel das abelhas. Saccharoses; analyse dos assucares. — Polysaccharides: amido, dextrina, cellulosa; gommas diversas.
6. *Phenoes.* — Phenol ordinario. Acido picrico e picratos. Pyrogalhol.

IV. ALDEHYDES

1. *Aldehydes em geral.* — Definição, classificação e nomenclatura dos aldehydes. Indicação dos principaes aldehydes.
2. *Aldehydes propriamente ditos.* — Aldehyde ordinario e chloral. Aldehyde benzoico.
3. *Acetonas, quinonas e carbonylos.* — Quinona. Anthraquinona e alizarina. Camphora; celluloide.

V. ACIDOS E SAES

1. *Acidos em geral.* — Definição e classificação dos acidos organicos. Indicação dos principaes.

2. *Acidos monobasicos de funcção simples.* — Acido acetico e acetatos. Acido valerico. Acido estearico. Acido oleico e sabões. Acido benzoico. Acidos phtalicos e phtaleinas. Acido succinico.

3. *Outros acidos.* — Noções sobre os acidos: oxalico, lactico, tartrico, malico, citrico, salicylico, galhico e tannico.

VI. ETHERES

1. *Etheres em geral.* — Classificação dos etheres. Enumeração dos principaes.

2. *Etheres dos alcooes monatomicos.* — Etheres do alcool ordinario; ether ordinario e theoria da etherificação. Chloroformio, bromoformio e iodoformio. Ether methylchlorhydrico. Ether acetico.

3. *Glycerides.* — Os corpos gordos naturaes; oleos liquidos e oleos concretos ou manteigas; gorduras ou banhas e ceras. Nitroglycerina e dynamite.

4. *Glucosides e cellulosides.* — Salicina, arbutina, populina, phlorizina, digitalina, amygdalina, esculina, convallarina etc.—Cellulosides nitricas: algodão-polvora, collodio.

VII. AMINAS

1. *Aminas ou alcalis organicos em geral.* — Classificação e nomenclatura dos alcalis organicos artificiaes.

2. *Aminas em particular.* — Rapido estudo da anilina e da toluidina. Importancia industrial dos seus derivados. Pyridina, quinoleina e bases analogas. Nevrina ou cholina. Glycollamina. Tyrosina. Sarcosina. Acido aspartico.

3. *Alcalis naturaes ou alcaloides.* — Alcalis fixos e volateis: methodos de extracção e constituição.

4. *Alcaloides em especial.* — Morphina, narcotina, quinina, estrychnina, nicotina, atropina, pilocarpina. Principios activos do chá, do café e do tabaco.

VIII. AMIDAS

1. *Amidas em geral.* — Definição e classificação das amidas: imidas e nitrilas. Indicação das principaes.

2. *Amidas em especial.* — Oxamida. Glycollamida. Taurina. Acido hippurico; asparagina. Anil azul e branco: synthese do anil.

3. *Compostos ou derivados azoicos.* — Azobenzol, etc.

IX. COMPOSTOS ORGANO-METALLICOS

1. *Compostos organo-metallicos.* — Sua origem e constituição. Zincoethyla. Cacodyla.

X. SERIE CYANICA

1. *Serie cyanica em geral.* — Theorias d'esta serie.
2. *Compostos importantes da serie cyanica.* — Cyanogenio. Acido cyanhydrico. Cyanetos simples, cyanetos duplos, sulfocyanetos. Cyanamida. Urêa. Urêas compostas; ureides. Acido urico. Creatina, creatinina e guanidina.

XI. PRINCIPIOS ALBUMINOIDES

1. *Materias albuminoides em geral.* — Constituição, propriedades, reacções geraes, e classificação das materias albuminoides.
2. *Albuminoides em especial.* — Estudo rapido da albumina, caseina, fibrina, gluten, osseina e gelatina.

Programma dos trabalhos praticos da 8.ª cadeira

A. — CHIMICA ORGANICA

1. Formena por meio do acetato de soda e a cal sodada.
2. Chloroformio por meio do alcool, da cal chlorada e da cal. Iodoformio por meio do alcool e do iodo.
3. Chloroformio por meio do hydrato de chloral e da potassa. Acção da potassa sobre o chloroformio.
4. Ethylena por meio do alcool e acido sulfurico. Chloreto de ethylena. Brometo de ethylena.
5. Acetylena por combustão incompleta.
6. Terebinthena e seus monochlorhydratos.
7. Benzina. Nitrobenzina.
8. Naphtalina por meio do alcatrão da hulha. Sublimação da naphtalina.
9. Fermentação alcoolica da glucose. Preparação do alcool absoluto.
10. Preparação da glycerina e do emplastro de chumbo. Preparação da mannita por meio do manná.
11. Preparação da glucosa por meio do amido. Reacções da glucosa.
12. Saccharato de cal. Assucar invertido.

13. Preparação do amido com a farinha de trigo. Acção da agua sobre o amido. Acção do iodo sobre o amido.

14. Preparação da cellulosa e acção do acido sulfurico (pergaminho vegetal).

15. Phenol ordinario e acido picrico.

16. Aldehyde ordinario por meio do alcool, do bi-chromato de potassa e do acido sulfurico.

17. Preparação da acetona por meio do acetato de cal.

18. Preparação da anthraquinona pela oxydação da anthracena.

19. Preparação do acido formico por meio do acido oxalico. Formiato de chumbo. Formiato de baryta.

20. Acido valerico por meio do alcool amylico. Valerato d'ammonia. Acidos dos corpos gordos. Sabões.

21. Acido benzoico por meio do benjoim. Acido oxalico por meio do assucar de canna e do acido azotico.

22. Preparação do acido tartrico e do tartrato de potassa e d'antimonio.

23. Preparação do ether iodhydrico. Preparação do ethylsulfato de baryta e do acido ethylsulfurico.

24. Preparação da anilina. Transformação em vermelho d'anilina.

25. Preparação da acetamida.

26. Preparação do sulfato de quinino.

27. Analyse organica elementar d'um composto ternario, formado de carbono, hydrogenio e oxygenio.

28. Analyse organica elementar d'uma substancia azotada.

B. — CHIMICA ANALYTICA

a) — Exercicios geraes d'analyse chimica

1. Reconhecer os saes dos metaes seguintes: prata, mercurio ao minimo e chumbo.

2. Reconhecer os saes dos metaes acima indicados e os do estanho (no maximo e no minimo), do arsenio e do antimonio.

3. Reconhecer os saes dos metaes antecedentes, e, além d'estes, os de mercurio, bismutho, chumbo, cobre e cadmio.

4. Reconhecer, além dos saes dos metaes precedentes, os de aluminio, ferro ao maximo, chromo e manganesio ao maximo.

5. Reconhecer, além dos saes dos metaes anteriores, os de ferro no minimo, nickel, cobalto, manganesio e zinco.

6. Reconhecer, além dos saes já referidos, os de baryo, stroncio e calcio.

7. Reconhecer, além dos compostos já indicados, os de magnesio, lithio, potassio e sodio.

8. Reconhecer os seguintes acidos, no estado de saes alcalinos: sulfurico, chlorhydrico, azotico, arsenico, borico, phosphorico, carbonico e sulfhydrico.

9. Reconhecer, no estado de saes alcalinos, os acidos indicados an-

teriormente e os seguintes: bromhydrico, iodhydrico, cyanhydrico, carbonico, arsenioso, sulfuroso e silicico.

10. Reconhecer, no estado de saes alcalinos, os acidos precedentes e os seguintes: chlorico, hypochloroso e chromico.

11. Reconhecer os saes insoluveis formados pelos elementos que constituem os saes soluveis, anteriormente analysados.

12. Trabalhos praticos com o massarico:

1 Acção da chamma reductora sobre os compostos dos seguintes metaes: chumbo, cobre, bismutho, estanho, antimonio e zinco, sós ou misturados com os reductores, sobre o carvão.

2 Verificar os caracteres das perolas do sal de phosphoro córadas com os compostos dos metaes: chromo, manganesio, cobalto e cobre.

13. Reconhecer, por meio do massarico, compostos contendo um dos seguintes metaes: chromo, manganesio, cobalto, cobre, chumbo, bismutho, estanho, antimonio e zinco.

14. Reconhecer uma mistura de dois saes, tendo o mesmo acido e bases pertencentes a grupos analyticos diversos.

15. Reconhecer a mistura de dous saes, tendo a mesma base e dois acidos quaesquer.

16. Reconhecer a mistura de dous saes, tendo dous acidos e duas bases.

17. Reconhecer os elementos que compõem uma mistura de substancias insoluveis na agua e nos acidos.

b)—Trabalhos praticos especiaes aos alumnos de engenheria

1. *Analyse dos calcareos.*—Methodos rapidos de ensaio. Determinação do residuo insoluvel nos acidos, da alumina, do peroxydo de ferro, da cal, da magnesia, do acido carbonico e da agua. Separação da arêa e da argilla. Separação do peroxydo de ferro e da alumina. Separação da agua e do acido carbonico.

2. *Analyse d'uma cal ou d'um cimento.*—Doseamento da arêa siliciosa, da silica combinada, da alumina, de peroxydo de ferro, da cal, da magnesia, do acido sulfurico, do acido carbonico e da agua.

3. *Analyse d'uma argilla, arêa ou pozzolana.*—Determinação da silica e dos alcalis.

4. *Analyse do gesso.*—Determinação da agua, do acido carbonico, do acido sulfurico, do oxydo de ferro, da alumina e da cal. Doseamento da magnesia.

c)—Trabalhos praticos dos alumnos que se destinam ás escholas medicas

1. *Analyse das urinas.*—Determinação da densidade, das materias mineraes, da urêa, dos chloretos, dos phosphatos, da albumina, da glucose

e dos principios biliares. Exame microscopico para a investigação dos corpos pathologicos.

2. *Analyse toxicologica.* — Destruição das materias organicas. Investigação do phosphoro e dos compostos dos metalloides. Investigação do arsenio e compostos metallicos, principalmente do zinco, chumbo, cobre e mercurio. Investigação dos principios organicos, especialmente dos alcaloides.

3. *Analyse da agua potavel.* — Determinação do residuo fixo, do grau hydrotimetrico, do chloro, da materia organica. Enunciação dos resultados.

N. B. — Os programmas de CHIMICA ANALYTICA e de CHIMICA INDUSTRIAL são os mesmos do anno lectivo de 1885-1886.

IX CADEIRA — **Mineralogia, paleontologia e geologia**

Lente (interino) *M. A. Gonçalves.* Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 95 a 100).

X CADEIRA — **Botanica**

Lente *Dr. F. Salles Gomes Cardoso.* Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 100 a 107).

XI CADEIRA — **Zoologia**

Lente *M. A. Gonçalves*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 107 a 109).

XII Cadeira — **Construcções em geral e resistencia dos materiaes**

Lente (interino) *M. Terra Pereira Vianna*. Seis horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

CONSTRUCÇÕES EM GERAL

I Cantaria e alvenarias.
  Elementos das cantarias e alvenarias. Pedras naturaes. Tijolos e outros productos artificiaes. Argamassas: cal, cimentos, pozzolanas, areia.
  Execução das cantarias e alvenarias.
II Construcções de madeira.
  Madeiras.
  Samblagens e ligações.
III Construcções metallicas.
  Metaes. Ferro e aço. Outros metaes e ligas.
  Ligações.
IV Materiaes accessorios.
  Gesso.
  Betumes e asphalto.
  Tintas e vernizes.
  Vidros.
  Materiaes accessorios de origem vegetal.
V Fundações.
  Generalidades. Sondagens. Marcação das obras.
  Fundações ordinarias.
  Dragagens. Estacarias. Enseccadeiras. Massiços immergidos. Esgotos. Trabalhos executados debaixo da agua. Fundações pelo ar comprimido.
VI Organisação dos trabalhos.

SEGUNDA PARTE

RESISTENCIA DOS MATERIAES

PRELIMINARES

I Resistencia das peças em que predomina uma das dimensões.
  1. Distensão e compressão das peças prismaticas.

2. Flexão plana das vigas rectas.
   a) Flexão das vigas rectas submettida a forças normaes.
   b) Caso das forças obliquas.
   c) Solidos de egual resistencia.
   d) Vigas apoiadas n'um numero qualquer de pontos.
3. Flexão plana das peças curvas.
4. Torsão dos prismas.
5. Equilibrio de certos systemas articulados.

II Resistencia das superficies.
   Resistencia dos vasos cylindricos ou esphericos.
   Espessura das caldeiras.

III Equilibrio e estabilidade dos massiços.
   1. Theoria da estabilidade das abobadas.
   2. Theoria do impulso das terras. Estabilidade dos muros de supporte.

TERCEIRA PARTE

GRAPHOSTATICA APPLICADA ÁS CONSTRUCÇÕES

1. Vigas apoiadas em 2 pontos. Theoria dos momentos de flexão e esforços transversos. Determinação graphica das forças.
2. Vigas de rotula simples.
3. Vigas apoiadas n'um numero qualquer de pontos.
4. Abobadas cylindricas.
5. Impulso das terras. Muros de supporte.

XIII Cadeira — **Hydraulica e machinas**

Lente *Roberto Rodrigues Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

1.º anno.—Hydraulica.—Machinas em geral.—Machinas hydraulicas.
2.º anno.—Thermo-dynamica.—Machinas thermicas.—Motores electricos.—Machinas diversas.—Construcção de machinas.

1.º ANNO

I — MACHINAS EM GERAL

1. Definição das machinas em geral. Receptores, transmissores e operadores. Principio da transmissão do trabalho nas machinas. Effeito dyna-

mico. Rendimento. Phases do movimento d'uma machina. Causas das perdas de trabalho e meios de as reduzir.

2. Moderadores e reguladores. Volantes.

3. Unidades de trabalho. Apparelhos destinados á medida do trabalho.

4. Motores em geral. Classificação dos motores. Noções geraes sobre os motores animados.

II — HYDRAULICA

a) — Preliminares

Recordação das principaes noções de Hydrostatica e Hydrodynamica. Generalisação do theorema de Daniel Bernouilli. Condições d'applicação d'este theorema a uma corrente de dimensões finitas. Extensão dos theoremas de Hydrostatica e Hydrodynamica a casos d'equilibrio ou de movimento relativo.

b) — Escoamento dos liquidos por orificios

1. *Casos em que pódem despresar-se os effeitos da viscosidade.* — Escoamento por orificios abertos em parede delgada. Fórma da veia liquida. Coefficiente de contracção e coefficiente de despeza. Escoamento por orificios abertos em paredes espessas. Effeito d'um alargamento na entrada do orificio. Tubo reintrante de Borda. Escoamento por orificios seguidos d'uma calheira. Descarregadores.

2. *Casos em que é necessario attender aos effeitos da viscosidade.* — Effeito dos alargamentos rapidos de secção. Theoria dos tubos addicionaes cilindricos ou conicos.

3. *Applicações diversas.* — Açude de vigotas. Batel-porta. Adufas.

c) — Movimento da agua nos tubos

1. *Theoria do movimento rectilineo e uniforme d'um liquido n'um tubo.* — Equação geral. Lei da distribuição das velocidades n'uma secção transversal. Velocidade média.

2. *Movimento da agua nos tubos simples de diametro e despeza constantes.* — Formulas diversas. Determinação experimental dos coefficientes numericos. Problemas diversos.

3. *Movimento da agua nos tubos simples de diametro e despeza variaveis.* — Caso em que as variações de diametro e de despeza não são continuas. Caso em que o diametro e a despeza variam continuamente. Tubos

de diametro variavel e despeza constante. Tubos de diametro constante e despeza variavel.

4. *Movimento da agua nos tubos complexos.*—Solução dos dous problemas geraes a resolver. Distribuições d'agua. Exemplos diversos.

d)—Movimento da agua nos canaes

1. *Movimento uniforme.*—Equação do movimento uniforme. Fórmulas empyricas e fórmulas theoricas. Distribuição das velocidades na secção transversal da corrente. Influencia da natureza da parede e das dimensões e fórma da secção transversal. Problemas diversos.

2. *Movimento variado.*—Fórmula fundamental. Problemas que esta fórmula permitte resolver. Transformação da mesma fórmula n'uma equação differencial a duas variaveis. Discussão da equação transformada. Casos particulares. Ressalto superficial. Effeito das mudanças rapidas de secção nos canaes.

e)—Resistencia dos fluidos

1. Pressão d'uma veia liquida contra um plano fixo. Pressão d'um liquido em movimento n'um tubo contra diversos obstaculos. Pressão d'um liquido indefinido. Experiencias de Dubuat. Resistencia ao movimento dos corpos fluctuantes.

2. Resistencia dos meios gazosos. Moinhos de vento.

3. Meios empregados para medir a velocidade dos fluidos. Medida da vasão das correntes.

f)—Movimento dos gazes

1. *Movimento dos gazes de temperatura constante.*—Equação do movimento. Escoamento permanente d'um gaz por um orificio. Effeito d'um tubo addicional. Movimento permanente d'um gaz n'um tubo cilindrico. Effeito das mudanças rapidas de secção nos tubos. Trabalho produsido pela compressão e expansão dos gazes.

2. *Movimento dos gazes de calôr constante.*—Casos em que não póde admittir-se a constancia de temperatura. Lei de Laplace. Fórmula que dá o trabalho de compressão e expansão n'este caso.

3. *Applicações diversas.*—Ventiladores. Machinas d'insufflação. Compressores.

III — MACHINAS HYDRAULICAS

1. *Preliminares.* — Motores hydraulicos em geral. Receptores que os utilisam e sua classificação. Equação do trabalho nos receptores hydraulicos.

2. *Rodas d'eixo horisontal.* — Rodas que recebem a agua inferiormente. Rodas de costado. Rodas que recebem a agua superiormente.

3. *Rodas d'eixo vertical.* — Turbinas. Rodas helicoidaes. Rodas de siphão. Rodas de reacção.

4. *Receptores diversos.* — Balança d'agua. Machinas de columna d'agua. Accumuladores.

5. *Machinas d'elevar agua.* — Bombas. Tympano. Parafuso d'Archimedes. Carneiro hydraulico.

6. Comparação entre os differentes receptores hydraulicos. Escolha do receptor. Quéda a utilisar. Emprego da força utilisada.

7. Installação e construcção dos receptores hydraulicos.

XIV Cadeira — Construcções e vias de communicação

Lente (interino) *R. Mendes*

(Curso biennal)

(6 HORAS SEMANAES)

1.° anno. — Edificios. Abastecimento d'agua e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.

2.° anno. — Estradas e caminhos de ferro. Pontes.

1.° ANNO

I — EDIFICIOS

1. *Noções d'architectura.* — Architectura antiga. Architectura da idade média. Architectura moderna. Desenvolvimento successivo dos differentes systemas d'architectura. Observações sobre a architectura contemporanea.

2. *Elementos dos edificios* — Alicerces. Paredes. Soalhos. Tectos. Vigamentos. Coberturas. Portas e janellas. Escadas. Chaminés. Supportes isolados. Arcos. Abobadas.

3. *Combinação dos elementos dos edificios.* — Combinações horisontaes. Combinações verticaes.

4. *Partes principaes dos edificios.* — Porticos. Vestibulos. Pateos. Salas. Galerias.

5. *Composição dos edificios.* — Principios geraes de composição. Decoração.

6. *Edificios em geral.* — Partes principaes d'uma cidade. Edificios e estabelecimentos publicos. Edificios e estabelecimentos particulares.

7. *Noções de hygiene.* — Situação e orientação dos edificios. Condições geraes de salubridade. Aquecimento. Ventilação. Illuminação. Desinfecção.

II — ABASTECIMENTO D'AGUA E ESGOTOS

a) — Abastecimento d'agua

1. *Quantidade e qualidade das aguas.* — Quantidade d'agua a distribuir. Proveniencia das aguas. Caracteres das aguas potaveis. Filtração.

2. *Conducção das aguas.* — Captagem das nascentes. Aqueductos. Passagem dos valles. Elevação das aguas.

3. *Reservatorios de distribuição.* — Condições geraes d'estabelecimento. Modos de construcção.

4. *Distribuição das aguas.* — Traçado da canalisação. Diversas especies de tubos. Ensaio e assentamento dos tubos. Accessorios. Apparelhos de distribuição publica. Apparelhos de distribuição particular.

b) — Esgotos

1. *Generalidades.* — Systemas d'esgoto. Disposição geral da canalisação. Emissores. Collectores. Canos geraes e parciaes. Accessorios.

2. *Esgotos publicos e particulares.* — Destino dos esgotos. Meios de impedir as infiltrações e exhalações. Limpeza e ventilação dos esgotos. Despejos das casas. Canalisações particulares. Fossas.

3. *Construcção dos canos.* — Materiaes a empregar. Perfis. Declive. Ligações.

4. Depuração das aguas d'esgoto. — Applicação das aguas d'esgoto á agricultura.

III — HYDRAULICA AGRICOLA

1. *Saneamento do sólo.* — Systemas de saneamento. Drenagem. Effeitos e utilidade da drenagem. Execução dos trabalhos.

2. *Dessecamentos.* — Insalubridade e causas da formação dos pantanos.

Processos geraes de dessecamento. Dessecamento dos pantanos sujeitos á influencia das marés. Principaes obras a construir nos diversos systemas de dessecamento.

3. *Irrigações.* — Methodos diversos d'irrigação. Meios de obter as aguas d'irrigação. Canaes de derivação e distribuição das aguas. Obras d'arte.

IV — RIOS E CANAES

a) — *Rios*

1. *Estado natural dos cursos d'agua.* — Origem das aguas. Altura variavel das aguas. Causas da variação de nivel. Regimen dos rios. Acção das aguas sobre as margens e leito dos rios. Materiaes arrastados. Fórma do leito. Vasão dos rios.

2. *Navegação fluvial.* — Imperfeições que apresentam os cursos d'agua naturaes relativamente á navegação. Differentes processos de tracção e propulsão dos barcos.

3. *Obras para melhorar e estabelecer a navegação nos rios.* — Operações preliminares. Rectificação das sinuosidades. Diminuição da velocidade. Augmento da profundidade. Açudes. Portadas de navegação. Eclusas dos rios.

4. *Obras nos rios navegaveis.* — Dragagens. Rectificação e defeza das margens. Caminhos de sirga. Defeza contra as inundações. Portos e abrigos dos rios.

b) — *Canaes*

1. *Preliminares.* — Navegação dos canaes. Differença entre os canaes e os rios.

2. *Classificação dos canaes.* — Canaes lateraes. Canaes de ramal divisorio. Canaes maritimos.

3. *Eclusas* — Fórma e dimensões das principaes partes d'uma eclusa. Portas das eclusas. Meios empregados para encher e despejar as caldeiras.

4. *Alimentação dos canaes.* — Alimentação dos canaes lateraes. Alimentação dos canaes de ramal divisorio. Consumo d'agua d'um canal. Meios de diminuir o consumo d'agua das eclusas.

5. *Construcção.* — Traçado. Perfis longitudinal e transversaes. Estações. Aqueductos d'alimentação e descarregadores. Reservatorios. Subterraneos. Estancamento dos canaes. Crusamento com outras vias de communicação.

V — PORTOS DE MAR E PHAROES

a) — *Portos de mar*

1. *Movimentos da agua e do ar.* — Correntes. Marés. Ondas. Ventos.

2. *Regimen das costas* — Praias. Dunas. Corrosão das costas. Estuarios e deltas dos rios. Defesa das costas.

3. *Generalidades.* — Disposição geral dos portos e enseadas. Differença entre os portos do Oceano e os do Mediterraneo. Classificação dos portos.

4. *Obras exteriores dos portos.* — Enseadas. Entrada dos portos. Construcção dos molhes e quebramares. Particularidades de construcção dos principaes quebramares. Influencia das obras sobre o regimen das aguas e sobre a entrada e sahida dos navios.

5. *Obras interiores dos portos.* — Ante-porto. Caldeiras. Docas. Eclusas maritimas. Muros de caes. Accessorios.

6. *Desentulhamento dos portos.* — Dragagens. Correntes de varrer. Caldeiras de varrer.

7. *Obras para construcção e reparação dos navios.* — Estaleiros. Planos inclinados. Platafórmas de maré. Apparelhos elevatorios. Docas seccas. Docas fluctuantes.

8. *Balisagem dos portos.* — Marcas. Balisas. Boias. Signaes.

b) — *Pharoes*

1. *Disposições geraes.* — Distribuição e apparencias das luzes. Alcance luminoso e alcance geographico. Grupamento das luzes.

2. *Apparelhos d'illuminação.* — Apparelhos catoptricos. Apparelhos dioptricos. Combustiveis. Lampadas. Luz electrica.

3. *Edificios dos pharoes.* — Pharoes d'alvenaria. Pharoes de madeira. Pharoes de ferro. Pharoes fluctuantes.

XV CADEIRA — **Montanistica e docimasia**

(Curso biennal)

1.º anno: — 1.ª parte — Docimasia; 2.ª parte — Metallurgia

2.º anno: — Arte de minas

(6 HORAS SEMANAES)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 116 a 122).

XVI Cadeira — **Economia politica. Estadistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.**

Lente *A. Lobo.* (Seis horas semanaes)

PRIMEIRA PARTE

ECONOMIA POLITICA

1.—Definições de economia politica, riqueza, valor, utilidade e suas especies.

2.—Producção. Em que consiste o aperfeiçoamento da producção. Agentes da producção. Intervenção dos agentes naturaes em toda a producção.

3.—Trabalho, productivo e improductivo. Divisão do trabalho, limites naturaes, vantagens e inconvenientes da divisão do trabalho. Cooperação. Classificação das industrias, e influencia geral de cada uma d'ellas na producção.

4.—Cabedaes, materiaes e immateriaes, productivos e improductivos, activos e inactivos. Capital fixo e circulante. Influencia dos cabedaes na producção.

5.—Cabedaes (continuação). Machinas, suas vantagens e inconvenientes. Moeda, sua funcção economica.

6.—Moeda (continuação). Qualidades que deve ter a mercadoria intermediaria das trocas. Metaes preciosos. Unidade monetaria. Moeda subsidiaria. Cunhagem. Legislação patria ácerca de moeda.

7.—Moeda (continuação). Papel moeda, seus inconvenientes.

8.—Cabedaes (continuação). Cabedaes immateriaes: instrucção, bons costumes, credito. O credito é um cabedal como a moeda, a qual não tem outro fim senão supprir a falta ou as dificiencias do credito. Especies de credito, real e pessoal.

9.—Credito (continuação). Credito pessoal, instrumentos de credito.

10.—Credito (continuação). Estabelecimentos de credito. Bancos, operações bancarias, especies de bancos. Notas de banco, sua utilidade, differença entre as notas e o papel-moeda. Limites naturaes da emissão. Monopolio ou liberdade de bancos.

11 e 12.—Cabedaes (continuação). Formação, conservação, renovação e transmissão dos cabedaes materiaes. Liberdade. Propriedade. Segurança. Direito de testar. Direitos de transmissão.

13.—Formação dos cabedaes materiaes. Caixas economicas. Seguros.

14.—Cabedaes (continuação). Formação e realisação dos cabedaes pessoaes ou immateriaes.

Propriedade litteraria, artistica e de invenções.

15.—Continuação. Associação, seus principaes typos, sua força.

16.—Continuação da doutrina da realisação dos cabedaes pessoaes. Seguro de vidas. Monte-pios. Da instrucção tratar-se-ha no direito administrativo.

17 e 18.—Distribuição das riquezas. Theoria dos mercados. Dos preços. Leis dos preços. Tendencia para o equilibrio.

19.—Preços (continuação). Crises alimenticias.

20.—Preços (continuação). Crises commerciaes e industriaes.

21.—Lucros e aluguer dos cabedaes. Lei geral. Do juro, lei natural, taxa legal.

22 e 23.—Aluguer da terra. Discussão da theoria da renda de David Ricardo. Direitos da sociedade a respeito das terras incultas; discussão ácerca do direito de occupação.

24 e 25.—Salario. Leis naturaes dos salarios. Causas perturbadoras.

26.—Salario (continuação). Do supposto antagonismo entre o salario e o capital. Remuneração das funcções publicas.

27.—Emprego da riqueza. Consumo reproductivo e não reproductivo. Consumo não reproductivo, luxo e prodigalidade, leis sumptuarias.

28.—Consumo reproductivo; recapitulação das materias dadas a respeito da formação e renovação dos cabedaes.

29 e 30.—Consumos publicos. Do Estado, sua missão. Principios mais importantes ácerca dos impostos. (A doutrina dos impostos será desenvolvida no direito administrativo).

31.—População — Exame da lei de Malthus. Verdadeiros principios.

32.—População (continuação). Emigração e colonias.

33 e 34.—Provas e contraprovas dos principios expostos. Organisação natural do trabalho. Harmonias economicas (resenha das principaes leis expostas durante o curso).

Organisação natural (continuação). Liberdade de commercio.

35 e 36.—Organisação artificial, systema protector, balança de commercio, etc.

37 e 38.—Organisação artificial (continuação). Cooperações, restricções, regulamentos.

39.—Organisação artificial (continuação). Communismo e socialismo. Creta e Esparta. Platão.

40.—Communismo (continuação). Communidades asceticas. Anabaptistas.

41.—Communismo e socialismo (continuação). Thomas Morus. Campanella. Morelly.

42.—Communistas modernos, Babeuf, La Mennais, Cabet, Pedro Lerox.

43.—Socialismo. S. Simão, Roberto Owen, Fourier.

44.—Socialismo.—Luiz Blanc, direito ao trabalho. Proudhon.

ESTADISTICA

Noções geraes. Divisões. Methodos. Operações. Utilidade e progressos.

PRINCIPIOS DE DIREITO PUBLICO E ADMINISTRATIVO

1.—Formas de governo. Breve historia do governo parlamentar em Portugal. A carta, o acto addicional, e a reforma de 1885.

Divisão dos poderes politicos. Poder legislativo; duas camaras; camara dos senadores; camara dos deputados.

2.—Attribuições principaes das côrtes. Privilegios dos membros de uma e outra camara.

3.—Poder executivo. Do rei, irresponsabilidade do rei, responsabilidade dos ministros. Attribuições principaes do poder executivo. Secretarias d'estado, e indicação geral dos serviços que pertencem a cada uma.

4.—Poder moderador, sua missão e attribuições. Até que ponto são os ministros responsaveis pelos actos do poder moderador.

5.—Conselho d'Estado.

Poder judicial. Organisação. Em que consiste a independencia d'este poder. Da camara dos senadores como Tribunal de justiça.

6.—Do ministerio publico.

7.—Principaes garantias dos cidadãos, especialmente da liberdade de imprensa.

8.—Poder constituinte. Artigos constitucionaes e formalidades para a sua reforma. Delegação do poder legislativo. Suspensão de garantias.

Dictaduras, *bills* d'indemnidade. Modificações dos principios geraes de direito publico quanto ás provincias ultramarinas.

9.—Direito eleitoral. Systema da Carta, systema do acto addicional. Indicação das leis em vigor. Capacidade eleitoral activa e passiva. Recenseamento, recursos. Disposições mais importantes para manter a liberdade eleitoral.

10.—Administração. Natureza das funcções administrativas. Organisação do ministerio do reino. Divisão do territorio. Determinação dos limites, annexação e desannexação de freguezias ou parte d'ellas.

11.—Synopse da organisação administrativa. Juntas de parochia, organisação, lugar que occupam na administração, attribuições, regedores de parochia.

12.—Camaras, sua constituição. Rapida exposição das attribuições das camaras. Força e execução das suas posturas. (A exposição das attribuições das camaras tem só por fim dar a conhecer a natureza e importancia d'estas corporações; nos logares competentes se determinará mais amplamente a parte que lhe cabe em cada ramo da administração).

13.—Administradores de concelho ou bairro. Nomeação, gratificação, attribuições, delegação de attribuições nos regedores de parochia, e attribuições ordinarias dos mesmos regedores.

14.—Districtos. Governadores civis, nomeação, vencimentos, attribuições. Secretaria dos governos civis.

15.—Juntas geraes de districto, sua organisação, e attribuições. Commissão districtal. Concelhos de districto, sua constituição, e natureza das suas funcções em geral.

16.—Concelhos de districto (continuação); attribuições consultivas e contenciosas.

17.—Concelhos de districto (continuação); attribuições contenciosas. Principios geraes ácerca do contencioso administrativo. Generalidades ácerca do contencioso fiscal, de que se tratará mais amplamente nas lições sobre a fazenda publica.

18.—Supremo tribunal administrativo, sua constituição. Principaes termos do processo contencioso administrativo.

19.—Deveres da administração para com as pessoas, portuguezas e es-

trangeiras, definição. Dos estrangeiros, direito de azylo, extradicção, titulo de ligitimação e bilhetes de residencia, liberdade de cultos, direitos e deveres em materia civil, criminal e tributaria, naturalisação e seus effeitos.

20.—Deveres da administração para com as pessoas (continuação). Registo civil e ecclesiastico. Protecção aos incapazes, tutelas; abandonados, rodas, conselhos de beneficencia pupillar.

21.—Deveres (continuação). Protecção aos ausentes: no reino — curadoria; no estrangeiro — consulados, corpo diplomatico.

21.—Deveres (continuação). Pessoas moraes, sua capacidade civil. Leis de amortisação e desamortisação. Tutela administrativa, especialmente quanto aos actos das camaras municipaes e juntas de parochia.

22.—Deveres. Beneficencia. A caridade legal considerada economicamente. Soccorros publicos. Conselho geral de beneficencia. Estabelecimentos de beneficencia sujeitos immediatamente á administração publica ou subsidiados pelo Estado.

23.—Beneficencia (continuação). Estabelecimentos particulares e associações de piedade e beneficencia; principios da legislação que os rege, comprehendendo as leis vigentes de amortisação e desamortisação. Intervenção das auctoridades administrativas nos estabelecimentos de beneficencia de piedade; juntas de parochia. Principios legislativos ácerca dos legados pios.

24.—Deveres da administração quanto á segurança publica. Policia e suas divisões. Policia administrativa, funcções dos governos civis. Commissario de policia, e administradores de concelho. Corpos de policia. Guardas municipaes. Requisição de força publica. Considerações ácerca da policia preventiva: passaportes, restricções do direito á associação, etc.

25.—Policia sanitaria. Organisação d'este serviço. Junta consultiva de saude, serviço de saude nos districtos, concelhos e parochias.

Condições para o exercicio da medicina e pharmacia; deveres dos que exercem estas profissões. Boticas, armazens, lojas, etc.

26.—Saude publica (continuação). Vacina; prostituição, estabelecimentos insalubres, incommodos e perigosos; cemiterios e sua policia; pantanos e arrozaes.

27.—Saude publica (continuação). Estações maritimas de saude; lazaretos, quarentenas; providencias sanitarias a respeito dos navios que levam passageiros. Policia administrativa municipal, attribuições das camaras municipaes; partidos de medicina; guardas campestres.

28.—Policia judicial e correccional. Commissarios de policia e administradores de concelho. Termos principaes do processo criminal e correccional.

29.—Policia judicial (continuação). Classificação geral dos crimes; systema penal, penitenciarias e estabelecimentos penaes; prisão preventiva, fianças.

30 e 31.—Deveres da administração a respeito dos interesses moraes dos cidadãos. Instrucção e educação. Direcção geral e conselho superior de instrucção publica. Liberdade de ensino, restricções legaes.

Graus d'instrucção. Instrucção primaria, sua organisação em Portugal, comparada com a das outras nações cultas. Questões do ensino gratuito e obrigatorio.

32 e 33.—Instrucção (continuação). Instrucção real secundaria e superior. Instrucção classica secundaria e superior. Instrucção especial. Estabelecimentos diversos. Espectaculos publicos, sua influencia na instrucção e costumes, deveres das auctoridades administrativas a respeito dos espectaculos publicos.

34 e 35.—Deveres da administração quanto aos interesses moraes dos cidadãos (continuação). Religião, religião do Estado, liberdade de consciencia, casamento civil. Padroado. Beneplacito. Recurso á corôa. Concordatas.

36.—Força publica. Organisação do exercito e marinha.

Recrutamento.

37 e 38.—Fazenda publica. Simples indicação das fontes da receita publica. Organisação do ministerio da fazenda. Pessoal das repartições de fazenda. Classificação legal das contribuições e ideia geral de cada uma d'estas. Questões economicas do imposto unico ou multiplo, do capital ou rendimento proporcional ou progressivo.

39.—Contribuição predial. Se deve ser preferido o systema de quota, se o de repartição. Systema legal. Matrizes, sua formação, isempções, annullações e cobrança; reclamações e recursos. Deveres das diversas auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição predial.

Contribuição industrial. Pessoas sujeitas a ella, isempções e excepções; taxas fixas, taxas variaveis, ordens de terras e classes d'industrias. Juntas de repartidores da contribuição industrial; gremios. Matrizes, lançamento e repartição, annullações, cobrança, reclamações e recursos. Attribuições das auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição industrial. Imposto de pescado e de minas.

40.—Contribuição de renda de casas. Contribuição de registo, actos sobre que recahe, isempções, importancia do imposto nos diversos casos em que é devido, datas das leis e regulamentos ácerca d'esta contribuição. Auctoridades que intervem no serviço da contribuição do registo. Contencioso fiscal.

41.—Contribuição bancaria; imposto de rendimento. Principaes disposições das leis vigentes sobre estes impostos.

Decima de juros, sua base, manifesto, recursos. Imposto de sello, noções geraes, legislação que as rege. Matriculas e cartas. Direitos de mercê. Emolumentos das secretarias d'Estado.

42.—Contribuições indirectas. Breves noções sobre ellas.

43.—Monopolios do Estado: moeda e casa da moeda; correios e telegraphos.

Divida publica.

44.—Contabilidade publica, e seu objecto e divisão em legislativa, administrativa e judiciaria. Contabilidade legislativa, lei annual de despeza, orçamento geral do Estado, sua formação, apresentação, approvação e effeitos, anno economico, creditos ordinarios, supplementares e extraordinarios.

Orçamento rectificado. Contabilidade administrativa. Repartições de contabilidade nos ministerios, repartição dos creditos legislativos, distribuição de fundos, liquidação, ordenamento e pagamento das despezas publicas, centralisação de contabilidade.

45.—Contabilidade judiciaria. Tribunal de contas, seu regimento. Contas dos ministerios, periodos de gerencia e de exercicios. Contas geraes do

Thesouro e dos ministerios ás côrtes, encerramento difinitivo das contas dos exercicios findos, lei annual para o encerramento difinitivo dos exercicios findos, prescripção dos creditos legislativos.

46.—Organisação da fazenda publica nos districtos, comarcas e concelhos. Attribuições dos governadores civis, delegados do thesouro, thesoureiro pagador, administrador do concelho, escrivão de fazenda, recebedor e seus propostos.

Cobrança voluntaria, cobrança coerciva. Fiscalisação.

47.—Fazenda das corporações tanto administrativas como de piedade e beneficencia. Orçamentos geraes, orçamentos supplementares, despezas obrigatorias e facultativas; contas.—Da fazenda municipal em particular; despezas obrigatorias e facultativas e sua analyse.

48—Fazenda municipal (continuação). Receitas ordinarias e extraordinarias, exame legal e economico de cada fonte de receita municipal. Bens municipaes, requesitos para a sua alienação. Questões com as Juntas de parochias ácerca de baldios, pastos e logradouros communs. Questões de limites.

49.—Fazenda municipal (continuação). Orçamento, formação, approvação, effeitos. Contabilidade municipal.

PRINCIPIOS DE DIREITO COMMERCIAL

1.—Divisão das materias do direito commercial—commercio terrestre, commercio maritimo, juiso commercial. Difinição do direito civil, caracter da lei mercantil. Relações entre o codigo civil e o commercial; disposições commerciaes em rasão das pessoas, e por effeito de certos actos; 1.º em rasão das pessoas, commerciantes, requisitos para ser commerciante, capacidade legal, matricula, exercicio habitual de commercio; liberdade de exercer commercio, direito antigo e moderno ácerca da liberdade de commercio, restricções quanto aos corretores, despachantes etc.; licenças, menores, mulheres, estrangeiros. Vantagens de que gosam os commerciantes.

2.—Obrigações communs a todos os que professam o commercio. Registo publico do commercio, o que é, quem escreve n'elle, e seus fins em geral. Escripturação e correspondencia mercantil. Prestação de contas.

3.—Actos commerciaes, noção geral de cada um dos actos mencionados nos artigos 203 e 204 do codigo commercial.

4.—Contractos. Noções do mutuo e usura, commodato e aluguer, deposito e penhor, differenças entre estes contractos. Do mutuo commercial, nomenclatura do codigo civil, differenças entre a legisção commercial e civil, requisitos para que o mutuo seja mercantil, liberdade na estipulação dos juros segundo o codigo civil, falsa liberdade segundo o codigo commercial; juros legaes; differença essencial entre o mutuo e os outros contractos de credito mercantil nos seus effeitos a respeito de terceiro.

5.—Commodato, locação, conducção. Requisitos para que seja mercantil cada um d'estes contractos, direitos e obrigações que d'elles resultam.

Legislação especial ácerca das impreitadas contractadas com o governo ou com a administração do districto, municipio ou parochia.

6.—Deposito, penhor, fianças commerciaes.

Da troca e da compra e venda, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações resultantes d'estes contractos.

7.—Lettras de cambio, definições e requesitos, origem e utilidade das lettras de cambio, sello das lettras. Direitos e obrigações que resultam d'ellas. Livranças, cheques, lettras de terra, cartas de credito.

8.—Mandato e commissão, gestão de negocios, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações que resultam d'estes contractos. Negociantes de commissão, feitores, caixeiros, correctores.

9.—Associações commerciaes. Differentes especies d'ellas, principios communs a todas.

10.—Sociedades anonymas, sua utilidade, natureza, designação, constituição, administração, fiscalisação, dissolução e liquidação, direitos e obrigações dos accionistas, das sociedades e da direcção. Sociedades anonymas estrangeiras. Deveres do governo a respeito das sociedades anonymas.

11.—Sociedades cooperativas. Historia e indole d'estas associações. Exame da lei de 2 de julho de 1867.

12.—Sociedades com firma, de capital e industria, tacita, associação em conta de participação, parceria mercantil, associação de terceiro á parte de um socio. Consignação em conta de participação e á commissão. Noções geraes.

13.—Sociedade (continuação). Formalidades da sociedade mercantil. Dos que podem ser socios e dos que são reputados socios commerciaes. Administração social, direitos e deveres dos socios entre si, para com a sociedade e para com terceiros.

14.—Sociedades (continuação). Dissolução e liquidação das sociedades. Arbitramento em sociedades.

15.—Principios geraes ácerca das obrigações commerciaes e modos porque se dissolvem as provas.

16.—Fallencias. Quebras, sua abertura, qualificação e effeitos, medidas provisorias, funcções do curador fiscal provisorio.

17.—Fallencias (continuação). Ajuntamento dos credores, concordata, administradores da quebra, preferencias, rateio, rehabilitação do fallido, moratorias.

18.—Commercio maritimo.—Embarcações, sua natureza, capacidade para as adquirir, modos de adquirição e seus effeitos, matricula, vistorias para que o navio possa ser aparelhado, ou tomar carga; embargos d'embarcação, privilegios; commercio entre portos nacionaes.

19.—Parceria maritima, modos porque se faz. Responsabilidade e direitos dos donos, compartes, caixas, capitães, contra-mestres, pilotos, e sobre-cargas dos navios.

20.—Ajuste e soldadas dos officiaes e gentes da tripulação, seus direitos e obrigações.

21.—Fretamentos e conhecimentos, fórma e objecto dos contractos de fretamento, e direitos que d'elles resultam. Conhecimentos, seus requisitos e effeitos.

22—Abalroação; quem, quando e como responde pelo damno causado por abalroação. Naufragio, varação e fragmentos naufragos, varas forçadas.

23—Contractos de risco, sua definição e requesitos, transferencia da lettra de risco. Seguro, natureza, objecto e fórma d'este contracto. Pessoas e objectos que podem segurar e ser segurados. Direitos e obrigações do segurador e segurado.

24—Seguros (continuação). Seguro de vidas, breve historia dos estabelecimentos de seguros de vidas em Portugal, tabellas da mortalidade, differentes fórmas porque se póde effectuar este seguro.

25—Avarias, definição, especies, regulação de avarias, repartição e contribuição. Extincção das obrigações em materia de commercio maritimo.

SEGUNDA PARTE

LEGISLAÇÃO

Deveres da administração a respeito dos interesses materiaes da sociedade. Organisação do ministerio das obras publicas, commercio e industria. Direcção dos correios e telegraphos. Serviço postal e telegraphico interno e internacional. Engenheria civil e militar. Expropriação por utilidade publica. Estradas e ruas das povoações. Classificação das estradas. Relações do estado, dos districtos e dos concelhos com a viação publica. Caminhos de ferro; sua historia em Portugal. Policia dos caminhos de ferro. Legislação patria ácerca de minas. Regulamentos para os serviços de obras publicas e minas. Regulamentos de administração e contabilidade de obras publicas.

XVII — Cadeira — **Escripturação em geral e especialmente dos bancos. Contabilidade industrial**

Lente *J. J. Rodrigues de Freitas*

I

Recordação dos principios de contabilidade mencionados no programma dos lyceus. Applicação d'elles. Documentos commerciaes.

II

A lei e o balanço. Concordancia entre os lucros, quaes a escripturação os mostra, e os que resultam do inventario e balanço; registro da analyse das contas por partidas dobradas; modo de saldar as contas; balancete de verificação. Reabertura das contas. Avaliação das mercadorias; analyse das opiniões a este respeito.

Diversas contas: liquidações, papeis de credito, predios, navios, contas suspensas, dividas mal paradas, letras protestadas, contas em moedá estrangeira, consignações de conta alheia, seguros.

Erros na escripturação e modo de os corrigir. Referencias no Razão. Passagem de contas de uma a outra pagina. Abertura de livros novos.

Diversos systemas de escripturação, incluindo os de Corboni e Augier.

Escripturação de uma sociedade collectiva, ou em commandita, ou

anonyma. Abertura dos livros, distribuição de lucros, encerramento e reabertura das contas. Liquidação e dissolução.

Escripturação bancaria. Divisão das contas. Livros principaes e auxiliares. Capital e acções. Descontos e cobranças. Ordens sobre succursaes e agentias. Letras; papel cambial. Deposito de dinheiro e papeis, cheques, contas correntes garantidas. Emprestimos sobre penhores. Emissão de notas e obrigações. Compra e venda de titulos. Commissões. Caixa. Formação dos balancetes e balanços; divisão dos lucros em dividendo, fundos de reserva e outros. O balancete do Banco de Inglaterra. Contabilidade geral. Contabilidade dos escriptorios de liquidação (*Clearing house*).

III

Contabilidade industrial. As transformações industriaes e a escripturação. As materias primas e os productos acabados. Livros principaes e auxiliares. — Formação do preço médio. O preço do custo e as contas de armazem, mão de obra, gastos geraes e productos acabados. Inventario e balanço. Inventario das mercadorias em armazem, classificadas em materias primas, productos em curso de fabricação, e productos acabados. Applicação d'estas doutrinas ás industrias de fiação de seda e de transportes. Noções geraes sobre contabilidade publica.

CALCULO COMMERCIAL

I

Recordação das noções de calculo commercial mencionadas no programma do curso dos lyceus.

Resolução de problemas a este respeito.

II

Cambios. Os metaes preciosos nas suas relações reaes e legaes.

O commercio d'estes metaes, especialmente na praça de Londres.

Relações monetarias internacionaes com o kilogramma de ouro; e relações das moedas entre si: por intrinseco e reciproco; valor d'ellas em Bancos e casas de Moeda.

Unidades cambiaes: (tempo e moeda) diversos typos de papel cambial; o certo e o incerto.

Equação de cambio.

Cambio par, alto e baixo; favoravel e desfavoravel.

Cotações cambiaes. Nivellamento das cotações.

Arbitragens. Paridade, ou par proporcional.

Ordens de banco.

Despezas cambiaes.

Operações de Bolsa. Operações a dinheiro, e a prazo; operações firmes e a premio. Arbitragens em ouro e prata; mercadorias e papeis de credito; cambios fixos.

Annuidades e amortisações. Capital formado por meio de annuidades, e pagamento de dividas. Relação entre a importancia da divida, a annuidade, a duração do emprestimo e a taxa. Decomposição da annuidade em juro e amortisação. Reembolso de emprestimo por annuidades, começando o pagamento d'ellas certo numero de annos depois de contrahido aquelle. Emprestimos publicos e de companhias: emissão de obrigações. Taboas de juros compostos, annuidades e rendas vitalicias.

População. Taboas de mortalidade; sua formação. Vida média e provavel quantidade de existencia, probabilidade de sobrevivencia.

Rendas vitalicias, rendas temporarias e suas especies; formação de capitaes; companhias de seguros de vida: mutualidade e premio; suas operações; seguros no caso de doença.

Caixas de pensões.

XVIII Cadeira

Lente *Francisco da Silva Cardoso*

Esta cadeira, segundo o Decreto de 10 de setembro de 1885, comprehende o ensino de desenho, para os differentes cursos academicos, distribuido em tres partes, a saber:

I PARTE—Desenho de figura, paisagem e ornato.

II PARTE—Desenho de architectura e aguadas.

III PARTE—Desenho topographico. Desenho de machinas.

O ensino de cada uma d'estas partes é dado em tres lições semanaes de duas horas cada uma. Os alumnos de todas as tres partes estão reunidos no salão de desenho da Academia; o professor dirige individualmente os alumnos no trabalho que a cada um destinou, fazendo nos trabalhos as correcções necessarias, e ministrando aos alumnos, n'essa occasião, as explicações theoricas convenientes.

Na I.ª parte, os alumnos copiam uma estampa a lapis e a esfuminho —na II.ª parte, fazem o desenho completo do pedestal, da base, do capitel e entablamento das ordens dorica e jonice, e dos capiteis corinthio e composito, e das aguadas a nankim—na III.ª parte copiam de estampas topographicas a lapis e á penna; fazem á vista o esboço acompanhado de cótas de uma machina, e convertem este esboço em desenho geometrico, sujeito a escala, e aguarellam com as tintas convencionaes. O estudo d'esta ultima parte é precedido de trabalhos de copia de machinas em estampas.

SECÇÃO SCIENTIFICA

FRAGMENTOS DE UM CURSO D'ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

III

(CALCULO DIFFERENCIAL)

Derivando esta equação relativamente a x e a y, obtemos as equações

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

d'onde se deduz

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

Esta equação, independente das funcções arbitrarias é a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis.

3) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema II.

4) As superficies cylindricas e conicas estão comprehendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado. Para applicar a equação das superficies planificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas.

Sendo (a, b, c) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, temos as equações de condição

$$c = Aa + \varphi(A)\,b + \psi(A)$$

$$a + \varphi'(A)\,b + \psi'(A) = 0,$$

entre as quaes e as equações geraes das superficies planificaveis se deve eliminar uma das funcções arbitrarias, $\psi(A)$ e $\psi'(A)$ por exemplo. Vem pois

$$z - c = A(x - a) + \varphi(A)(y - b)$$

$$x - a + \varphi'(A)(y - b) = 0 .$$

A primeira d'estas equações dá

$$\frac{z - c}{x - a} = A + \varphi(A)\frac{y - b}{x - a},$$

e como a segunda mostra que A é funcção de $\frac{y - b}{x - a}$, vem a equação geral das superficies conicas

$$\frac{z - c}{x - a} = \psi\left(\frac{y - b}{x - a}\right)$$

onde ψ representa uma funcção arbitraria.

3.ª — Procuremos a superficie envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são

$$y = \varphi(x), \; z = \psi(x).$$

A equação do plano osculador é (n.º 71 — IV)

$$y''(Z - z) = (z'y'' - y'z'')(X - x) + z''(Y - y),$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario x entre esta equação e a sua derivada relativamente a x:

$$y'''(Z - z) = (z'y''' - y'z''')(X - x) + z'''(Y - y) .$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ e ψ.

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a x:

$$y^{(4)}(Z - z) = (z''y''' + z'y^{(4)} - y''z''' - y'z^{(4)})(X - x)$$
$$+ z^{(4)}(Y - y),$$

e de eliminar depois x entre as tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z$$

segue-se que a curva proposta é aresta de reversão da superficie considerada.

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES D'ORDEM QUALQUER

I

Formação das derivadas d'ordem qualquer

77. — Por meio das regras dadas no capitulo II pode-se formar successivamente as derivadas y', y'', etc. da funcção $y = f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a funcção de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos pois agora achar esta funcção, considerando os mesmos casos que nos n.os 45 e 46, por ordem diversa.

78.—*Derivadas d'algumas funcções simples.*—1) Formando as derivadas successivas da funcção

$$y = x^k,$$

acha-se

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-2},$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n},$$

qualquer que seja k.

2) A funcção

$$y = e^x$$

dá

$$y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x,\ \dots,$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = e^x.$$

Nota. — Se fôr

$$y = e^{kx},$$

e k constante, teremos do mesmo modo

$$y^{(n)} = k^n e^x.$$

Esta formula, dando a n valores negativos ou fraccionarios, define as derivadas d'ordem negativa ou fraccionaria da funcção e^{kx}. Esta noção estende-se depois a todas as funcções que forem susceptiveis de serem desenvolvidas em série convergente da fórma:

$$y = \Sigma A e^{kx},$$

onde A e k são constantes, pondo

$$y^{(n)} = \Sigma A k^n e^{kx},$$

se todavia esta série fôr tambem convergente. A respeito d'este assumpto, que aqui só podemos indicar, podem-se consultar varias memorias notaveis de Liouville (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*).

3) A funcção

$$y = \log x$$

dá

$$y' = x^{-1},$$

e portanto, derivando $n - 1$ vezes y',

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \, . \, x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots (n-1)$.

4) A funcção

$$y = \operatorname{sen} x$$

dá

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

..........................,

e, em geral,

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5) A funcção

$$y = \cos x$$

dá do mesmo modo

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

79. — *Theoremas geraes.* — **I** — Seja

$$y = u_1 + u_2 + \ldots + u_m,$$

onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x. Teremos evidentemente

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \dots + u_m^{(n)}.$$

Nota. — A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k,$$

onde k e m são inteiros positivos, é

$$y^{(n)} = \sum_{k=n}^{m} A_k k (k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}.$$

Fazendo $x=0$ e chamando $y_0^{(n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{(n)}$, vem o resultado

$$y_0^{(n)} = A_n n!.$$

II — Procuremos a derivada de ordem n do producto

$$y = u_1 u_2$$

de duas funcções dadas.

Temos

$$y' = u'_1 u_2 + u_1 u'_2$$

$$y'' = u''_1 u_2 + 2u'_1 u'_2 + u_1 u''_2$$

$$y''' = u'''_1 u_2 + 3u''_1 u'_2 + 3u'_1 u''_2 + u_1 u'''_2$$

....

Observa-se n'estas igualdades que os coefficientes são os mesmos que os coefficientes dos desenvolvimentos das potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores são os mesmos que os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos. Somos pois levados, por inducção, a escrever a formula:

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \qquad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)}$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n letras tomadas i a i.

Para demonstrar esta formula basta provar que, se é verdadeira para o indice n, tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A formula (1), devida a Leibnitz, póde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^{(n)},$$

que significa que se deve desenvolver $(u_1 + u_2)^n$ pela formula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 \cdot u_2 \dots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \dots u_m)^{(n)}.$$

Com effeito, suppondo que esta formula tem logar no caso de o numero dos factores ser menor do que m, ainda tem logar no caso de o numero dos factores ser m, porque, pondo $y_1 = u_2 \cdot u_3 \dots u_m$, temos

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} y_1^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} (u_2 + u_3 + \dots + u_m)^{(i)}$$

$$= (u_1 + u_2 + \dots + u_m)^{(n)}.$$

D'esta formula tira-se

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, u_1^{(i_1)} \cdot u_2^{(i_2)} \dots u_m^{(i_m)}}{i_1!\, i_2! \dots i_m!}$$

em que o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = n.$$

III — Consideremos agora a funcção

$$y = \frac{u_1}{u_2}.$$

Temos

$$u_1 = y u_2$$

$$u'_1 = y' u_2 + y u'_2$$

....

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \dots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \dots + y u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas igualdades obtem-se successivamente as derivadas y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$ expressa por um determinante.

IV — Seja y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$(A) \qquad y = f(u),\ u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u'''$$

....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n de y é uma somma da fórma:

$$y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^iy}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \dots (u^{(n)})^\lambda,$$

A, α, β, γ, ..., λ, i sendo numeros inteiros que vamos determinar. Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção:

$$y = u^n,\ u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\dots(n-i+1)u^{n-i}(u')^{\alpha}(u'')^{\beta}\dots(u^{(n)})^{\lambda},$$

e, pondo $x = 0$ e notando que é (n.° 79—I) $u_0^{(k)} = k!\, a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\dots(n-i+1)(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\dots(n!)^{\lambda} a_0^{n-i} a_1^{\alpha} a_2^{\beta}\dots a_n^{\lambda}.$$

Por outra parte, temos

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^n$$

$$= \Sigma \frac{n!\, a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n} x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \dots h_n}$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de h_0, h_1, etc. que satisfazem á equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n.$$

Derivando esta igualdade e pondo $x = 0$, vem (n.° 79—I)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \dots h_n!},$$

onde o sommatorio se refere agora a todos os valores inteiros positivos de h_1, h_2, etc. que satisfazem ás equações

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = n,\ h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n = n.$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de a_0, a_2, a_3, etc.; portanto vem

$$\alpha = h_1, \beta = h_2, \dots, \gamma = h_n, h_0 = n - i = n - (\alpha + \beta + \dots + \lambda),$$

$$A = \frac{n!}{\alpha!\, \beta! \dots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \dots (n!)^{\lambda}}.$$

Temos pois a formula (*)

$$(3) \qquad y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores de α, β, γ, ..., λ que satisfazem á equação:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Nota 1.ª — A respeito dos coefficientes numericos

$$A = \frac{n!}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}$$

faremos algumas observações (**)

1.º — *Estes coefficientes são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica a que o sr. Weil chegou por considerações relativas á theoria das combinações. (***)

2.º — Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1}, \; \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2}, \; \ldots, \; \frac{d^ky}{du^k} = k!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0, \; \ldots, \; u' = u'' = \ldots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

(*) Veja-se o nosso artigo *Sur les dérivées d'ordre quelconque* publicado no tomo XVIII do *Giornale di Matematiche* de Napoles, d'onde é tirada a demonstração precedente da formula (3).

(**) Veja-se o nosso artigo—*Ueber einen Satz der Zahlentheorie* publicado nos *Archiv der Mathematik und Physik* de Leipzig (1885).

(***) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* — tomo XCIII.

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \ldots, \left(\frac{d^k y}{du^k}\right)_0 = k!, \ldots$$

$$u'_0 = u''_0 = \ldots = 1 .$$

Substituindo em (3), vem a formula seguinte de que adiante faremos uzo:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^n (e^x - 1)^k}{dx^n}\right)_0 = \Sigma' A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = k.$$

3.° — Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^i y}{du^i} = e^u, \ u' = u'' = \ldots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_0 = 1, \ u' = u'' = \ldots = 1 .$$

Logo, applicando (3), virá a formula

$$\left(\frac{d^n \left(e^{e^x - 1}\right)}{dx^n}\right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3).

4.° — O quociente $\frac{\Sigma A}{n!}$ tende para o limite zero quando n augmenta indefinidamente. (*)

Com effeito, derivando a funcção $y = e^{e^x - 1}$, vem a igualdade

(*) Oliveira Ramos e C. J. de Faria — *Sobre os coefficientes* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo VII).

$$y' = ye^x,$$

cujas derivadas d'ordem $n-2$ e $n-1$ dão, pondo $x=0$,

$$y_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} y_0^{(i)},\quad y_0^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)}.$$

Separando na segunda igualdade o termo correspondente a $i = n-1$, vem

$$y_0^{(n)} = y_0^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)},$$

e portanto

$$\frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}} = 1 + \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)}}{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} y_0^{(i)}}.$$

A fracção que entra no segundo membro está comprehendida (em virtude de um theorema bem conhecido de Arithmetica) entre o maior e o menor valor da fracção

$$\frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-2}{i}} = \frac{n-1}{n-1-i},$$

isto é, entre $n-1$ e 1. Logo temos

$$\frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}} < n,$$

ou

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} < \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!},$$

o que mostra que $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ decresce quando n augmenta.

Por ser $\frac{y_0''}{2!}=1$, e portanto $\frac{y_0^{(n)}}{n!}<1$ quando n é maior do que 2, temos

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}y_0^{(i)}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1-i)!}\cdot\frac{y_0^{(i)}}{i!}$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1-i)!};$$

mas a somma

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-1-i}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}$$

converge (n.º 12) para um limite L; logo teremos

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!}<\frac{L}{n},$$

que dá, para $n=\infty$,

$$\lim\frac{y_0^{(n)}}{n!}=0.$$

Observando agora que é $\frac{y_0^{(n)}}{n!}=\frac{\Sigma A}{n!}$, temos o theorema enunciado.

Nota 2.ª — Applicando a formula (3) ás funcções

$$y=u^k,\ u=\varphi(x)$$

vem

$$y^{(n)}=\Sigma\frac{n!\,k(k-1)\dots(k-i+1)\,u^{k-i}\,(u')^{\alpha}\,(u'')^{\beta}\dots(u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\,\dots\,\lambda!\,(2!)^{\beta}\,\dots\,(n!)^{\lambda}}$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n;$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Nota 3.ª — Sendo

$$y = f(u),\ u = a + bx$$

acha-se, ou directamente, ou por meio da formula (3):

$$y^{(n)} = b^n \frac{d^n y}{du^n}.$$

V — Seja

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_i),\ u_1 = \varphi_1(x),\ u_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ u_i = \varphi_i(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Para resolver esta questão seguiremos o mesmo caminho que no nosso artigo publicado no *Giornale di Matematiche* (tomo XVIII), que passamos a expôr.

Temos

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} u'_2 + \ldots$$

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u'_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} u'_1 u'_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_1} u''_1 + \ldots$$

....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n é uma somma da fórma:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} y^{(n)} = \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \ldots} (u'_1)^\alpha (u''_1)^\beta \ldots (u_1^{(n)})^\lambda \\ \times (u'_2)^{\alpha'} (u''_2)^{\beta'} \ldots (u_2^{(n)})^{\lambda'} \times \ldots, \end{aligned} \right.$$

onde

$$m = a + b + c + \ldots,$$

e onde A, a, b, ..., α, β, ..., α', β', ... são numeros inteiros que vamos determinar. Para isso appliquemos esta formula ás funcções:

$$y = u_1^n u_2^n \ldots u_i^n$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

....

onde a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... representam constantes arbitrarias, o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots$$

$$\times u_1^{n-a} (u'_1)^{\alpha} (u_1'')^{\beta} \ldots \times u_2^{n-b} (u'_1)^{\alpha'} \ldots,$$

e pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots \\ \times (2!)^{\beta+\beta'+\ldots} (3!)^{\gamma+\gamma'+\ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots} \\ \times a_0^{n-a} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots \end{array} \right\},$$

Por outra parte, applicando a formula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h_1! \, h_2! \ldots h_n!} (u_1^n)^{(h_1)} (u_2^n)^{(h_2)} \ldots,$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros e positivos de h_1, h_2, etc. que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_i = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1{}^n)^{(h_1)}$, $(u_2{}^n)^{(h_2)}$, etc. (n.° 79 — IV — *nota* 2.ª) pelos seus valores e pondo $x = 0$,

$$y_0{}^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\, n(n-1)\ldots(n-b+1)\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, \alpha'!\, \beta'! \ldots \lambda'! \ldots}$$

$$\cdot\, a_0{}^{n-a}\, a_1{}^{\alpha}\, a_2{}^{\beta} \ldots \times b_0{}^{n-b}\, b_1{}^{\alpha'}\, b_2{}^{\beta'} \ldots \times \ldots$$

onde o sommatorio se refere aos valores inteiros e positivos de α, β, ..., α' β', ... que satisfazem ás equações

$$\alpha + 2\beta + \ldots + h_1 \lambda = h_1.$$

$$\alpha' + 2\beta' + \ldots + h_2 h' = \lambda_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + h_l \lambda^{(l-1)} = h_l,$$

isto é, á equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots$$
$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.\ b = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \text{etc.}$$

Os dois valores de $y_0{}^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos qualquer que seja o valor das quantidades a_0. a_1, ..., b_0, b_1, ...; portanto os inteiros α, β, ..., α', β', ... devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n!}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda! \times \alpha'!\, \beta'! \ldots \lambda'! \times \ldots \times (2!)^{\beta+\beta'\ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots}}$$

Estão pois determinadas as constantes que entram na formula (b), e temos a formula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4)\quad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!\times\alpha'\,!\,\beta'\,!\ldots\lambda'\,!\times\ldots}\cdot\dfrac{\partial^m f}{\partial u_1{}^a\,\partial u_2{}^b\ldots} \\ \times\,(u'_1)^\alpha\left(\dfrac{u_1''}{2\,!}\right)^\beta\ldots\left(\dfrac{u^{(n)}}{n\,!}\right)^\lambda\times(u'_2)^{\alpha'}\ldots\left(\dfrac{u_2{}^{(n)}}{n\,!}\right)^{\lambda'}\times\ldots \end{array}\right.$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda'$$
$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n\,,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,\ b = \alpha' + \ldots + \lambda',\ \text{etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \ldots$$

VI — Consideremos agora a funcção implicita y definida pela equação

$$f(x, y) = 0\,.$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'' = 0$$

....

por meio das quaes se obtém successivamente y', y'', etc.

A lei d'estas equações obtem-se applicando á funcção $f(x, y)$ a formula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como funcção de x, o que dá

$$(5)\quad \Sigma\,\frac{n\,!}{\alpha'\,!\,\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha'}\,\partial y^{m-\alpha'}}\,(y')^\alpha\,(y'')^\beta\ldots(y^{(n)})^\lambda = 0,$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

A formula que precede dá a derivada de ordem n em funcção das anteriores. A formula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada e porisso não a exporemos aqui. (*)

II

Applicações

80. — *Derivada do arc (tang = x).* — **I** — A funcção

$$y = \text{arc}\,(\text{tang} = x)$$

dá

$$y' = (1 + x^2)^{-1},$$

d'onde se deduz (n.° 79 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma\,(-1)^i \cdot \frac{(n-1)\,!\; i\,!\; (2x)^\alpha\,(1 + x^2)^{-1-i}}{\alpha\,!\; \beta\,!}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = n - 1,\; i = \alpha + \beta;$$

ou

(*) Vid. Duarte Leite — *Sobre as derivadas* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo IV).

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n-1-\beta} \dfrac{(n-1)!\,(n-1-\beta)!}{(n-1-2\beta)!\,\beta!} \times \\ \times (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n} \end{array} \right.$$

onde o sommatorio se refere a todos os valôres inteiros e positivos de β desde zero até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

II — Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$ poremos $x = 0$ na formula precedente.

1.º — Se n é *impar*, todos os termos da formula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n - 1 - 2\beta = 0$; e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!\ .$$

2.º — Se n é *par*, o expoente $n - 1 - 2\beta$ não póde ser nullo, e portanto teremos

$$y_0^{(n)} = 0\ .$$

81. — *Numeros de Bernoulli.* — **I** — Consideremos a funcção

$$y = (1 + e^x)^{-1},$$

e procuremos primeiro o valôr que toma $y^{(n)}$ quando é $x = 0$.

Pondo

$$\varphi(x) = y - \tfrac{1}{2} = \frac{1 - e^x}{2(1 + e^x)}$$

vem

$$\varphi(-x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)},$$

e portanto

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x),\ \varphi''(x) = -\varphi''(-x), \text{ etc.}$$

Estas igualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem anullar quando se faz $x = 0$, porque, se assim não fosse, teriam dois valores differentes para $x = 0$, o que evidentemenle não póde ter logar.

As derivadas de y são iguaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos

$$y_0^{(n)} = 0,$$

quando n é *par*.

As derivadas d'ordem impar acham-se pondo $x = 0$ na formula (n.° 79 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \frac{n!\, i!\, e^{ix} (1 + e^x)^{-i-1}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,\ i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda:$$

o que dá

$$y_0^{(n)} = \Sigma (-1)^i . \frac{n!\, i!}{2^{i+1}\, \alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}.$$

Os *numeros de Bernoulli* B_n definem-se pela igualdade

$$(a) \qquad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} . \frac{n+1}{2^{n+1} - 1} y_0^{(n)};$$

de modo que *são nullos quando n é par*, e quando n é impar podem ser calculados por meio da formula (*):

$$(6) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} . \frac{(n+1)!}{2^{n+1} - 1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i+1}\, \alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^\beta \ldots (n!)^\lambda}$$

(*) Veja-se o nosso artigo — *Sur les nombres de Bernoulli* publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimore — tomo VII.

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots \lambda .$$

II — De ser

$$\frac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\ldots(n\,!)^{\lambda}}$$

um numero inteiro (n.º 79 — IV) resulta que *os numeros de Bernoulli não podem conter em denominador factores primos differentes de 2 e dos factores primos de* $2^{n+1} - 1$, *e que 2 não póde entrar em denominador com expoente superior a* n.

III — Da formula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos numeros de Bernoulli.

Com effeito, aquella formula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i \cdot \frac{i\,!}{2^{i+1}} \right.$$

$$\left. \times \Sigma' \frac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\ldots(n\,!)^{\lambda}} \right],$$

onde o sommatorio Σ' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.º 79 — IV — *nota 1.ª*)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n} \right)_0 ,$$

ou, substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valôr que se obtém desenvolvendo o binomio $(e^x - 1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7) \quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \Big[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2}(i-2)^n - \binom{i}{3}(i-3)^n + \dots \Big].$$

Ou por meio d'esta formula, ou por meio da formula (6) obtem-se

$$B_1 = \tfrac{1}{6}, \; B_3 = \tfrac{1}{30}, \; B_5 = \tfrac{1}{42}, \; B_7 = \tfrac{1}{30}, \; B_9 = \tfrac{5}{66}, \; \dots$$

IV — Derivando n vezes a igualdade

$$y(e^x + 1) = 1$$

vem

$$y^{(n)}(e^x + 1) + e^x \Big(n y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1} y' + y \Big) = 0 .$$

Pondo $x = 0$, e attendendo á formula (a), resulta

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2 \frac{2^{n+1}-1}{n+1} B_n + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot n \frac{2^n - 1}{n} B_{n-1}$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^{n-1}-1}{n-1} B_{n-2}$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^{n-2}-1}{n-2} B_{n-3} + \dots$$
$$+ (-1) \binom{n}{n-1} \frac{2^2 - 1}{2} B_1 + \tfrac{1}{2} = 0$$

que, pondo $n = 2p - 1$, dá

$$2\frac{2^{2p}-1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p-1}{2} \frac{2^{2(p-1)}-1}{p-1} B_{2p-3} + \dots$$

$$\pm \binom{2p-1}{2p-2} \frac{2^2-1}{1} B_1 \mp 1 = 0;$$

e, pondo $n = 2p$, dá

$$2p \frac{2^{2p}-1}{p} B_{2p-1} - \binom{2p}{3} \frac{2^{2p-2}-1}{p-1} B_{2p-3} + \dots$$

$$\pm \binom{2p}{2p-1} \frac{2^2-1}{1} B_1 \mp 1 = 0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os numeros de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5, etc.

V — Os numeros de Bernoulli apparecem em muitas questões d'Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

correspondentes a $x = 0$ exprimem-se em funcção d'estes numeros

Com effeito, derivando n vezes a igualdade

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{e^x-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1} = y - \frac{2x}{e^{2x}-1}$$

vem (n.° 79 — II) (pondo $y = f(x)$) a equação

$$x \frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n} + n \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{n-1}} = f^n(x) - 2^n f^n(2x)$$

que, pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), dá

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2} - 1} B_{n-1} .$$

Notas. — Vê-se por esta formula que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

2.ª — A formula que precede não dá os valores de y_0 e y'_0. Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x - 1)\, y = x$$

que dá

$$(e^x - 1)\, y' + e^x y = 1$$

$$(e^x - 1)\, y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$$

e, pondo $x = 0$,

$$y_0 = 1 ,\ y'_0 = -\tfrac{1}{2} .$$

VI — Do mesmo modo a funcção

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

dá para valôr de $y_0^{(n)}$

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{n + 1} B_n .$$

que é *nullo* quando n é *par*.

VII — Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} ,$$

e portanto

$$xy = (e^{nx} - 1) \cdot \frac{x}{e^x - 1} .$$

Derivando $k + 1$ vezes esta igualdade e pondo $z = \frac{x}{e^x - 1}$, vem

$$xy^{(k+1)} + (k+1)\, y^{(k)} = n^{k+1} e^{nx} z + (k+1)\, n^k e^{nx} \cdot z'$$

$$+ \binom{k+1}{2} n^{k-1} e^{nx} z'' + \dots + \binom{k+1}{k} n e^{nx} z^{(k)}$$

$$+ (e^{nx} - 1)\, z^{(k+1)} ,$$

e, pondo $x = 0$,

$$y_0^{(k)} = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} - \frac{kn^{k-1}}{2} B_1$$

$$+ k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \cdot \frac{B_3}{4!} + \dots$$

Por outra parte, derivando k vezes y, vem

$$y_0^{(k)} = e^x + 2^k e^{2x} + \dots + (n-1)^k e^{(n-1)x} ,$$

e portanto

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k .$$

Temos pois a formula

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} - k \frac{n^{k-1}}{2} B_1$$

$$+ k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \cdot \frac{B_3}{4} + \dots$$

que dá o desenvolvimento ordenado segundo as potencias de n da somma dos $n - 1$ primeiros numeros inteiros.

89. — *Formula de Jacobi.* — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Applicando a formula (3), vem

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(n-1)!\,(n-\frac{1}{2})\ldots(n-\frac{1}{2}-i+1)\,(-2x)^{\alpha}(-2)^{\beta}(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{\alpha\,!\,\beta\,!\,(2\,!)^{\beta}}$$

onde

$$\alpha+2\beta=n-1,\ i=\alpha+\beta\,;$$

ou

$$y^{(n-1)}=\Sigma\frac{(-1)^{n-1-\beta}(n-1)!(2n-1)\ldots(2\beta+3)x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)!\beta!2^{\beta}}$$

$$=(-1)^{n-1}\,.\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\Sigma(-1)^{\beta}.\frac{n\,!\,x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2\beta+1)(n-1-2\beta)!\,\beta!\,2^{\beta}},$$

que, por ser

$$2^{\beta}\times1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\beta\times1\,.\,3\,\ldots\,(2\beta+1)=(2\beta+1)\,!\,,$$

dá

$$y^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\,.\,\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{n}$$

$$\times\,\Sigma(-1)^{\beta}\,.\,\frac{(n-2\beta)\,\ldots\,nx^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)\,!}.$$

Pondo $x=\cos\omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n}$$

$$\Sigma\, (-1)^{\beta} \cdot \frac{(n-2\beta) \ldots n \cos^{n-1-2\beta} \omega \operatorname{sen}^{\beta+\frac{1}{2}} \omega}{(2\beta+1)\,!}$$

ou, em virtude de uma formula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-1)}{n} \cdot \operatorname{sen} n\, (\text{arc.} \cos = x),$$

resultado devido a Jacobi.

83. — *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x.* — Seja na formula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1 x,\; u_2 = A_2 + B_2 x,\; \ldots,\; u_l = A_l + B_l x\;;$$

teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n\,!}{\alpha\,!\, \alpha'\,! \ldots \alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^{\alpha}\, \partial u_2^{\alpha'} \ldots} B_1^{\alpha} B_2^{\alpha'} \ldots,$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha^{(l-1)} = n.$$

A formula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} B_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_l} B_l\right)^{(n)},$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

III

Differenciaes d'ordem superior

84. — A differencial dy de $y = f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y' \, dx \,,$$

é uma funcção de x, cuja differencial $d(dy)$, que se representa por d^2y, se obtém differenciando o producto $y'dx$, o que dá

$$d^2y = y'' \, dx^2 \,,$$

suppondo dx constante qualquer que seja x, o que é sempre possivel visto que x representa a variavel independente, e que portanto o seu augmento dx é arbitrario.

No mesmo modo se acha

$$d^3y = y''' \, dx^3$$

$$d^4y = y^{(4)} \, dx^4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

As differenciaes dy, d^2y, d^3y, etc. téem respectivamente os nomes de *differenciaes de primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y.

85. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y) \,,$$

cuja *differencial total* se define (n.° 57) pela igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \,.$$

Esta differencial dz é uma funcção de x e y, que, sendo differenciada, dá a *differencial total de segunda ordem:*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 ,$$

ou *symbolicamente*

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{(2)} .$$

Continuando do mesmo modo acha-se, por inducção, a formula symbolica

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{(n)} ,$$

que se demonstra por meio de um calculo análogo ao do n.º 79 — II.

Do mesmo modo, no caso da funcção de muitas variaveis

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_i)$$

se acha

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i\right)^{(n)} .$$

IV

Relações entre as funcções e suas derivadas

86. — *Theorema I. — Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ e as suas derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^m(x)$ forem finitas e determinadas no intervallo de x_0 a x, teremos a relação:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^l}{l!}f^l(x_0)}{F(x)-F(x_0)-(x-x_0)F'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^k(x_0)}$$

$$=\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!}f^{l+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0)+R_n}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{k+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{m-1}(x_0)+R_m}$$

onde

$$R_n=\frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n[x_0+\theta(x-x_0)]$$

$$R_m=\frac{(x-x_0)^m(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}F^m[x_0+\theta(x-x_0)],$$

θ representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade (*).

Para demonstrar este theorema appliquemos á funcção

(*) Este theorema é extraído do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Paris (tomo v da 3.ª série).

$$\varphi(z) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)$$

$$- f(z) - (x - z) f'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(z)$$

$$- \Big[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)$$

$$- F(z) - (x - z) F'(z) - \ldots \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^{m-1}(z) \Big] \times$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

a formula conhecida (n.º 49 — III)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)\, \varphi'[x_0 + \theta (x - x_0)] ;$$

o que dá, suppondo $n \overline{\overline{>}} l + 1$ e $m \overline{\overline{>}} k + 1$,

$$0 = - \frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)\,!} f^{l+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(x_0)$$

$$- \Big[- \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)\,!} F^{k+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^{m-1}(x_0) \Big]$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

$$+ (x - x_0) \Big\{ - \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^n[x_0 + \theta (x - x_0)]$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^m[x_0 + \theta (x - x_0)] \frac{f(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

D'esta formula tira-se o theorema enunciado.

Theorema II. — *Se as funcções* $f(x), f'(x), \ldots, f^n(x)$ *forem finitas e determinadas no intervallo de* x_0 *a* x *teremos*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

θ *representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade.*

A formula precedente, conhecida pelo nome de *formula de Taylor*, do nome do geometra que a descobriu (*), pode-se deduzir do theorema anterior pondo

$$F(x) = (x - x_0)^m,\ k = m - 1,\ l = n - 1,$$

e por consequencia,

$$F(x_0) = 0,\ F'(x_0) = 0,\ \ldots,\ F^{m-1}(x_0) = 0,$$

$$F^m(x_0) = m!,\ F^m [x_0 + \theta (x - x_0)] = m!\ .$$

A respeito d'esta formula faremos as seguintes observações:

1.° — A R_n chama-se *resto da formula* de Taylor. Da expressão d'este resto que vimos de achar e que é devida a Schlömilch (**), deduz-se, pondo $m = n$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n [x + \theta (x - x_0)],$$

(*) Taylor não deu a expressão de R_n. Foi Lagrange o primeiro geometra que deu uma expressão d'este resto.

(**) *Journal de Liouville*, 2.ª série, t. III.

devida a *Lagrange*; e, pondo $m = 1$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

devida a *Cauchy*.

2.° — Se R_n tender para zero á medida que n tende para o infinito, a funcção $f(x)$ póde ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de $x - x_0$ por meio da formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \ldots$$

3.° — Se na formula de Taylor pozermos $x_0 = 0$, vem a formula

$$f(x) = f(x_0) + x f'(x_0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!\, m} f^n(\theta x),$$

conhecida pelo nome de *formula de Maclaurin*.

4.° — *Se tiver logar o desenvolvimento em série*

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

e as funcções $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^n(0)$ *forem finitas e determinadas, será*

$$A_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Com effeito, pondo

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + x^{n+1} \varphi(x)$$

e derivando n vezes esta igualdade, vem

$$f^n(x) = n!A_n + x^{n+1}\varphi^n(x) + n(n+1)x^n\varphi^{n-1}(x) + \dots$$
$$+ (n+1)!x\varphi(x),$$

e portanto

$$f^n(0) = n!A_n.$$

87. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes:

$$z = f(x, y),$$

para estender a estas funcções a formula de Taylor.

Pondo

$$\varphi(t) = f[x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)]$$

e applicando a formula de Maclaurin a esta funcção de t, vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{t^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m}\varphi^n(\theta t).$$

Para calcular os coefficiente d'esta formula emprega-se a formula (n.° 83)

$$\varphi^i(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(i)}$$

(onde é $u_1 = x_0 + t(x - x_0)$ e $u_2 = y_0 + t(y - y_0)$) que, pondo $t = 0$ e notando que os valores das derivadas de $f(u_1, u_2)$ relativamente a u_1 e u_2 correspondentes a $t = 0$, são iguaes ás derivadas de $f(x_0, y_0)$ relativamente a x_0 e y_0, dá

$$\varphi^i(0) = \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_1, y_2)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^{(i)}.$$

A derivada que entra no resto é dada pela formula

$$\varphi^n(\theta t) = \left[\frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(n)}$$

onde é

$$u_1 = x + \theta(x - x_0)\,t,\; u_2 = y + \theta(y - y_0)\,t.$$

Pondo agora nas formulas precedentes $t = 1$ vem a formula

$$z = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^{(i)}$$

$$+ \frac{(1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}\left[\frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(n)}$$

sendo agora

$$u_1 = x + \theta(x - x_0),\; u_2 = y + \theta(y - y_0),$$

que tem os mesmos usos que a formula de Taylor.

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Desenvolvimento em série de algumas funcções algebricas

88. — Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$y' = k(1 + x)^{k-1}$$

$$y'' = k(k - 1)(1 + x)^{k-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = k(k - 1)\ldots(k - n + 1)(1 + x)^{k-n},$$

e portanto

$$y_0 = 1$$

$$y'_0 = k$$

. . . .

$$y_0^{(n-1)} = k(k-1)\dots(k-n+2).$$

Logo applicando a formula de Maclaurin com a formula do resto de Cauchy, virá

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{k-n}.$$

1) Supponhamos primeiro que o valôr absoluto de x é inferior á unidade.

Como, cada vez que n augmenta de uma unidade, R_n adquire o factor

$$\left(\frac{k}{n}-1\right)x\frac{1-\theta}{1+\theta x},$$

onde é $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ e onde o factor $\left(\frac{k}{n}-1\right)x$ tende para o limite $-x$ quando n augmenta indefinidamente; haverá um valôr determinado de n a partir do qual o resto adquirirá indefinidamente factores inferiores á unidade. Logo o resto R_n tende para zero, e a série

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} + \dots$$

converge para o limite $(1+x)^k$.

2) Se o valôr absoluto de x fôr superior á unidade, a série precedente será divergente, visto que, tendendo para o limite x a razão

$$\frac{k-n+1}{n}x = \left(\frac{k+1}{n}-1\right)x$$

de dous termos consecutivos da série, ha sempre um valôr de n a partir do qual esta razão se conserva indefinidamente maior do que a unidade (n.° 12 — 3.°).

89. — Do desenvolvimento em série do binomio, que vimos de obter, pode-se tirar o desenvolvimento em série de muitas outras funcções.

Assim, supondo $f(x)$ uma funcção racional de x, da igualdade (n.° 27)

$$f(x) = \Sigma \frac{A}{(x-a)^k} = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k}$$

tira-se o desenvolvimento em série

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{a} + A_2 \frac{x^2}{a^2} + \ldots$$

onde é

$$A_0 = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k}$$

$$A_1 = \Sigma (-1)^k \binom{k}{1} \frac{A}{a^k}$$

....

$$A_n = \Sigma (-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^k}$$

....

quando x é uma quantidade real cujo valôr absoluto é inferior ao menor dos módulos das quantidades designadas por a.

90. — Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em série ordenada segundo as potencias de u.

Pondo esta funcção debaixo da fórma

$$y = (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -(u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que ella é susceptivel de ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de u, quando o valôr absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2; e então temos um resultado da fórma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_k u^k + \ldots$$

onde X_0, X_1, etc. representam funcções de x que vamos determinar.

Por ser (n.º 79 — IV)

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k!(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-i+1)(-2x+2u)^{\alpha} 2^{\beta} y^{-\frac{1}{2}-i}}{\alpha!\, \beta!\, 2^{\beta}}$$

$$= \Sigma (-1)^{\beta} \cdot \frac{k!\, 1.3.5\ldots(2i-1)(x-u)^{\alpha} y^{-\frac{1}{2}-i}}{\alpha!\, \beta!\, 2^{\beta}}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k,\ i = \alpha + \beta,$$

teremos

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \Sigma (-1)^{\beta} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{\alpha!\, \beta!\, 2^{\beta}} x^{\alpha},$$

ou, eliminando α,

$$X_k = \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^{\beta} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)!\, \beta!\, 2^{\beta}} x^{k-2\beta}.$$

Esta formula serve para calcular os polynomios X_k, conhecidos pelo nome de *polynomios de Legendre*, do nome do geometra celebre que primeiro os considerou. Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

I — Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k=\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta\binom{k}{\beta}x^{2k-2\beta}$$

vem

$$\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}=\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta\binom{k}{\beta}(2k-2\beta)\ldots(k-2\beta+1)\,x^{k-2\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta\binom{k}{\beta}\cdot\frac{(2k-2\beta)\,!}{(k-2\beta)\,!}\,x^{k-2\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta\cdot\frac{k\ldots(k-\beta+1)\times 1.3\ldots(2k-2\beta-1)\times 2.4\ldots(2k-2\beta)}{\beta\,!\,(k-2\beta)\,!}\,x^{k-2\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta\cdot\frac{1.3\ldots(2k-2\beta-1)\,2^{k-\beta}\,k\,!}{\beta\,!\,(k-2\beta)\,!}\,x^{k-2\beta}\,.$$

Comparando esta igualdade com a expressão de X_k anteriormente achada deduz-se a formula notavel

$$X_k=\frac{1}{2^k\,.\,k\,!}\cdot\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,.$$

II — Derivando a funcção

$$y=(1-2ux+u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u, vem

$$y'=(x-u)(1-2\,ux+u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ou

$$y'(1-2ux+u^2)=(x-u)y.$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos

$$y^{(k+1)}(1-2ux+u^2)+ky^{(k)}(-2x+2u)+2\binom{k}{2}y^{(k-1)}=$$

$$=y^{(k)}(x-u)-ky^{(k-1)}$$

e portanto, pondo $u=0$,

$$y_0^{(k+1)}-(2k+1)xy_0^{(k)}+k^2y_0^{(k-1)}=0.$$

Esta equação, pondo

$$X_k=\frac{y_0^{(k)}}{k!},$$

dá

$$(k+1)X_{k+1}-(2k+1)x X_k+k X_{k-1}=0.$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se póde formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III — Como a equação

$$(x^2-1)^k=0$$

tem k raizes iguaes a $+1$ e k raizes iguaes a -1, a equação

$$\frac{d(x^2-1)}{dx}=0$$

terá $k-1$ raizes iguaes a $+1$, $k-1$ raizes iguaes a -1, e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1.

Pela mesma razão a equação

$$\frac{d^2 (x^2 - 1)}{dx^2} = 0$$

terá $k - 2$ raizes iguaes a $+ 1$, $k - 2$ raizes iguaes a $- 1$ e duas raizes desiguaes comprehendidas entre $+ 1$ e $- 1$.

Continuando o mesmo raciocinio conclue-se emfim que *a equação $X_k = 0$ tem k raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre $+ 1$ e $- 1$.*

IV — Pondo

$$(x^2 - 1)^k = z$$

temos

$$k \log (x^2 - 1) = \log z,$$

e, derivando,

$$(x^2 - 1) z' - 2k\, xz = 0 .$$

Derivando $k + 1$ vezes esta equação, vem

$$(x^2 - 1) z^{(k+2)} + 2 (k + 1) xz^{(k+1)} + k (k + 1) z^{(k)}$$

$$- 2k [xz^{(k+1)} + (k + 1) z^{(k)}] = 0 ,$$

ou, pondo $z^{(k)} = 2^k k\,!\, X_k$ e fazendo as reducções,

$$(x^2 - 1) X''_k + 2x X'_k - k (k + 1) X_k = 0 .$$

Os polynomios de Legendre são pois soluções d'uma equação differencial linear de segunda ordem.

V — Da relação entre taes polynomios de Legendre consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão

$$\frac{X_k}{X_{k+1}} = A_k$$

quando k angmenta indefinidamente.

Pondo primeiro n'esta relação $k = h + h_0$ e dividindo por $(h + h_0) X_{h+h_0+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{h+h_0} - \left(2 + \frac{1}{h+h_0}\right) x A_{h+h_0} + A_{h+h_0} . A_{h+h_0-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a equação

$$1 - 2x B_{h+h_0} + B_{h+h_0} . B_{h+h_0-1} = 0$$

que determina uma série de funcções B_0, B_1, etc., dada uma d'ellas, que supporemos ser B_{h_0} e ser igual A_{h_0}.

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2x z + z^2 = 0,$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da fórma

$$B_{h+h_0} B_{h+h_0-1} - B_{h+h_0} (z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0,$$

ou, multiplicando todos os termos por $z_2 - z_1$,

$$B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_2 - B_{h+h_0} z_2^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1 z_2^2$$

$$= B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_1 - B_{h+h_0} z_1^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1^2 z_2$$

ou

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{B_{h+h_0-1} - z_1}{B_{h+h_0-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente h em $h - 1$, $h - 2$, ... 2, 1 vem uma série de equações dos quaes se deduz

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h . \frac{B_{h_0} - z_1}{B_{h_0} - z_2}.$$

$$= \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h . \frac{A_{h_0} - z_1}{A_{h_0} - z_2}.$$

Esta equação mostra que B_{h+h_0} tende para o limite z_1 quando h augmenta indefinidamente, se o valôr absoluto de z_2 é maior do que o valôr absoluto de z_1; e que B_{h+h_0} tende

para o limite z_2, se o valôr absoluto de z_2 é menos do que o de z_1.

Por outra parte, as igualdades

$$A_{h_0+1} = \frac{1+\frac{1}{h_0+1}}{\left(2+\frac{1}{h_0+1}\right)x - A_{h_0}} = \frac{1+\frac{1}{h_0+1}}{\left(2+\frac{1}{h_0+1}\right)x - B_{h_0}}$$

$$A_{h_0+2} = \frac{1+\frac{1}{h_0+2}}{\left(2+\frac{1}{h_0+2}\right)x - A_{h_0+1}}$$

..............................,

e as igualdades

$$B_{h_0+1} = \frac{1}{2x - B_{h_0}}$$

$$B_{h_0+2} = \frac{1}{2x - B_{h_0+1}}$$

....

mostram que A_{h_0+1}, A_{h_0+2}, etc. tendem para os limites B_{h_0+1}, B_{h_0+2}, etc. quando h_0 augmenta indefinidamente.

Logo *a razão A_k de dous polynomios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades $x+\sqrt{x^2-1}$ e $x-\sqrt{x^2-1}$ que tiver menor valôr absoluto, quando k augmenta indefinidamente* (*).

91. — Terminaremos o que temos a dizer sobre as funcções algebricas demonstrando um theorema notavel, devido ao eminente geometra allemão Eisenstein:

A série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

(*) Esta propriedade foi por nós publicada no nosso artigo — *Sur une limite relative aux polynômes de Legendre*, publicado nas *Actas da Sociedade Real das Sciencias da Bohemia* (1886).

onde a_0, a_1, a_2, ... representam fracções reduzidas á sua expressão mais simples, não póde ser o desenvolvimento de uma funcção y, definida por uma equação algebrica com coefficientes inteiros

$$(2) \qquad F(x, y) = 0,$$

se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos nos denominadores de a_0, a_1, a_2, ...

A demonstração que vamos dar d'este theorema foi por nós publicada nos *Annales de l'École Normale supérieure de Paris* (3.ª série — tomo III) (*).

Notemos primeiro que, se a série (1) satisfaz á equação algebrica (2), tambem a série

$$y = k + a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfará a uma equação algebrica que resulta de mudar na precedente y em $y - k$.

Posto isto, escrevamos esta ultima equação debaixo da fórma

$$(3) \qquad \Sigma A_a^{(b)} x^a \cdot y^b = 0,$$

onde $A_a^{(b)}$, a, b representam numeros inteiros, e a e b são positivos; e derivemol-a n vezes (n.º 79 — II), o que dá o resultado symbolico

$$\Sigma A_a^{(b)} (x^a + y^b)^{(n)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} (x^a)^{(i)} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} a (a-1) \ldots (a-i+1) x^{a-i} (y^b)^{(n-i)} = 0.$$

(*) No nosso artigo — *Ueber den Eisenstein'schen Satz* publicado nos *Archiv der Mathematik* de Leipzig (1886), démos uma demonstração do mesmo theorema fundada na formula (5) do n.º 79.

Pondo agora $x = 0$, vem

$$\Sigma A_a^{(b)} n (n - 1) \ldots (n - a + 1 (y^b)_0^{(n-1)} = 0$$

ou *symbolicamente*

$$\Sigma A_a^{(b)} n (n - 1) \ldots (n - a + 1) [y + y + \ldots]_0^{(n-a)} = 0$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1)\ldots(n-a+1) S \frac{(n-a)!\, y_0^{(\alpha)} y_0^{(\beta)} \ldots y_0^{(\lambda)}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!} = 0,$$

onde a somma S se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n - a.$$

Separemos n'esta equação os termos que contéem a derivada d'ordem mais elevada, para o que se deve dar a a o valor zero, e a $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ os systemas de soluções

$$\alpha = n, \beta = 0, \ldots, \lambda = 0$$

$$\alpha = 0, \beta = n, \ldots, \lambda = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \lambda = n;$$

teremos

$$\Sigma A_a^{(b)} S \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \cdot \frac{y_0^{(\beta)}}{\beta!} \ldots \frac{y_0^{(\lambda)}}{\lambda!}$$

$$+ \Sigma A_0^{(b)} b (a_0 + k)^{b-1} \cdot \frac{y_0^{(n)}}{n!} = 0$$

ou, pondo

$$a_1 = y'_0, \; a_2 = \frac{y''_0}{2!}, \; a_3 = \frac{y'''_0}{3!}, \text{ etc.},$$

e $k = - a_0$

$$A_0^{(1)} a_n = - \Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda.$$

Se $A_0^{(1)}$ é differente de zero, d'esta igualdade tira-se immediamente que a_n não póde conter em denominador factores primos differentes dos que entram nos denominadores dos coefficientes anteriores a_α, a_β, etc., e d'aquelles que entram em $A_0^{(1)}$. Logo o numero dos factores primos differentes que entram nos coefficientes da série (1) é limitado, como queriamos demonstrar.

Se porém é $A_0^{(1)} = 0$, a ultima equação da pagina anterior dá, separando os termos que contêem $y_0^{(n-1)}$,

$$1 . 2 A_0^{(2)} a_{n-1} = - \Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda$$

d'onde se tira ainda, como no caso anterior, o theorema enunciado, se $A_0^{(2)}$ é differente de zero.

Continuando do mesmo modo demonstra-se completamente o theorema visto que as quantidades $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, etc. não podem ser todas nullas. Com effeito, se fossem todas nullas, a equação (3) pondo $x = 0$, daria $A_0^{(0)} = 0$ e portanto esta equação teria um factor commum x que se podia supprimir.

Nota. — Da demonstração precedente é facil de concluir o seguinte theorema mais geral do que o de Eisenstein:

Uma funcção, definida de uma maneira qualquer, que toma um valôr raccional y_0 *para* $x = 0$, *não póde satisfazer a uma equação algebrica com coefficientes inteiros, se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos em* $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \frac{y'''_0}{3!}, \dots$

Em principios análogos se funda o theorema seguinte (*):

A série (1) *não póde ser o desenvolvimento de uma funcção definida por uma equação algebrica relativamente a* $x, y', \dots, y^{(i)}$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(i)}) = 0$$

(*) Este theorema e o anterior foram por nós publicados, nos tomos II, III e IV dos *Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.*

se os denominadores de a_n, a_{n+1}, *etc. contêem indefinidamente factores primos superiores respectivamente a* n, n+1, *etc.*

II

Desenvolvimento em série de algumas funcções trancendentes

92. — *Exponencial* — **I** — Principiemos pela funcção exponencial

$$y = e^x$$

que dá

$$y' = y'' = \dots = y^{(n)} = e^x$$

e portanto

$$y'_0 = y''_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 1.$$

Logo, applicando a formula de Maclaurin, vem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

A exponencial $e^{\theta x}$ é finita qualquer que seja x, e o producto

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n}$$

tendo para zero quando n tende para o infinito; logo R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento em série

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

que tem logar qualquer que seja x.

II — Applicando a esta série o theorema de Eisenstein conclue-se que a funcção e^x é trancendente, visto que os coefficientes de x contéem um numero illimitado de factores primos differentes.

III — Pondo na formula (1) $x = 0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Por esta série calcula-se o valôr de e mais rapidamente do que pelo processo do n.° 19.

Este numero e é irraccional. Com effeito, se e fosse igual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

e portanto

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots$$
$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!\,n},$$

ou

$$(n-1)!\,m - 2(n!) - \ldots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto

$$(n-1)!\,m - 2(n!) - \ldots - 1 = \frac{\theta}{n},$$

onde $\theta < 1$.

Seria pois um inteiro igual a uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionaes, e modernamente o snr. Hermite demonstrou que este numero é trancendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes (*).

IV — Appliquemos agora a formula de Maclaurin á funcção

$$y = e^x + e^{-\frac{1}{x}},$$

considerada por Cauchy para mostrar a necessidade da discussão do resto, ainda que a série a que se chegue, quando n augmente indefinidamente, seja convergente; pois que póde esta série ser convergente e todavia o resto não tender para zero.

Derivando n vezes a funcção y, vem (n.º 79 — IV)

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma \frac{n!\,(x^{-2})^{\alpha}\,(-2x^{-3})^{\beta}\ldots}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\ldots(n)^{\lambda}}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

resultado da fórma

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a}$$

onde A representa uma constante, e a é inteiro e positivo.

Pondo depois $\frac{1}{x} = z$, vem

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, tomo LXXVII.

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A \frac{z^a}{e^z}$$

$$= e^x + \Sigma A \frac{1}{z^{-a} + z^{-a+1} + \ldots + \frac{1}{a!} + \frac{z}{(a+1)!} + \ldots}$$

e, para $x = 0$ ou $z = \infty$,

$$y_0^{(n)} = 1 .$$

Applicando pois a formula de Maclaurin, vem

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n .$$

Quando n augmenta indefinidamente, no segundo membro apparece uma série convergente cujo limite e^x é differente de y; e portanto o limite do resto R_n é differente de zero.

93. — *Logarithmo de* $1 + x$. — Consideremos agora a funcção

$$y = \log (1 + x) .$$

Por ser (n.º 78)

$$y' = (1 + x)^{-1} . \; y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \, (1 + x)^{-n} ,$$

a formula de Maclaurin dá

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-2} . \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} . \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1} . \frac{x}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} ,$$

empregando a formula do resto dada por Cauchy.

1) Se x estiver comprehendido entre $+1$ e -1, a fracção $\frac{x}{1+\theta x}$ é finita, e a fracção $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ é menor do que a unidade. Logo R_n tem por limite zero quando n augmenta indefinidamente, e a funcção proposta póde ser desenvolvida em série pela formula

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, esta série será divergente (n.° 12—3.°), visto que a razão de dous termos consecutivos $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ e $\frac{x^n}{n}$ é sempre superior a x.

Nota.—Por meio da formula precedente só podem ser calculados os logarithmos dos numeros comprehendidos entre 0 e 2; é portanto necessario obter uma formula applicavel a todos os casos. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q}$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x}$$

e portanto

$$\log p - \log q = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right)$$

$$= 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n + \ldots\right]$$

onde n é impar.

Esta série é tanto mais convergente quanto menor fôr

$p - q$ e maior fôr $p + q$, e serve para calcular *log* p quando *log* q é conhecido.

94. — *Funcções circulares.* — **I** — Consideremos a funcção

$$y = \text{sen}\ x\ .$$

Temos, applicando a formula de Maclaurin,

$$\text{sen}\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\ \text{sen}\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Visto que *sen* $\left(\theta x + n\ \frac{\pi}{2}\right)$ é finito e $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero quando n augmenta indefinidamente, a formula precedente dá a série:

$$\text{sen}\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots,$$

que tem logar qualquer que seja x.

II — Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em série de *cos* x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots$$

Nota. — As funcções *sen* x e *cos* x appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahi foram deduzidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funcções pelas séries precedentes, póde-se constituir analyticamente toda a sua theoria (*).

III — Consideremos agora a funcção

$$y = \text{sen}\ (\text{sen}\ x)\ ,$$

ou

$$y = \text{sen}\ u,\ u = \text{sen}\ x\ ,$$

e seja $x < 1$ (em valôr absoluto).

(*) Tannery: *Introduction à la théorie des onctions*, pag. 153.

Por ser (n.º 79 — IV)

$$\frac{y^{(m)}}{m!} = \Sigma \frac{\operatorname{sen}\left(u + i\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}^{\alpha}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}^{\beta}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \dots}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(m!)^{\lambda}}$$

$$\alpha + 2\beta + \dots m\lambda = m,\ i = \alpha + \beta + \dots + \lambda$$

os coefficientes da série

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + R_n$$

serão dados pela formula

$$a_m = \frac{y_0^{(m)}}{m!} = \Sigma \frac{\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}^{\alpha}\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}^{\beta} 2\frac{\pi}{2} \dots}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(m!)^{\lambda}},$$

onde i deve ser impar e onde o producto

$$\operatorname{sen} i\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}^{\alpha}\frac{\pi}{2} \dots$$

é igual a zero, ou a $+1$, ou a -1; e o resto é dado pela formula

$$R_n = x^n \Sigma \frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\theta x + i\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\theta x + \frac{\pi}{2}\right) \dots}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(n!)^{\lambda}}.$$

Por ser

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(n!)^{\lambda}}$$

o resto R_n tende para zero (n.º 97 — IV — 4.º) á medida que n tende para o infinito; e portanto a funcção sen (sen x) é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de x, se fôr $x < 1$ (em valôr absoluto).

Do mesmo modo se desenvolvem as funcções

$$\text{sen}\,(\cos x),\ \cos\,(\cos x),\ e^x,\ \text{sen}\,(e^x),\ \text{etc.}$$

IV — Applicando a formula de Maclaurin á funcção

$$y = \text{arc}\,(\text{tang}\,x)$$

vem (n.º 80)

$$\text{arc}\,(\text{tang}\,x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n\,.$$

A expressão de $y^{(n)}$ dada no n.º 80 mostra que é

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta\,!} \cdot \frac{(2\,\theta x)^{n-1-2\beta}}{(1+\theta^2\,x^2)^{n-\beta}}$$

ou

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta\,!} \cdot \frac{1}{(2\,\theta\,x)^{\beta+1}} \cdot \left(\frac{2\,\theta x}{1+\theta^2\,x^2}\right)^{n-\beta}.$$

A primeira d'estas desigualdades, no caso de ser $x < \frac{1}{2}$ (em valôr absoluto), e a segunda no caso de ser $x > \frac{1}{2}$ e < 1 (em valôr absoluto) dão

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta\,!} < \frac{x^n}{n} e\,,$$

donde se conclue que o resto de R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos portanto a série

$$\text{arc}\,(\text{tang}\,x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

quando x está comprehendido entre $+1$ e -1.

Se é $x > 1$ (em valôr absoluto), a série precedente é divergente.

III

Interpolação

95. — O fim da interpolação é procurar uma funcção $f(x)$ que, quando a x se dá os valores x_1, x_2, x_3; ..., x_k, toma valores y_1, y_2, ..., y_k dados.

Este problema é indeterminado, em quanto se não dá a fórma da funcção. Aqui supporemos que se requer que a funcção $f(x)$ seja inteira e do gráo $k-1$, e n'este caso satisfaz evidentemente ao problema a formula seguinte, devida a Lagrange:

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_k)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_k)}y_2$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})}y_k.$$

96. — Consideremos agora o caso mais geral de serem dados os valores que toma a funcção $f(x)$ e suas derivadas, quando á variavel x se dá valores particulares.

Sejam x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_k os valores dados a x, e sejam os valores correspondentes da funcção e suas derivadas os seguintes:

$$x = x_1,\ y_1,\ y'_1,\ \dots,\ y_1^{(\alpha-1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x = x_i,\ y_i,\ y'_i,\ \dots,\ y_i^{(\beta-1)}$$

. . . .

$$x = x_k,\ y_k,\ y'_k,\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)}$$

Ponhamos (*)

$$F(x) = (x - x_1)^\alpha \ldots (x - x_i)^\beta \ldots (x - x_k)^\lambda$$

e (n.º 27 — I)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{M_1}{x - x_i} + \frac{M_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{M_\beta}{(x - x_i)^\beta}\right],$$

onde M_1, M_2, ..., M_β são os coefficientes de $h^{\beta-1}$, $h^{\beta-2}$, ..., h^0 no quociente $\dfrac{h^\beta f(x_i+h)}{F(x_i+h)}$.

Por outra parte, chamando A_1, A_2, ..., A_α; ..., B_1, B_2, ..., B_β; ... os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\dfrac{1}{F(x)}$, temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 f(x)}{x - x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x - x_1)^\alpha}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{B_1 f(x)}{x - x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta f(x)}{(x - x_i)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(*) A analyse que segue é tirada do nosso artigo — *Sur une formule d'interpolation* publicado nas *Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège* — (2.ª série, tomo x).

$$+\frac{P_1 f(x)}{x-x_k}+\frac{P_2 f(x)}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{P_\lambda f(x)}{(x-x_k)^\lambda}.$$

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h, vem

$$\frac{h^\beta f(x_i+h)}{F(x_i+h)} = B_1\left[h^{\beta-1} f(x_i) + h^\beta f'(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ B_2\left[h^{\beta-2} f(x_i) + h^{\beta-1} f'(x_i) + \tfrac{1}{2} h^\beta f''(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_\beta\left[f(x_i) + h f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} h^{\beta-1} f^{\beta-1}(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ R h^\beta,$$

onde o termo Rh^β contém as potencias de h, superiores a β, que resultam dos outros termos:

$$\frac{A_1 f(x_i+h)}{x_i-x_1+h},\ \frac{A_2 f(x_i+h)}{(x_i-x_1+h)^2},\ \text{etc.}$$

da funcção considerada.

Temos pois

$$M_1 = B_1 f(x_i) + B_2 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} B_\beta f^{\beta-1}(x_i)$$

$$M_2 = B_2 f(x_i) + B_3 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-2)!} B_\beta f^{\beta-2}(x_i)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\beta = B_\beta f(x_i);$$

e portanto

$$f(x) = F(x) \sum_{i=1}^{k} \Big\{ \left[\frac{B_1}{x - x_i} + \frac{B_2}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^\beta}\right] y_i$$

$$\left[\frac{B_2}{x - x_i} + \frac{B_3}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^{\beta-1}}\right] y'_i$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{(\beta-1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x - x_i} y_i^{(\beta-1)} \Big\}.$$

Esta formula dá uma funcção inteira do gráo $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1$ que resolve a questão proposta. Vê-se que para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção $\frac{1}{F(x)}$.

Nota. — Tanto esta formula, como a de Lagrange, quando algumas das quantidades k, α, β, ... se tornam infinitas, dão séries, cuja convergencia será estudada n'outra parte d'este Curso.

IV

Desenvolvimento em série das funcções implicitas

97. — A formula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas, como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações.

$$y = f(u),\ u = t + x\varphi_1(u) + x^2\varphi_2(u) + \ldots + x^k\varphi_k(u)$$

que vamos desenvolver em série ordenada segundo as potencias de x.

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t, vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + kx^{k-1}\varphi_k(u)$$

$$+ [x\varphi'_1(u) + x^2\varphi'_2(u) + \ldots + x^k\varphi'_k(u)]\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x\varphi'_1(u) + \ldots + x^k\varphi'_k(u)]\frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}[\varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1\frac{du}{dt},$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u).$$

Mas é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt},$$

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1\frac{dy}{dt}.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x, considerando u como constante, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt}\,\theta_1 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + \theta_1\,\frac{d\theta_1}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx\,dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\theta_1 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\theta_1}{du}\cdot\frac{du}{dt}\,;$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\theta_1^2 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + 2\,\theta_1\,\frac{d\theta_1}{du}\,\frac{du}{dt}\right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\theta_2\,.$$

Derivando esta equação relativamente a x obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^3\right)}{dt^2} + 3\,\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1\,\theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\theta_3\,,$$

e assim successivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A\,\frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt}\,\theta_1^{\alpha}\,\theta_2^{\beta}\,\ldots\,\theta_k^{\lambda}\right)}{dt^{i-1}}\,,$$

sendo A, i, α, β, etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção definida pelas equações

$$y = f(u),\; u = t + x + x^2 + \ldots + x^k\,,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \dots k x^{k-1},\ \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2},\ \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^iy}{dt^i}\left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots \left(\frac{d^ku}{dx^k}\right)^\lambda.$$

Por outra parte, temos (n.º 79 — IV)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta\dots(n!)^\lambda} \cdot \frac{d^iy}{du^i}\left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Comparando as duas formulas precedentes obtem-se o valôr de A e os de α, β, ..., e vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta\dots(k!)^\lambda}, \cdot \frac{d^{i-1}\left[\frac{dy}{dt}\,\theta_1{}^\alpha\,\theta_2{}^\beta \dots \theta_k{}^\lambda\right]}{at^{i-1}}.$$

Pondo agora $x = 0$ nas formulas

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + \dots + k x^{k-1} \varphi_1(u)$$

$$\theta_2 = 2\varphi_2(u) + 2 \,.\, 3 x \varphi_3(u) + \dots + k(k-1) x^{k-2} \varphi^k(u)$$

....

$$\theta^k = k!\, \varphi^k(u)$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u),\ \theta_2 = 2!\,\varphi_2(u),\ \ldots,\ \theta_k = k!\,\varphi_k(u),$$

$$\theta_{k+1} = \theta_{k+2} = \ldots = 0,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{i-1}\left[f'(t)\left(\varphi_1(t)\right)^{\alpha}\left(\varphi_2(t)\right)^{\beta}\ldots\left(\varphi_k(t)\right)^{\lambda}\right]}{dt^{i-1}}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n,\ i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Applicando ás funcções propostas a formula de Maclaurin vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y = f(t) + \Sigma \frac{x^n}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{i-1}\left[f'(t)\left(\varphi_1(t)\right)^{\alpha}\ldots\left(\varphi_k(t)\right)^{\lambda}\right]}{dt^{i-1}} + R_m$$

D'esta formula que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville* — 3.ª série, tomo VII) tira-se, pondo $k = 1$, a formula notavel

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{i-1}\left[f'(t)\left(\varphi_1(t)\right)^n\right]}{dt^{i-1}} + R_m,$$

devida a Lagrange (*), que dá o desenvolvimento em série da funcção y definida pelas equações

$$y = f(u),\ u = t + x\,\varphi_1(y).$$

As condições de convergencia das séries precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

(*) *Oeuvres*, tomo III.

V

Maximos e minimos

98. — Diz-se que a funcção

$$y = f(x)$$

tem um valôr *maximo* no ponto $x = x_1$, se houver um valôr δ tal que a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre $+\delta$ e $-\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção tem um valôr *minimo* no ponto $x = x_1$ se a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

fôr satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre $+\delta$ e $-\delta$.

Se a funcção dada fôr continua e a sua derivada fôr finita e determinada no intervallo de $x = a$ a $x = b$, a igualdade (n.º 49)

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$$

mostra que, em quanto $f'(x)$ fôr differente de zero, se póde dar a h um valôr tão pequeno que o signal da differença precedente mude com o signal de h. Logo é condição necessaria para que a $x = x_1$ corresponda um valôr de y maximo ou minimo, que $x = x_1$ satisfaça á equação

$$f'(x) = 0 .$$

Supponhamos agora que a derivada $f''(x)$ é finita e determinada na visinhança do ponto $x = x_1$. A formula

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{1}{2} h^2 f''(x_1 + \theta h)$$

mostra que na visinhança de x_1 é sempre

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

se $f''(x_1)$ é positiva, e

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

se $f''(x_1)$ é negativa.

Logo a $x = x_1$ corresponderá um valôr maximo ou minimo de y segundo $f''(x_1)$ é negativa ou positiva.

Se fôr $f''(x_1) = 0$, e a derivada $f'''(x)$ fôr finita e determinada na visinhança do ponto x_1, a formula

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{h^3}{3\,!} f'''(x_1)$$

mostra que para haver maximo ou minimo, é necessario que seja $f'''(x_1) = 0$.

Continuando do mesmo modo, chega-se á regra seguinte para achar os valôres de x que tornam a funcção y maxima ou minima:

Resolve-se a equação $f'(x) = 0$, *e substitue-se cada um dos valores obtidos para* x *nas derivadas seguintes* $f''(x)$, $f'''(x)$. . . ., $f^n(x)$, *até encontrar uma* $f^n(x)$ *que não se annulle. Se esta derivada fôr d'ordem impar, ao valôr de* x *considerado não corresponderá nem maximo nem minimo de* y; *se fôr de ordem par, ao valôr de* x *considerado corresponderá um maximo se este valôr tornar* $f^n(x)$ *negativa, e um minimo se tornar* $f^n(x)$ *positiva.*

Substituindo depois estes valores de x *na proposta obtem-se os maximos e minimos procurados.*

Exemplo 1.º—Para achar os valores de x que tornam maxima ou minima a funcção

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$.

Substituindo o valôr $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12x - 18$$

vem um resultado negativo, e portanto a $x = 1$ corresponde um maximo $y = 1$ da funcção considerada.

Substituindo o valôr $x = 2$ na mesma derivada vem um resultado positivo e portanto a $x = 2$ corresponde um minimo $y = 0$.

Exemplo 2.° — Achar os pontos da cycloide onde o raio de curvatura é maximo, e onde é minimo.

Para isso basta procurar os valores de t que tornam (n.° 70 — III) a funcção

$$f(t) = 1 - \cos t$$

maxima ou minima.

Temos para isso

$$f'(t) = \text{sen}\, t = 0,$$

o que dá

$$t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots,$$

e portanto os pontos onde o raio de curvatura póde ser maximo ou minimo são:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = \pi r \\ y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = 2\pi r \\ y = 0 \end{array}\right\}, \ldots$$

A derivada $f''(t) = \cos t$ é alternadamente igual a $+1$ e a -1; logo no primeiro ponto o raio de curvatura é minimo, no segundo é maximo e assim successivamente.

Substituindo os valores de t na expressão de R vê-se que o maximo valôr do raio de curvatura é $4r$ e o valôr minimo é zero, como já sabiamos.

Exemplo 3.° — No caso da funcção

$$y = \cos \frac{1}{x}$$

temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

que dá

$$x = \frac{1}{k\pi}, \; k = 1, 2, 3, \ldots, \infty.$$

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}$$

dá

$$y'' = -\frac{1}{x^4} \cos k\pi;$$

logo a

$$x = \frac{1}{\pi}, \; x = \frac{1}{2\pi}, \ldots$$

correspondem alternadamente o maximo $+1$ e o minimo -1.

Temos aqui o primeiro exemplo de uma funcção que, quando x se approxima indifinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1; de modo que entre zero e um outro valôr determinado dado a x, tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a funcção é indeterminada.

Exemplo 4.° — Consideremos a funcção

$$y = X_n,$$

X_n representando um polynomio de Legendre (n.° 90).

Como as n raizes da equação $X_n = 0$ são reaes e desiguaes e estão comprehendidas entre $+1$ e -1, a equação $X'_n = 0$ tem (n.° 49 — II) $n-1$ raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre os mesmos limites, e nenhuma d'ellas annulla X''_n. Logo o polynomio X_n terá $n-1$ maximos ou minimos comprehendidos no intervallo de $x = +1$ a $x = -1$. No caso, por exemplo, do polynomio

$$X_3 = 5\,x^3 - 3\,x\,,$$

a equação $X'_3 = 0$ dá $x = \sqrt{\tfrac{1}{5}}$ e $x = -\sqrt{\tfrac{1}{5}}$. A primeira raiz torna X''_3 positiva e a segunda torna-a negativa; logo á primeira corresponde um minimo $-\,2\sqrt{\tfrac{1}{5}}$, e á segunda um maximo $+\,2\sqrt{\tfrac{1}{5}}$.

Nota. — Pela regra precedentemente dada acham-se os valores de x que tornam y maximo ou minimo sem tornar a funcção $f'(x)$ discontinua. Póde portanto haver outros valores de x que tornem y maximo ou minimo, correspondentes aos valores x_1 de x que tornam a funcção $f'(x)$ discontinua. Não ha regra geral para saber se estes valores de x dão maximo ou minimo; é necessario em cada caso particular discutir a funcção, para vêr se $f(x_1 + h)$ cresce ou decresce quando h tende para zero passando por valores positivos ou negativos.

O mesmo acontece quando os valores que annullam $f'(x)$ tornem discontinua alguma das derivadas que seja necessario empregar no methodo precedente.

Assim, por exemplo, a funcção

$$f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \tfrac{2}{3}\,(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y' torna-se pois infinita quando $x = a$, e póde n'este caso haver maximo ou minimo.

Pondo $x = a + h$, vem

$$f(a + h) - f(a) = h^{\frac{2}{3}}$$

e portanto

$$f(a + h) - f(a) > 0$$

quer h seja positivo quer seja negativo. A $x = a$ corresponde pois um minimo b da funcção.

99. — Se a funcção cujos maximos e minimos queremos achar, fôr a funcção implicita y definida pela equação

$$F(x, y) = 0,$$

determinaremos, pela eliminação de x e y entre esta equação e a equação

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

os valores de x que tornam y maximo ou minimo e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'', y''', etc., vê-se pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

Exemplo. — Procuremos as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 50 = 0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y' = \frac{4x + 3y}{4y - 3x} = 0,$$

ou

$$4x + 3y = 0,$$

vem

$$x = \pm 3, \; y = \mp 4.$$

Derivando y' e pondo no resultado $x = 3$ e $y = -4$, vem para y'' um valôr negativo; logo á abscissa $x = 3$ corresponde uma ordenada maxima $y = -4$, ou uma ordenada minima negativa cujo valôr absoluto é igual a 4. Os valores $x = -3$, $y = 4$ dão a y'' um valôr positivo; logo á abscissa $x = -3$ corresponde uma ordenada minima $y = 4$.

100. — *Funcções de duas variaveis independentes.* — Diz-se que a funcção de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y)$$

é *maxima* no ponto $x = x_1$, $y = y_1$, se o valôr $f(x_1, y_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1); isto é, se ha um valôr δ tal que a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$$

seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* no ponto (x_1, y_1) se a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) > f(x_1, y_1)$$

é satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Procuremos agora os valores de x e y que podem tornar z maximo ou minimo. Para isso, podemos considerar a variavel independente y como funcção arbitraria de x, e portanto será condição necessaria para que z seja maximo ou minimo que seja satisfeita a equação

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' = 0,$$

que, por ser y' arbitraria, dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam os valores de x e y que podem dar a z um valôr maximo ou minimo.

Derivando z' e attendendo á segunda das equações precedentes, vem o trinomio

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y'^2,$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[\left(y' + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right)^2 + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}\right],$$

que, para haver maximo ou minimo, deve ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valôr de y', quando se substitue x e y pelos seus valores tirados das equações precedentes. Para isso, é necessario evidentemente que a condição

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)\overline{\overline{>}}\,0$$

seja satisfeita por estes valores de x e y; e o signal de z'' será o mesmo que o signal que toma $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Logo *para achar os valores maximos ou minimos de* z, *deve-se resolver relativamente a* x *e* y *as equações*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\,,$$

e verificar se os valores resultantes satisfazem á condição

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\overline{\overline{>}}\,0\,.$$

N'este caso, se estes valores derem a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *o signal* $+$. *o valôr de* z *correspondente será minimo; se derem a* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *o signal* $-$, *o valôr de* z *correspondente será maximo.*

Se os valores precedentes de x e y annullarem z'' é necessario para haver maximo ou minimo que estes valores annullem z''' e que $z^{(4)}$ tenha sempre o mesmo signal qualquer que seja y'; etc.

Nos casos ordinarios raras vezes é necessario recorrer ás derivadas de z superiores á segunda.

Exemplo.—*Achar a mais curta distancia entre um ponto* x_0, y_0, z_0 *e um plano.*

$$z=Ax+By+C\,.$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

onde z é dado em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinan x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = x - x_0 + A\,(z - z_0) = 0,\ \frac{\partial D^2}{\partial y} = y - y_0 + B\,(z - z_0) = 0;$$

e como estas equações são as de uma recta prependicular ao plano, segue-se que o ponto pedido é o pé da perpendicular abaixada do ponto sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x, y e z e substituindo na expressão de D, vem a formula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá a minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valôr de D é um minimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2\,(A^2 + 1),\ \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1),\ \frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y} = 2\,AB$$

vem o resultado

$$4\,(1 + A^2 + B^2),$$

que, por ser positivo assim como a derivada $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$, mostra que o valôr precedente de D^2 é um minimo.

VI

Indeterminações

101. — Se a funcção $f(x)$ é indeterminada quando $x = a$, chama-se *verdadeiro valôr da funcção* o limite para que tende $f(x)$ quando x tende para a. Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes.

I — Se fôr

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se annullarem quando $x = a$, a funcção reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valôr. Por ser (n.º 86)

$$f(a + h) = \frac{\varphi(a + h)}{\psi(a + h)} = \frac{\varphi'(a + \theta h)}{\psi'(a + \theta h)},$$

suppondo as funcções $\varphi'(x)$ e $\varphi'(x)$ continuas na visinhança do ponto $x = a$, teremos, quando h tende para zero

$$f(a) = \lim f(a + h) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Se fôr $\varphi'(a) = 0$ e $\psi'(a) = 0$ teremos do mesmo modo

$$f(a) = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Finalmente, se forem nullas as funcções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{n-1}(a)$ e $\psi(a)$, $\psi'(a)$, ..., $\psi^{n-1}(a)$, teremos

$$f(a) = \frac{\varphi^n(a)}{\psi^n(a)}.$$

Exemplo — A funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}$$

é indeterminado quando $x = 0$, assim como a funcção

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x}.$$

é igual a $-\frac{1}{2}$ quando é $x = 0$; logo $-\frac{1}{2}$ é o verdadeiro valôr de y correspondente a $x = 0$.

II—Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procuremos o verdadeiro valôr d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x tende para a.

Temos, como no caso anterior,

$$f(a+h) = -\frac{\dfrac{1}{\psi(a+h)}}{\dfrac{1}{\varphi(a+h)}} = \frac{\psi'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} \cdot \left[\frac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}\right]^2$$

ou

$$\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)} = \frac{[f(a+\theta h)]^2}{f(a+h)},$$

d'onde se tira, quando h tende para zero,

$$f(a) = \lim f(a+h) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valôr da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Exemplo. — A funcção

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}},$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$ quando é $x = 0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-n\, x^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo quando $x = 0$; logo é tambem nulla a funcção considerada.

III — Se a funcção

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

se reduzir a $0 \times \infty$ quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á fracção $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ que se reduz a $\frac{0}{0}$ ou a fracção $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ que se reduz a $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo. — A funcção

$$y = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

dá $0 \times \infty$ quando é $n = \infty$. Para achar o seu verdadeiro valôr, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n, á fracção

$$\frac{-\frac{1}{n^2} x^{\frac{1}{n}} \log x}{-\frac{1}{n^2}}$$

que se seduz a $log\ x$ quando è $n = \infty$. Logo temos a formula notavel

$$\log x = \lim n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \; n = \infty .$$

IV — Se a funcção

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

se reduzir a $\infty - \infty$ quando è $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V — Se a funcção

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

se reduzir a 0^0, 1^∞, ∞^0 quando é $x = a$ acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á funcção

$$log\ y = \psi(x)\ log\ \varphi(x)$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

Exemplo. A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞. Para achar o seu verdadeiro valôr, determinemos o verdadeiro valôr de funcção

$$\log y = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, o que dá $log\ y = x$, e portanto $y = e^x$. Temos pois a formula

$$e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ n = \infty.$$

Nota. Nem sempre se consegue achar pelas regras precedentes o verdadeiro valôr das funcções que se appresentam debaixo da fórma indeterminada. Recorre-se n'este caso a processos especiaes, e principalmente ao desenvolvimento das funcções consideradas em serie.

102. — Supponhamos que a derivada da funcção y definida pela equacão

$$f(x, y) = 0$$

que é dada pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

se reduz a $\frac{0}{0}$ quando é $x = a$, isto é, que temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

e procuremos o verdadeiro valôr de y'.

Derivemos para isso esta equação, o que dá

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

e tiremos depois o valôr de y' da equação que resulta de substituir x por a na equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 = 0.$$

Se $x = a$ annulla as derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

deriva-se outra vez a equação anterior e põe-se no resultado $x = a$, o que leva a uma equação do terceiro gráo em y'; e assim se continúa até chegar a uma equação que não seja identicamente nulla.

Exemplo. — A equação do *folium*

$$y^3 - 3\,axy + x^3 = 0$$

dá

$$(y^2 - ax)\,y' = ay - x^2,$$

e portanto a derivada y' reduz-se a $\frac{0}{0}$ quando é $x = 0$ e $y = 0$.

Derivando outra vez, vem a equação

$$(y^2 - ax)\,y'' + 2y\,y'^2 - 2a\,y' + 2\,x = 0$$

que, pondo $x = 0$ e $y = 0$, dá $y' = \infty$ e $y' = 0$.

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Curvas planas

103. — *Lemma.* — *Se* β *e* α *representarem quantidades infinitamente pequenas de ordem* n *e de ordem* m *relativamente a* h, *e se fôr* n > m, *haverá um valôr* h_1 *de* h *tal que a desigualdade (em valôr absoluto)* β < α *será satisfeita por todos os valores de* h *inferiores a* h_1.

Com effeito, das relações

$$\beta = h^n (A + \varepsilon),\ \alpha = h^m (B + \varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas, tira-se

$$\alpha - \beta = h^m [B + \varepsilon' - h^{n-m} (B + \varepsilon)]$$

e esta igualdade faz vêr que se póde dar a h um valôr tão pequeno que α — β tenha o signal de $h^m (B + \varepsilon')$, isto é, o signal de α. Será pois α > β.

104. — *Contacto das curvas planas.* — Sejam

$$y = f(x),\ Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto cujas coordenadas são x_0 e y_0. Se a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$ de duas ordenadas da curva correspondentes á mesma abscissa x_0+h, fôr infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, diz-se que as curvas tem no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem n*. N'este caso, a segunda curva approxima-se mais da primeira na visinhança do ponto (x_0, y_0) do que outra curva que tenha com ella um contacto de ordem menos elevada (n.° 103).

As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n decorrem immediatamente da formula de Taylor, que dá

$$F(x_0+h)-f(x_0+h)=F(x_0)-f(x_0)$$
$$+h\,[F'(x_0)-f'(x_0)]$$
$$+\ldots+\frac{h^n}{n\,!}\,[F^n(x_0)-f^n(x_0)]$$
$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!}\,[F^{n+1}(x_0+\theta h)-f^{n+1}(x_0+\theta h)]\,.$$

Com effeito, para que a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h é necessario e sufficiente que as differenças

$$F''(x_0)-f''(x_0),\ \ldots,\ F^n(x_0)-f^n(x_0)$$

sejam nullas, o que dá o seguinte:

Theorema. — As condições necessarias e sufficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n *são*

$$f(x_0)=F(x_0),\ f'(x_0)=F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0),=F^n(x_0)\,.$$

105. — Se uma das curvas consideradas fôr completamente dada, e se ao mesmo tempo fôr dada a especie de outra curva e sua equação contiver $n+1$ parametros arbitrarios, podemos dar-lhes valores que satisfaçam ás $n+1$ equações da condição precedentes; de modo que a segunda curva terá um contacto de ordem n com a primeira. N'este caso

diz-se que a segunda curva é *osculadora* da primeira, e tem com ella um contacto de ordem mais elevada do que qualquer outra curva da sua especie.

106. — A doutrina precedente, devida a Lagrange (*), vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I — Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva

$$y = f(x)$$

temos de determinar as constantes A e B que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B, \; f'(x_0) = A \; .$$

A equação da recta pedida será pois

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0) \; ,$$

e portanto é tangente á curva dada.

II — Se quizermos achar o *circulo osculador* da curva

$$y = f(x)$$

no ponto (x_0, y_0), temos de determinar as constantes arbitrarias a, b, R que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2 \, ,$$

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem:

$$f(x_0) = F(x_0), \; f'(x_0) = F'(x_0), \; f''(x_0) = F''(x_0);$$

(*) *Théorie des fonctions analytiques.*

que, por serem as funcções $F(x_0)$, $F'(x_0)$ e $F''(x_0)$ dadas pelas equações:

$$(x_0 - a)^2 + (F(x_0) - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (F(x_0) - b)\, F'(x_0) = 0$$

$$1 + (F'(x_0))^2 + (F(x_0) - b)\, F''(x_0) = 0,$$

se reduzem a (pondo $y'_0 = f'(x_0)$ e $y''_0 = f''(x_0)$)

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (y_0 - b)\, y'_0 = 0$$

$$1 + y'^2_0 + (y_0 - b)\, y''_0 = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valôr do raio R do circulo osculador:

$$R = \frac{(1 + y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{y''_0}$$

$$a = x_0 - y'_0 \cdot \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}, \quad b = y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}.$$

Da comparação d'estas formulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.° 69—I), conclue-se que *o circulo de curvatura e o circulo osculador correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem.*

III — Determinemos finalmente uma curva cuja equação seja inteira e do grão $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1 = t$:

$$Y = F(X) = A + BX + \ldots + TX^t,$$

que passe pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_k, y_k) da curva dada

$$y = f(x).$$

e que n'estes pontos tenha contactos respectivamente das ordens $\alpha - 1$, $\beta - 1$, ..., $\lambda - 1$ com esta curva.

As equações de condição do problema são

$$y_1 = F(x_1),\ y'_1 = F'(x_1),\ \ldots,\ y_1^{(\alpha-1)} = F^{(\alpha-1)}(x_1)$$

....

$$y_k = F(x_k),\ y'_k = F'(x_k),\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)} = F^{\lambda-1}(x_k)\,,$$

onde y_1, y'_1, ...; y_2, y'_2, ...; etc. representam os valores que toma a funcção $f(x)$ e as suas derivadas quando é $x = a_1$, $x = a_2$, etc.

Vê-se pois que o problema proposto equivale ao de determinar a funcção $F(x)$ quando são dados os valores que esta funcção e as suas derivadas tomam nos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc.; e resolve-se por tanto por meio da formula dada no fim do n.º 96.

107. — *Nota 1.ª* — Para se applicar a doutrina precedente é necessario que as derivadas $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^n(x_0)$ e $F'(x_0)$, $F''(x_0)$, ..., $F^n(x_0)$ sejam finitas e determinadas. O eixo das ordenadas não deve pois ser parallelo ás tangentes ás curvas no ponto (x_0, y_0), porque, se o fosse, viria $f'(x_0) = \infty$ ou $F'(x_0) = \infty$.

Nota 2.ª — A ordem do contacto é independente dos eixos coordenados a que as curvas estão referidas. Com effeito, representando por ρ e θ as novas coordenadas do ponto (x_0, y_0), as derivadas $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, ..., $\frac{d^n\rho}{d\theta^n}$ exprimem-se por meio das formulas do n.º 64 em funcção de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., $f^n(x_0)$.

As derivadas correspondentes relativas á outra curva exprimem-se pelas mesmas funcções de $F(x_0)$, $F'(x_0)$, ..., $F^n(x_0)$. Logo os dous valores de $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, etc. são iguaes.

108. — *Pontos d'inflexão.* — A determinação dos *pontos d'inflexão* da curva

$$y = f(x)$$

é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 67 — III. Com effeito, da igualdade

$$f''(x_0 + h) = f''(x_0) + h f'''(x_0 + \theta h)$$

conclue-se que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0), é necessario que seja $f''(x_0) = 0$. N'este caso, a igualdade

$$f''(x_0 + h) = h f'''(x_0) + \frac{1}{2} h^2 f^4(x_0 + \theta h)$$

mostra que (x_0, y_0) será um ponto d'inflexão, se $f'''(x_0)$ fôr differente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0) = 0$, a igualdade

$$f''(x_0 + h) = \frac{1}{2} h^2 f^4(x_0) + \frac{1}{2.3} h^3 f^5(x_0 + \theta h)$$

mostra que para (x_0, y_0) ser ponto d'inflexão é necessario que seja $f^4(x_0) = 0$.

Continuando do mesmo modo, conclue-se a regra seguinte:

Para achar os pontos d'inflexão da curva cuja equação é $y = f(x)$, *determinem-se* x *e* y *por meio d'esta equação e da equação* $y'' = 0$.

Substituam-se depois cada grupo (x_0, y_0) *de valores resultantes nas derivadas seguintes de* y. *Se a primeira derivada que não se annulla fôr de ordem impar, o ponto* (x_0, y_0) *será um ponto d'inflexão, se fôr d'ordem par o ponto não será d'inflexão.*

Exemplo 1.º — Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa \cos(ax + b),\ y'' = -Aa^2 \operatorname{sen}(ax + b);$$

e como os valores de x que tornam y'' nulla são dados pela formula

$$ax + b = k\pi,$$

onde k representa um inteiro qualquer positivo, negativo ou

nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = -Aa^3 \cos(ax+b),$$

os pontos $\left(\frac{-b+k\pi}{a}, B\right)$ serão os pontos d'inflexão da curva considerada.

Exemplo 2.º — A funcção

$$y = x + (x-1)^7$$

dá

$$y' = 1 + 7(x-1)^6,\ y'' = 7 \cdot 6(x-1)^5,$$

$$y''' = 7 \cdot 6 \cdot 5(x-1)^4,\ \ldots,\ y^{(7)} = 7\,!\,.$$

Como o valôr $x = 1$ annulla a derivada y'', e como a primeira das derivadas seguintes que este valôr de x não annulla é d'ordem impar, o ponto $(1, 1)$ é um ponto d'inflexão.

109. — *Nota.* — No processo anterior para achar os pontos d'inflexão, parte-se da hypothese que as derivadas de y a que é necessario recorrer, são continuas. Logo póde ainda haver outros pontos d'inflexão onde as derivadas y' e y'' sejam discontinuas. Do mesmo modo, se alguma das derivadas y''', $y^{(4)}$, etc. fôr discontinua no ponto (x_0, y_0), não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não d'inflexão.

N'estes casos, para achar os pontos d'inflexão recorre-se principalmente ao theorema do n.º 67 — II.

Exemplo 1.º — A funcção

$$y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Como $x = a$ torna y'' infinita, vamos vêr se o ponto (a, b) póde ser d'inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando é $x > a$ e é negativa quando é $x < a$; logo á direita do ponto (a, b) estando a concavidade voltada no

sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto estando a concavidade voltada no sentido contrario, o ponto é d'inflexão (n.º 67 — II).

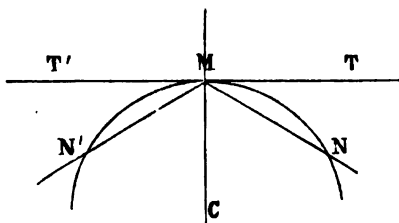
Exemplo 2.º — Do mesmo modo, a funcção

$$y = b + (x - a)^{\frac{7}{3}}$$

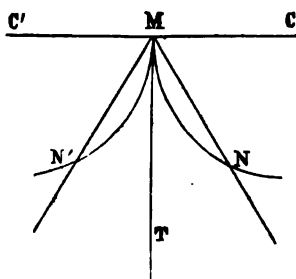
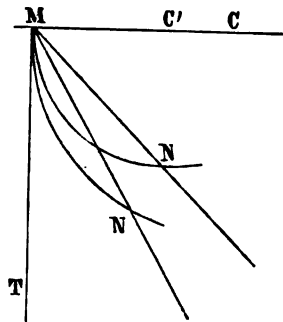
dá

$$y'' = \frac{28}{9}(x - a)^{\frac{1}{3}},\ y''' = \frac{28}{27}(x - a)^{-\frac{2}{3}}.$$

No ponto (a, b) annulla-se y'', mas y''' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior conclue-se que o ponto é d'inflexão.

110. — *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde se reunem dous arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT'.

Aos pontos que não estão n'estas condições, chama-se *pontos singulares*. Taes são os pontos seguintes:

I — O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle em que se reunem dous arcos de curva cujas secan-

tes MN e MN' tendem para a mesma direcção MT da tangente, e cujos centros de curvatura C e C' estão collocados na mesma normal, cada um de seu lado da tangente.

II — O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto onde se reunem dous arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente e cujos centros de curvatura estão collocados na mesma normal e do mesmo lado da tangente.

III — O *ponto de suspensão* onde passa só um arco de curva.

IV — O *ponto anguloso* onde se reunem dous arcos de curva cujas tangentes são differentes.

V — O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.

VI — O *ponto multiplo* que é aquelle onde se reunem dous ou mais pontos ordinarios ou singulares.

111. — Supponhamos que

$$F(x, y) = 0$$

é a equação da curva dada, e que a funcção $F(x, y)$ tem um unico valôr correspondente a cada grupo de valôres de x e y. Estão n'este caso as equações algebricas relativamente a x e y, visto que se pódem sempre desembaraçar dos radicaes. Estão tambem n'este caso, ou a elle se reduzem facilmente, muitas equações transcendentes. Assim, por exemplo, a equação

$$y = \log(xy + y^2) + \text{sen}(2x + y)$$

reduz-se a

$$e^{y} - \text{sen}\,(2x + y) = xy + y^2 .$$

Limitar-nos-hemos a procurar os pontos singulares das curvas determinadas por estas equações, fundando-nos, para isso, no theorema seguinte:

Se a funcção F (x, y) *e as derivadas* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ *forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfarão ás equações*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Sejam x_0 e y_0 as coordenadas do ponto que queremos analysar, P e Q os valôres correspondentes de $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$, e demonstremos que se estes valores forem ambos differentes de zero, o ponto é ordinario.

Mudemos para isso a origem das coordenadas para o ponto (x_0, y_0), e chamemos x' e y' as novas coordenadas dos outros pontos da curva, o que dá a nova equação da curva:

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = 0 .$$

Mas temos (n.° 45 — V)

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = Px' + Qy' + \alpha x' + \alpha_1 y',$$

onde α e α_1 são quantidades infinitamente pequenas quando x' e y' o são, isto é, quando o ponto (x', y') está infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0).

Mudando de coordenadas rectangulares para coordenadas polares por meio das relações

$$x' = \rho \cos \theta, \quad y' = \rho \,\text{sen}\, \theta ,$$

e notando que podemos sempre pôr

$$P = - M \,\text{sen}\, \omega, \quad Q = M \cos \omega,$$

visto que esta transformação corresponde a referir a coorde-

nadas polares M e ω um ponto cujas coordenadas rectangulares são P e Q, teremos

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = \rho[M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta],$$

onde α_1 e α são quantidades infinitamente pequenas com ρ.

A equação da curva referida ás novas coordenadas será pois

$$(1) \qquad M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta = 0,$$

d'onde se conclue que, se ρ tende para zero, θ tende para ω ou para $\omega + \pi$, e portanto que podemos dar a ρ um valôr tão pequeno que θ esteja comprehendido entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega - \varepsilon$ ou entre $\omega + \varepsilon + \pi$, e $\omega + \pi - \varepsilon$ representando por ε uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Procuremos agora quantos valores de θ podem corresponder a cada valôr de ρ, e consideremos para isso as funcções de θ:

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = \rho[M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta]$$

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\partial F}{\partial x'}\rho \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial F}{\partial y'}\rho\cos\theta$$

A primeira d'estas funcções mostra que podemos dar a ρ um valôr tão pequeno que a funcção tenha o signal do primeiro termo; e como este termo muda de signal qundo θ passa por ω e por $\pi + \omega$, a funcção muda tambem duas vezes de signal. Por outra parte, esta funcção é continua relativamente a θ, e por isso não póde mudar de signal sem passar por zero; logo não ha menos de dous valores de θ comprehendidos entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega - \varepsilon$ e entre $\omega + \varepsilon + \pi$ e $\omega - \varepsilon + \pi$ que satisfazem á equação (1).

Por serem $\frac{\partial F}{\partial x'}$ e $\frac{\partial F}{\partial y'}$ funcções continuas de x' e y' podemos pôr

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = P + \beta, \ \frac{\partial F}{\partial y'} = Q + \beta_1,$$

onde β e β_1 são quantidades infinitamente pequenas com x' e y', e portanto com ρ. Logo temos

$$\frac{dF}{d\theta} = \rho\,[-P \operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta - \beta \operatorname{sen}\theta + \beta_1 \cos\theta]$$

$$= \rho\,[M\cos(\theta - \omega) - \beta \operatorname{sen}\theta + \beta_1 \cos\theta].$$

D'esta igualdade conclue-se que entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega - \varepsilon$ não póde existir mais do que uma raiz de (1); porque, se houvesse mais, haveria um valôr de θ comprehendido n'este intervallo que annullaria $\frac{dF}{d\theta}$ (n.° 49), o que é impossivel visto que podemos dar a θ e ε valores tão pequenos que, no intervallo considerado, $\beta\, sen\, \theta + \beta_1\, cos\, \theta$ seja tão pequeno quanto se queira, e $M\, cos\, (\theta - \omega)$ diffira da unidade tão pouco quanto se queira. Do mesmo modo se mostra que entre $\omega + \varepsilon + \pi$ e $\omega - \varepsilon + \pi$ não póde existir mais do que uma raiz da equação (1).

Conclue-se pois que na visinhança do ponto (x_0, y_0), a cada valôr de ρ correspondem dous valores de θ que dão pontos da curva, isto é, que uma circumferencia do raio infinitamente pequeno ρ corta a curva em dous pontos; logo no ponto (x_0, y_0) junctam-se dous arcos de curva. As inclinações dos dous raios vectores iguaes tendem uma para ω e a outra para $\pi + \omega$, logo estes raios vectores tendem para partes oppostas de uma mesma recta de direcção ω, que é portanto a tangente á curva.

Conclue-se de tudo isto que o ponto considerado é um ponto ordinario como se queria demonstrar.

112. — Para achar pois os pontos singulares da curva plana

$$F(x, y) = 0$$

temos de procurar os valores de x e y que satisfazem ás equações

$$F(x, y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0) mude-se na equação da curva x_0 em $x_0 + h$ e procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto. Depois pelos valores que

tem y'_0, que se acham pelo processo do n.º 102, vê-se se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) teem, ou não, a mesma tangente. Finalmente pelo signal de y''_0 vê-se a direcção da concavidade de cada arco (n.º 67).

Nota. — Deve-se notar que por ser y'_0 real, não se deve concluir que no ponto (x_0, y_0) passe algum arco real. Assim, por exemplo, a curva $y = \log x$ é imaginaria quando x é negativa, e todavia a sua derivada $y' = \frac{1}{x}$ é real.

118. — Terminaremos a doutrina dos pontos singulares por alguns exemplos, enviando, para um estudo desenvolvido do methodo para achar estes pontos, que aqui só rapidámente indicámos, para o *Cours de Calcul différentiel* de J. A. Serret.

Exemplo 1.º — A equação da *lemniscata*

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0$$

dá para a determinação dos pontos singulares, as equações

$$P = -2x + 4x^3 = 0, \quad Q = 2y = 0.$$

Logo esta curva tem um unico ponto singular (0, 0).

Derivando a equação dada vem

$$yy' - x + 2x^3 = 0$$

$$yy'' + y'^2 - 1 + 6x = 0,$$

e portanto no ponto (0, 0) temos $y' = \pm 1$.

Por outra parte a equação da curva, escripta debaixo da fórma

$$y = \pm x\sqrt{1-x^2}$$

mostra que no ponto (0, 0) se reunem quatro arcos da curva.

Logo o ponto (0, 0) é um ponto multiplo onde se reunem dous pontos ordinarios, e as tangentes aos arcos correspondentes fazem angulos de 45° com o eixo das abscissas.

Exemplo 2.º — A equação da *cissoïde*

$$(a - x)\, y^2 = x^3$$

dá

$$P = 3x^2 + y^2 = 0, \; Q = 2(x - a)\,y = 0,$$

e portanto esta curva só póde ter um ponto singular (0, 0).

Por ser

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$$

conclue-se que, na visinhança do ponto (0, 0), a cada valôr negativo de x correspondem dous valores imaginarios de y, e a cada valôr positivo de x correspondem dous valores iguaes e de signaes contrarios de y. Como, por outra parte, se obtem para y'_0 dous valores iguaes a zero, segue-se que no ponto (0, 0) se reunem dous arcos de curva tangentes ao eixo das abscissas positivas; logo o ponto (0, 0) é um ponto de reversão de primeira especie.

Exemplo 3.° — A curva

$$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^5 = 0$$

tem um ponto singular unico, que é a origem das coordenadas. Escrevendo esta equação debaixo da fórma

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{-x}$$

vê-se que na origem se reunem dous arcos collocados do lado das abscissas negativas. Derivando-a quatro vezes e pondo nas equações resultantes $x = 0$ e $y = 0$, obtem-se para y'_0 dous valores iguaes a zero, e para y''_0 dous valores iguaes a $+ 2$, donde se conclue que ambos os arcos são tangentes ao eixo das abscissas e que teem a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas. Logo o ponto (0, 0) é de reversão de segunda especie.

Exemplo 4.° — A curva

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0$$

tem um ponto singular, que é a origem das coordenadas. Derivando-a duas vezes obtem-se para y'_0 dous valores imaginarios e portanto a origem das coordenadas é um ponto solitario.

II

Curvas no espaço

114. — *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y = f(x),\ Y = F(X)$$

$$z = f_1(x),\ Z = F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). A distancia d de dous pontos d'estas curvas correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, será dada pela formula

$$d = \sqrt{[F(x_0 + h) - f(x_0 + h)]^2 + [F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h)]^2}.$$

Se d fôr infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que as curvas consideradas teem no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n, e n'este caso as curvas approximam-se (n.° 103) na visinhança do ponto considerado mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuremos as condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h que as differenças

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h) = \alpha$$

$$F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h) = \beta$$

o sejam, ou que uma seja da ordem $n + 1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo que uma das differenças é da ordem $n + 1$ e que a outra é da ordem $n + 1 + i$, temos (n.° 34).

$$\beta = h^{n+1}(A + \varepsilon),\ \alpha = h^{n+i+1}(B + \varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas e ε e ε' são quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$d = h^{n+1}\sqrt{(A + \varepsilon)^2 + h^{2i}(B + \varepsilon')^2},$$

donde se deduz que d é da ordem $n + 1$ relativamente a h.

Reciprocamente, se d fôr da ordem $n + 1$ relativamente a h, uma das quantidades α ou β será da ordem $n + 1$ e a outra da mesma ordem ou de ordem superior. Porque, se aquella das quantidades que é de menor ordem fosse de ordem m differente de $n + 1$, tambem d seria da ordem m em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena da ordem $n + 1$ relativamente a h, e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.º **104**) acha-se as equações de condição

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0) = F^n(x_0)$$

$$f_1(x_0) = F_1(x_0),\ f'_1(x_0) = F'_1(x_0),\ \ldots,\ f_1^n(x_0) = F_1^n(x_0).$$

115. — Se uma das curvas fôr completamente dada, e fôr dada a especie da outra curva cuja equação contenha $2(n+1)$ constantes arbitrarias, podemos determinal-as de modo a satisfazer ás equações precedentes, e obteremos uma curva que tem com a curva dada um contacto de ordem n. N'este caso a curva assim obtida diz-se *osculadora* da primeira.

116. — Appliquemos estes principios á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) da curva

$$y = f(x),\ z = f_1(x)$$

e que tem um contacto de ordem a mais elevada possivel com esta curva.

As equações da recta são de fórma

$$Y = AX + B,\ Z = CX + D$$

e podemos portanto determinar as quatro constantes A, B,

C, D de modo a satisfazer ás quatro equações necessarias para o contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B,\ z_0 = Cx_0 + D,\ f'(x_0) = A,\ f'_1(x_0) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),\ Z - z_0 = f'_1(x_0)(X - x_0),$$

e a recta é portanto tangente á curva no ponto (x_0, y_0) (n.º 71).

117. — Procuremos em segundo logar o *circulo osculador* da curva

$$y = f(x),\ z = f_1(x)$$

no ponto (x_0, y_0).

Como toda a circumferencia póde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passa pelo seu centro, as equações da circumferencia serão

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = R^2$$

$$Z = AX + BY + C.$$

N'esta equações ha sete constantes arbitrarias que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessarias para que a circumferencia e a curva dada tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de segunda ordem, e á condição de passar o plano pelo centro da esphera; isto é, ás sete equações seguintes:

$$(b)\ \begin{cases} z_0 = Ax_0 + By_0 + C \\ c = Aa + Bb + C \\ z'_0 = A + By'_0 \\ z''_0 = By''_0 \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2 \\ x_0 - a + (y_0 - b)\,y'_0 + (z_0 - c)\,z'_0 = 0 \\ 1 + (y_0 - b)\,y''_0 + y'^2_0 + (z_0 - c)\,z''_0 + z'^2_0 = 0\,. \end{cases}$$

Eliminando A, B e C entre a primeira, terceira, e quarta das equações precedentes e a equação do plano, vem a equação

$$y''_0 (Z - z_0) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0) (X - x_0) + z''_0 (Y - y_0),$$

que pertence (n.º 71 — IV) ao plano osculador da curva no ponto (x_0, y_0).

Logo *o circulo osculador n'um ponto da curva está no plano osculador da curva, correspondente ao mesmo ponto.*

Eliminando agora A, B e C entre as quatro primeiras equações (b), o que dá

$$y''_0 (z_0 - c) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0) (x_0 - a) + z''_0 (y_0 - b),$$

e em seguida, eliminando a, b e c entre esta equação e as duas ultimas equações (b), vêem as formulas

$$a = x_0 - \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)(y'_0 y''_0 + z'_0 z''_0)}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$b = y_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[z''_0 + y'_0 (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)]}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$c = z_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[y''_0 + z'_0 (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)]}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}.$$

que dão as coordenadas do centro do circulo osculador.

Substituindo depois os valores de $x_0 - a$, $y_0 - b$ e $z_0 - c$ na quinta das equações (b) vem, depois de algumas reducções, a formula

$$R = \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{[y''^2_0 + z''^2_0 + (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o raio do circulo osculador. Da comparação d'esta formula com a que dá (n.º 72 — I) o raio de curvatura, tomando n'esta x para variavel independente (pondo $x' = 1$ e $x'' = 0$), conclue-se que *o raio do circulo osculador de uma curva n'um ponto dado é igual ao raio de curvatura da curva no mesmo ponto.*

III

Superficies

118. — *Contacto de uma curva com uma superficie.* — Sejam

$$Z = F(X, Y)$$

$$y = \varphi(x), \ z = \psi(x)$$

as equações de uma superficie e de uma curva que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). Se pelo ponto $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ da curva, infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0, z_0), tirarmos uma parallela ao eixo dos zz, que encontra a superficie n'um ponto cujas coordenadas são

$$x_0 + h, \ \varphi(x_0 + h), \ F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)),$$

a differença entre as ordenadas correspondentes da curva e da superficie será

$$F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - \psi(x_0 + h) .$$

Se esta differença fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que *a curva e a superficie têem no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n.

Raciocinando como no (n.º 104) e pondo $F(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0)$, acha-se que as condições necessarias e sufficientes para que a curva e a superficie tenham um contacto de ordem n são

$$f(x_0) = \psi(x_0), \ f'(x_0) = \psi'(x_0), \ \ldots, \ f^n(x_0) = \psi^n(x_0) .$$

119. — Se a curva fôr completamente dada assim como a especie da superficie, e a equação d'esta contiver $n + 1$ constantes arbitrarias, podemos determinal-as de modo que as condições precedentes sejam satisfeitas, isto é, de modo que a superficie tenha com a curva um contacto de ordem n.

*

N'este caso diz-se que *a superficie é osculadora* da curva considerada.

I — Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Temos para isso de determinar as constantes A, B e C que entram na equação do plano

$$Z = AX + BY + C$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição:

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C,\ A + B\varphi'(x_0) = \psi'(x_0),\ B\varphi''(x_0) = \psi''(x_0),$$

o que leva a uma equação qne coincide com a equação (5) do n.º 71, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

120. — *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y),\ Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0), e $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$ as coordenadas de um ponto infinitamente visinho de (x_0, y_0, z_0).

Por serem y e x variaveis independentes ponhamos $y = \varphi(x)$, representando por φ uma funcção arbitraria. Se a differença de duas ordenadas das duas superficies, correspondentes aos mesmos valores de $x_0 + h$ e $y_0 + k$ de x e y, isto é

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0 + k)$$

$$= F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$$

fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, qualquer que seja φ, diz-se que *as duas superficies têem no ponto* (x_0, y_0, z_0) *um contacto de ordem* n.

Para que a differença precedente seja infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h é necessario e sufficiente (n.º 104) que as funcções $F(x_0, \varphi(x_0))$ e $f(x_0, \varphi(x_0))$ e as suas n primeiras derivadas sejam respectivamente iguaes, o que dá (n.º 79 — V)

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \varphi'(x_0)$$

....

$$\Sigma A \frac{\partial^m F}{\partial x_0^{\alpha'} \partial y_0^{m-\alpha'}} (\varphi'(x_0))^\alpha (\varphi''(x_0))^\beta \ldots (\varphi^n(x_0))^\lambda$$

$$= \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial x_0^{\alpha'} \partial y_0^{m-\alpha'}} (\varphi'(x_0))^\alpha (\varphi''(x_0))^\beta \ldots (\varphi^n(x_0))^\lambda .$$

Devendo estas equações ter logar qualquer que sejam as funcções $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc., conclue-se que *as condições necessarias e sufficientes para que as duas superficies tenham um contacto de ordem* n *no ponto* (x_0, y_0) *são:*

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y_0}$$

....

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_0^n} = \frac{\partial^n f}{\partial x_0^n}, \quad \frac{\partial^n F}{\partial x_0^{n-1} \partial y_0} = \frac{\partial^n f}{\partial x_0^{n-1} \partial y_0}, \ldots, \frac{\partial^n F}{\partial y_0^n} = \frac{\partial^n f}{\partial y_0^n} .$$

121. — Se uma das superficies consideradas fôr completamente determinda, e se fôr dada a especie da outra, cuja equação contenha m constantes arbitrarias, podemos determinar estas constantes de modo que as superficies tenham um contacto de ordem n, se m fôr igual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n, isto é,

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

No caso contrario pode-se estabelecer só um contacto de ordem inferior a n, e a equação fica ainda com algumas cons-

tantes arbitrarias. No primeiro caso, diz-se que a segunda superficie é *osculadora* da primeira.

I — A equação do plano

$$Z = AX + BY + C$$

contendo tres constantes arbitrarias, póde esta superficie ter um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz a esta condição determine-se as constantes arbitrarias por meio das tres equações necessarias para o contacto de primeira ordem, que dão

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C, A = \frac{\partial f}{\partial x_0}, B = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superficie será

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(Y - y_0),$$

que coincide com a equação do plano tangente (n.º 73).

II — Consideremos, em segundo logar, a esphera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrarias que contêm esta equação, de modo a satisfazer ás tres equações de condição necessarias para que esta superficie tenha um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem é necessario que a equação da superficie osculadora contenha seis constantes arbitrarias, e portanto a esphera não póde ter um contacto de segunda ordem com a superficie dada, excepto em alguns pontos particulares da superficie, como vamos vêr.

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de $Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ tirados da equação da esphera e das equações

$$X - a + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$$

$$Y - b + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0$$

devem ser iguaes respectivamente a $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ quanto n'ellas se faz $X = x_0$ e $Y = y_0$, o que dá as equações de condição:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (z_0 - c)\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$$

$$y_0 - b + (z_0 - c)\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_0} + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = 0\,.$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrarias a, b, c e R. As duas ultimas, eliminando $z_0 - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\,,$$

a que devem satisfazer os pontos (x_0, y_0, z_0) da superficie $y = f(x, y)$, para que n'elles a superficie possa ter uma esphera osculadora.

Tomando um qualquer d'estes pontos para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz, e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superficie, as equações precedentes dão

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\,\partial y}\right) = 0$$

por ser (n.° 74) $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 = 0$.

As curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) são (n.° 74) dadas pelas formulas

$$c_1 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0, c_2 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)_0;$$

portanto teremos $c_1 = c_2$, o que prova que *os pontos em que a superficie tem um contacto de segunda ordem com uma esphera coincidem com os pontos umbilicaes* (n.° 74).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do contacto consulte-se o bello *Cours d'Analyse* do snr. Hermite.

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

I

Funcções definidas por séries

122. — Vamos n'este Capitulo estudar as funcções definidas por séries para estabelecer as condições da sua continuidade, e achar as suas derivadas. Em seguida, formaremos por meio d'estas funcções exemplos das singularidades mais importantes relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funcções apresentam.

123. — *Continuidade das funcções definidas por séries.* — A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

Theorema. — Se a série

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

onde $f_1(x)$, $f_2(x)$, *etc. representam funcções continuas de* x *n'um intervallo dado, fôr uniformemente convergente n'este intervallo, a funcção* $f(x)$ *será continua no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser uniformemente convergente a série considerada, a cada valôr da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.° 17) um valôr m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x) < \frac{\delta}{3}$$

seja satisfeita (em valôr absoluto) qualquer que seja p, e qualquer que seja o valôr de x comprehendido no intervallo considerado. Logo, no mesmo intervallo, a somma $\sum_{m+1}^{\infty} f_n(x)$ não póde exceder $\frac{\delta}{3}$.

Mas por ser continua a somma (n.º 22)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

pode-se sempre dar a h um valôr h_1 tal que a desigualdade

$$P_m(a+h) - P_m(a) < \tfrac{1}{3}\delta$$

seja satisfeita (em valôr absoluto) por todos os valores de h inferiores a h_1, quando a representa um valôr de x comprehendido no intervallo considerado.

D'estas desigualdades e da igualdade

$$f(x+h) - f(x) = P_m(x+h) - P_m(x)$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valôr que se attribua a δ, ha sempre um valôr de m e um valôr de h, tal que a desigualdade

$$f(a+h) - f(a) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1. Logo a funcção é continua n'um ponto qualquer $x = a$ do intervallo considerado, e portanto em todo o intervallo.

124. — *Derivadas das funcções definidas por séries.* — Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por séries, fazendo notar que as séries, cujos termos são as derivadas dos termos de uma série convergente, póde ser divergente. E' o que mostra claramente a série seguinte:

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots,$$

que é convergente quando é $x = 1$, em quanto que a série das derivadas dos seus termos

$$-1 + x - x^2 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \ldots$$

é divergente quando é $x = 1$.

Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

fôr convergente n'um intervallo dado, e se no mesmo intervallo fôr uniformemente convergente a série seguinte formada com as derivadas dos termos da precedente:

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

será

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

no mesmo intervallo.

Seja a um valôr qualquer de x comprehendido no intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f_n(x),\quad R_1(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teremos evidentemente (n.º 49)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) = \sum_1^{m+p} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a)$$

$$= \sum_1^{m} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right] + \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a),$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a série $\Sigma f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valôr tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valôr correspondente para m tal que as desigualdades (em valôr absoluto)

$$\sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a) < \frac{\delta}{10}, \quad \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a+\theta h) < \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por qualquer valôr de p. Logo, no mesmo intervallo, a desigualdade

$$\sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] < \frac{\delta}{5}$$

será tambem satisfeita.

Por outra parte, por ser

$$f'_n(a) = \lim \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que ha um valôr h_1 tal que a desigualdade

$$\sum_{1}^{m} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right] < \frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valôr finito anteriormente determinado) será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1.

Finalmente, por serem convergentes as séries $\Sigma f_n(x)$ e $\Sigma f'_n(x)$, a cada valôr de h corresponderá um valôr de p tal que seja

$$R(a+h) < \frac{\delta}{5}, \; R(a) < \frac{\delta}{5}, \; R_1(a) < \frac{\delta}{5}.$$

Das desigualdades precedentes conclue-se que, dando a δ um valôr tão pequeno quando se queira, ha sempre um valôr correspondente h_1 tal que a desigualdade (em valôr absoluto)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_{1}^{\infty} f'_n(a) < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1; e portanto teremos

$$\lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \sum_1^{\infty} f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades d'algumas funcções

125. — *Funcções discontinuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$ é discontinua no ponto $x=a$ quando n'este ponto se torna infinita, ou indeterminada ou passa de um valôr a outro que differe do primeiro d'uma quantidade finita. Da primeira especie de discontinuidade temos até aqui encontrado muitos exemplos nas funcções racionaes, quando a é raiz do denominador, na funcção *tang* x quando é $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, etc. Temos um exemplo simples da segunda especie de discontinuidade na funcção sen $\frac{1}{x-a}$ que no ponto $x=a$ é indeterminada. Para exemplo da terceira especie de discontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela série seguinte

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \ldots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \ldots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\frac{1-x^m}{+x^m} = -1 + \frac{2}{1+x^m}$$

$$\frac{1}{1+x^m} = \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})}$$

$$\frac{1}{1+x^{m-1}}=\frac{1}{1+x^{m-2}}+\frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})}$$

. . . .

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}+\frac{1-x}{2(1+x)}$$

donde se tira

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=\frac{2(1-x)}{2(1+x)}+\frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}+\ldots+\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

e

$$\lim_{m=\infty}\frac{1-x^m}{1+x^m}=2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

D'esta igualdade conclue-se que a funcção considerada é igual a $+1$ se o valôr absoluto de x é menor do que a unidade, que é igual a -1 se o valôr absoluto de x é maior do que a unidade, que é igual a zero se é $x=1$ e que é igual infinito se $x=-1$. A funcção é pois discontinua no ponto $x=1$, onde passa do valôr $+1$ ao valôr -1, e no ponto $x=-1$ onde é infinita.

126. — *Condensação das singularidades.* — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam n'um intervallo finito um numero finito de pontos em que são discontinuas. Ha porém funcções que, n'um intervallo finito, são discontinuas em um numero infinito de pontos separados por outros em que são continuas, e ha funcções que n'um intervallo finito são discontinuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza pode-se seguir um methodo devido a Hankel (*) e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fórma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr o

(*) *Hankel: Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* — Tubingue, 1870.

principio fundamental d'este methodo, que se póde estudar desenvolvidamente no excellente livro: *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* do sr. Dini, professor na Universidade de Pisa.

I—Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y = -1$ e $y = +1$ é continua e menor do que uma quantidade M, que no ponto $y = 0$ é nulla e que, quando y tende para zero passando por valores positivos e negativos, tende para um limite differente de zero, ou para dois limites dos quaes um, pelo menos, é differente de zero.

A funcção φ (sen $nx\pi$), onde n é inteiro, será nulla e discontinua nos pontos onde $x = \frac{m}{n}$ (m inteiro), e será continua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n \varphi(\text{sen } nx\pi) \tag{1}$$

é tambem continua, se A_1, A_2, etc. representarem quantidades taes que seja absolutamente convergente a séries $\sum_{1}^{\infty} A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valôr de δ por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr m_1 de m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n < \delta$$

será satisfeita por m_1 e pelos inteiros superiores. Logo *à fortiori* a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n \varphi(\text{sen } nx\pi) < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de m, em todos os pontos onde a funcção φ é continua. A série (1) é pois uniformemente convergente nos pontos considerados, e portanto a funcção $f(x)$ é continua (n.º 123) nos mesmos pontos.

Consideremos agora os pontos onde a funcção φ (sen $n\pi x$) é discontinua, isto é, os pontos onde $x = \frac{m}{p}$, m e p representando dous numeros inteiros primos entre si; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p teremos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,\,b} A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]$$

onde $\sum\limits_{a,\,b}$ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b, excluindo os termos correspondentes a $b = 0$ que são nullos.

Do mesmo modo teremos

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \Sigma\, A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]$$

ou, reparando os termos correspondentes a $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) = \Sigma\, A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p} + h\right)\pi\right]$$

$$+ \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,[\operatorname{sen}(am\pi + aph\pi)].$$

Logo será

$$f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,\,b} A_{ap+b}\left\{\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right]\right.$$

$$\left. - \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]\right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\operatorname{sen} aph\pi),$$

e, por ser a funcção $\sum\limits_{a,\,b} A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\dfrac{m}{p}\pi\right]$ continua quando b é differente de zero,

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right)\right] = \lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\operatorname{sen} aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da série

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\; aph\pi)$$

na vesinhança do ponto $h = 0$, conclue-se que, por mais pequeno que seja o valôr que se dê a δ, ha sempre um valôr m_1 tal que as desigualdades

$$\sum_{a=m+1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) < \frac{\delta}{3}$$

$$\sum_{a=m+1}^{\infty} A_{ap} \lim \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) < \frac{\delta}{3}$$

sejam satisfeitas pelos valores de m superiores a m_1.

Determinado assim m, ha sempre um valôr h_1 tal que a desigualdade (n.° 33, 1.°)

$$\sum_{a=1}^{m} A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{m} A_{ap} < \frac{\delta}{3}$$

seja satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1.

Logo a desigualdade

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}$$

$$< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1, e teremos

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}$$

d'onde

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right)\right] = \lim_{h=} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \,.\, \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um, pelo menos, dos valores $\lim_{h=0} \varphi$ (sen $aph\pi$) e $\lim_{h=0} \varphi$ (— sen $aph\pi$), correspondentes um a valores positivos e outro a valores negativos de h, é differente de zero, a funcção $f(x)$ é, discontinua nos pontos $x = \frac{m}{n}$.

Por uma analyse semilhante se mostra que a funcção $f(x)$ é discontinua nos pontos $x = \frac{m}{n}$, quando m é impar.

Logo a funcção $f(x)$ é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e é discontinua em todos os pontos em que x é commensuravel.

Para applicar o methodo anterior é necessario formar uma funcção $\varphi(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta funcção. Póde servir para este fim a funcção

$$-\frac{y}{y+2}-\frac{2y(y+1)}{[(y+1)^2+1][y+2]}-\dots$$
$$-\frac{2y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k+1][(y+1)^{k-1}+1]}-\dots$$

que se deduz da série que atraz considerámos:

$$\frac{1-x}{1+x}+\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}+\dots+\frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})}+\dots$$

pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo esta série igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será aquella igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $x < 0$, $x = 0$ ou $x > 0$.

Temos pois a funcção

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}\,n\pi x\,(\text{sen}\,n\pi x+1)^{k-1}}{[(\text{sen}\,n\pi x+1)^k+1]\,[(\text{sen}\,n\pi x+1)^{k-1}+1]}$$

que é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e que é discontinua nos pontos onde x é commensuravel.

II — Partindo da série que vimos de empregar:

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2y\,(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k + 1]\,[(y+1)^{k-1} + 1]}$$

podemos formar agora uma funcção totalmente discontinua n'um intervallo finito. Com effeito, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!\,[\varphi(\text{sen}\; n\pi x)]^2}$$

será igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,!} = e - 1$ quando x é incommensuravel e será infinita quando x é commensuravel porque no primeiro caso a funcção $[\varphi(\text{sen}\; n\pi x)]^2$ é igual a $+1$, e no segundo caso é nulla.

Logo a funcção

$$f(x) = \frac{e - 1}{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\,!\,[\varphi(\text{sen}\; n\pi x)]^2}}$$

é igual a zero quando x é commensuravel, e é igual a $+1$ quando x é incommensuravel, e portanto é totalmente descontinua n'um intervallo qualquer.

127. — *Exemplo de uma funcção continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel pode-se formar funcções continuas com um numero infinito de pontos onde não têem derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a appresentar um exemplo de uma funcção continua que não tem derivada em ponto algum, devido ao snr. Weierstrass, que tractaremos pela mesma analyse que o eminente geometra (*Jornal de Crelle* — tomo 79). Esta funcção é a seguinte:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\,\pi,$$

onde a que representa um inteiro impar, e b, representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser esco-

lhidos de modo que seja

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi .$$

A série que define $f(x)$ é uniformemente convergente qualquer que seja o valôr de x. Com effeito, por ser convergente a progressão $\Sigma\, b^n$ a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

será satisfeita por todos os inteiros superiores a m. Logo a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos(a^n x)\pi < \delta$$

é *à fortiori* satisfeita pelos mesmos valores de m qualquer que seja x, e a série é portanto uniformemente convergente.

D'aqui e de ser cada termo da série uma funcção continua de x conclue-se (n.º 123) que a funcção $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como o snr. Weierstrass demonstra que esta funcção não tem derivada.

Represente x_0 um valôr determinado de x, m um numero inteiro positivo e α_m um numero inteiro tal que seja

$$-\tfrac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leqq \tfrac{1}{2} .$$

Representando esta differença por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m},\ x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m},\ x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m},$$

d'onde se conclue que x_0 está conprehendido entre x' e x'', e que se póde dar a m um valôr tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\frac{\cos(a^n x')\pi-\cos(a^n x_0)\pi}{x'-x_0}\right)$$

$$=A+B$$

pondo

$$A=\sum_{0}^{m-1}\left(a^n\ b^n.\frac{\cos(a^n x')\pi-\cos(a_n x_0)\pi}{a^n(x'-x_0)}\right)$$

$$B=\sum_{0}^{\infty}\left(b^{m+n}\frac{\cos(a^{m+n}x')\pi-\cos(a^{m+n}x_0)\pi}{x'-x_0}\right).$$

Por ser

$$\frac{\cos(a^n x')\pi-\cos(a^n x_0)\pi}{a^n(x'-x_0)}=-\pi\operatorname{sen}\left(a^n\frac{x'+x_0}{2}\pi\right)\frac{\operatorname{sen}\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\right)\pi}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi},$$

e por ser (em valôr absoluto)

$$\operatorname{sen}\left(a^n\frac{x'+x_0}{2}\pi\right)<1,\quad \frac{\operatorname{sen}\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\right)\pi}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}<1,$$

temos (em valôr absoluto)

$$A<\pi\sum_{0}^{m-1}a^n b^n,$$

ou

$$A<\frac{\pi}{ab-1}(ab)^m.$$

Como é

$$\cos(a^{m+n}x')\pi=\cos a^n(\alpha_m-1)\pi=-(-1)^{\alpha_m}$$

$$\cos(a^{m+n}x_0)\pi = \cos(a^n\alpha_m + a^n x_{m+1})\pi = (-1)^{\alpha_m}\cos(a\,x_{m+1})\pi.$$

temos tambem

$$B = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos(a^n x_{m+1})\pi}{1+x_{m+1}}\, b^n,$$

e, por serem positivos todos os termos da somma

$$\sum_0^{\infty} \frac{1+\cos(a^n x_{m+1})\pi}{1+x_{m+1}}\, b^n,$$

e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que $1+x_{m+1}$ está comprehendido entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$),

$$(-1)^{\alpha_m} B > \tfrac{2}{3}(ab)^m.$$

Temos pois

$$B = (-1)^{\alpha_m}\tfrac{2}{3}\eta\,(ab)^m$$

onde η representa um numero positivo maior do que a unidade, e

$$A = (-1)^{\alpha_m}\cdot\frac{\eta\,\varepsilon\,\pi}{ab-1}(ab)^m$$

onde ε representa uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1.

Temos pois

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\,\eta\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\,\eta_1\left(\frac{2}{3}+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$ ou

$$\tfrac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1},$$

conclue-se das igualdades procedentes que as razões

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

ou não tendem para limite algum finito, ou tendem para limites de signaes contrarios, quando x' e x'' tendem para x_0. Em qualquer dos casos a funcção $f(x)$ não tem derivada no ponto x_0.

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1887-1888

(undecimo anno)

PORTO

TYPOGRAPHIA OCCIDENTAL

66—Rua da Fabrica—66

1888

RELATORIO DOS FACTOS MAIS IMPORTANTES

QUE TIVERAM LOGAR NA

ACADEMIA POLYTECHNICA

NO ANNO LECTIVO DE 1887-1888

LIDO PELO DIRECTOR DA MESMA ACADEMIA

Na sessão publica de 17 d'outubro de 1887

ELA segunda vez, Senhores, me apresento deante de vós para, em obediencia á lei, vos lêr o relatorio dos factos mais importantes da nossa vida academica, que tiveram logar no anno lectivo que findou; e não mais á vontade me encontro do que no anno anterior, apezar das repetidas provas de benevolencia, que de vós tenho recebido, tanta é a minha falta de dotes oratorios, e tão ingrato é o assumpto de que vou occupar-me.

Referir-me-hei, como no ultimo relatorio, que tive a honra de lêr deante de vós, á frequencia das diversas cadeiras da nossa Academia, ao resultado final dos actos, ao estado dos diversos gabinetes auxiliares do ensino, ás mudanças, que tiveram logar no pessoal docente, e finalmente ás obras do edificio.

Frequencia e resultado dos actos. — Pela publicação official da Academia — o *Annuario* — sabeis, Senhores, qual o numero de alumnos que frequentaram este estabelecimento scientifico no anno lectivo que findou e a sua distribuição pelas diversas cadeiras. Não vos foi porém ainda annunciado o resultado final dos actos, a que se procedeu no fim d'esse anno lectivo e no principio do presente. Principiarei pois este relatorio por vos enunciar este resultado.

Frequentaram as cadeiras da Academia no anno lectivo findo 242 alumnos abrindo a totalidade de 757 matriculas por cadeiras. No fim do anno lectivo fizeram-se 457 actos que juntos a 27 que tiveram logar n'este mez de outubro prefazem o numero de 484 actos, assim distribuidos pelas diversas cadeiras:

1.ª cadeira. — Matricularam-se 42 alumnos, fizeram acto 33, foram approvados 31.

2.ª cadeira. — Matricularam-se 23, fizeram acto 13, foram approvados 9.

3.ª cadeira. — Matricularam-se 22, fizeram acto 14, foram approvados 12.

4.ª cadeira (1.ª parte). — Matricularam-se 26, fizeram acto 9, foram approvados 9.

4.ª cadeira (2.ª parte). — Matricularam-se 8, fizeram acto 7, foram approvados 6.

5.ª cadeira (1.ª parte). — Matricularam-se 10, fizeram acto 10, foram approvados 10.

5.ª cadeira (2.ª parte). — Matricularam-se 6, fizeram acto 5, foram approvados 5.

6.ª cadeira. — Matricularam-se 105, fizeram acto 95, foram approvados 72.

7.ª cadeira. — Matricularam-se 88, fizeram acto 57, foram approvados 45.

8.ª cadeira (1.ª parte). — Matricularam-se 104, fizeram acto 49 e foram approvados 43.

8.ª cadeira (2.ª parte). — Matricularam-se 37, fizeram acto 15, foram approvados 12.

9.ª cadeira. — Matricularam-se 11, fizeram acto 6, foram approvados 5.

10.ª cadeira. — Matricularam-se 89, fizeram acto 59, foram approvados 39.

11.ª cadeira. — Matricularam-se 59, fizeram acto 29, foram approvados 26.

12.ª cadeira. — Matricularam-se 6, fizeram acto 4, foram approvados 4.

13.ª cadeira. — Matricularam-se 7, fizeram acto 7, foram approvados 7.

14.ª cadeira. — Matricularam-se 7, fizeram acto 7, foram approvados 6.

15.ª cadeira. — Matricularam-se 5, foram approvados 5.

16.ª cadeira. — Matricularam-se 14, fizeram acto 9, foram approvados 9.

17.ª cadeira. — Matricularam-se 2, fez acto 1, que foi approvado.

18.ª cadeira. — Matricularam-se 86, fizeram acto 55, que foram approvados.

Para brevidade junto na lista dos approvados tanto os que foram approvados plenamente como os que o foram approvados *simpliciter*, deixando para o proximo *Annuario* a separação das duas listas, assim como as listas dos que perderam o anno por faltas,

dos que se riscaram da matricula, dos que não obtiveram média sufficiente para ir a acto final; e finalmente a separação dos resultados relativos aos actos feitos em julho, e aos actos feitos em outubro.

Passarei agora a fallar dos gabinetes e estabelecimentos auxiliares do ensino, que a Academia possue, referindo-me porém sómente áquelles que no anno lectivo anterior foram enriquecidos com novos productos.

BIBLIOTHECA. — Durante o anno findo, empregou-se a maior parte da dotação destinada pelo Conselho para a Bibliotheca, á compra de livros relativos á Engenheria, a completar algumas das collecções scientificas mais importantes que a Bibliotheca possuia; e á acquisição de novas collecções scientificas, escolhidas entre as mais notaveis que existem na Europa. Pareceu-me sempre que nada melhor podia fazer-se a favor da Bibliotheca do que enriquecel-a com taes collecções, que pelo seu preço elevado não podem ser facilmente adquiridas pela maior parte dos leitores. No *Annuario* de 1886 a 1887 e no *Annuario* que n'este anno se publicará vereis a lista completa das obras compradas.

LABORATORIO CHIMICO. — Por um excellente relatorio que o illustre Director do Laboratorio chimico, sr. Ferreira da Silva, teve a bondade de me dirigir, vê-se que durante o anno lectivo, deu todo o desenvolvimento possivel aos trabalhos práticos, realisando os alumnos no Laboratorio a preparação de alguns

corpos importantes da Chimica organica, que aqui não mencionarei, mas que conhecereis pelo *Annuario* onde este relatorio será publicado.

Realisou tambem este distincto professor deante do Curso, e em seguida, na minha presença e d'alguns professores da Academia, a synthese memoravel da acetylena, que abriu a Berthelot o caminho para a synthese dos corpos organicos.

Com a dotação do Laboratorio foram comprados productos chimicos e reagentes para as preparações e experiencias realisadas, e alguns apparelhos e utensilios, taes como — apparelho gazogenico de Alvergniat, grande exsicador de Dupré, apparelho de Soxhlet para analyse do leite, etc.

GABINETE DE HISTORIA NATURAL. — As acquisições feitas para o gabinete de Mineralogia, Paleontologia e Geologia foram pouco em relação ás necessidades d'este gabinete, mas permittem já poder tentar o ensino da crystalographia com maior desenvolvimento, e iniciar o ensino das applicações do microscopio á lithologia.

Um dos melhores modelos de microscopio de Leiss, um goniometro, alguns mineraes appropriados para o ensino e alguns exemplares de fosseis representam o que de mais importante este anno poude obter o gabinete.

Para o ensino da Geologia e Paleontologia, faltam actualmente quasi todos os recursos. Porisso o illustre Director do gabinete tenciona, com a dotação do presente anno lectivo, principiar a adquirir uma collecção dos fosseis necessarios para este ensino.

Para o gabinete de Zoologia não se fez este anno acquisição alguma, porque os pequenos recursos da Academia não permittem attender no mesmo anno a todos os gabinetes.

Gabinete de cynematica. — Não ha muitos annos ainda, um distincto professor allemão Reuleaux, depois de haver refutado com uma critica das mais finas as antigas theorias das machinas, substituia-lhes uma theoria nova, cheia de originalidade e profundeza, que publicou n'um livro de um alcance phylosophico excepcional que, como diz o sr. Tannery, todos os que ensinam a Mecanica theorica e prática devem meditar.

O nosso illustre collega, professor de Mecanica n'esta Academia, fascinado com razão pela doutrina do sabio professor de Berlin, resolveu desde logo introduzil-o no ensino da sua cadeira; e para facilitar aos alumnos a sua comprehensão, fundou um gabinete de modelos dos diversos machinismos empregados por Reuleaux.

No anno lectivo que vem de findar adquiriram-se para este gabinete nove modelos constituindo a série *M* do catalogo de Hoff e Voigt, a qual comprehende os parafusos.

O custo avultado da série seguinte estando fóra das forças do orçamento da Academia, o Conselho, por proposta do sr. Albuquerque, resolveu que se pedisse ao governo a quantia de 1:000$000 reis destinada á compra d'essa série, e á impressão de um catalogo illustrado dos modelos que o gabinete possue.

Na Secretaria não consta ainda qual a intenção do governo a este respeito.

Não terminaremos o que temos a dizer sobre os gabinetes sem declarar que no anno lectivo findo foram postos á disposição da Academia com a melhor vontade pelo sr. Director do Instituto industrial os instrumentos e modelos d'aquelle estabelecimento scientifico. Utilisámos d'este modo a sua bella collecção de modelos da Geometria Descriptiva e a sua pilha de 50 elementos de Bunsen, com a qual o sr. Ferreira da Silva fez a synthese de acetylena de que já fallei.

Tivemos no anno lectivo findo concursos para dous logares, um de lente proprietario na secção de Mathematica, outro de lente substituto na secção da Phylosophia.

Foi despachado para o primeiro logar o sr. Victorino Teixeira Laranjeira, que depois de um curso distincto na Universidade de Coimbra, onde recebeu o gráo de Bacharel em Mathematica, e na Escóla do Exercito de Lisboa, onde frequentou a Engenheria militar, adquiriu nas obras do caminho de ferro do Douro a prática tão necessaria para o magisterio que vae exercer. Foi despachado para o segundo logar o sr. Aarão Ferreira de Lacerda, que acabára de terminar o seu curso na Universidade de Coimbra, adquirindo pelo seu talento e applicação o gráo de Doutor em Phylosophia.

Obras do edificio.—Em virtude da reforma por que passou ultimamente o Instituto industrial do

Porto, reconheceu-se a necessidade de construir um edificio proprio para a collocação d'este estabelecimento de ensino, visto não se julgar a parte do nosso edificio, actualmente occupada por elle, no caso de se adaptar convenientemente ás condições exigidas por essa reforma, em vista da difficuldade de ahi se dispôrem as officinas e as machinas que é necessario montar.

Tendo alguem lembrado como logar appropriado para esta instituição o edificio occupado pela Escola Medico-Cirurgica, e os terrenos visinhos occupados pelo nosso Jardim Botanico, e a conveniencia de transferir a Escola Medico-Cirurgica para o edificio da Academia, de modo a reunir na mesma casa todos os estabelecimentos de ensino superior que existem n'esta cidade, mandou o governo ao Porto uma commissão composta dos srs. Manoel Affonso Espregueira e Conselheiro Madeira Pinto para estudarem este assumpto. Foi esta commissão de parecer que era acceitavel este modo de installar os tres estabelecimentos scientificos, devendo a Escola Medico-Cirurgica occupar metade da ála norte do edificio, isto é, da ála que volta para o lado da praça dos Voluntarios da Rainha, e devendo a Academia occupar a outra metade da ála norte e toda a ála leste do edificio, isto é, a parte que ella e o Instituto industrial actualmente occupam.

Em seguida mandou o governo ouvir a este mesmo respeito os Conselhos da Academia Polytechnica e da Escola Medico-Cirurgica. O Conselho da Academia Polytechnica consultou, por maioria, que achava conveniente a nova disposição que se queria

dar aos tres estabelecimentos; com a condição porém de que primeiro se resolvesse a questão de transferencia, para fóra do edificio da Academia, do collegio dos meninos orphãos de N. Senhora da Graça, visto que, sem esta transferencia, não podia a Academia approveitar convenientemente, por falta de communicações interiores, a parte que recebia pela mudança do Instituto para outro local.

Ao mesmo tempo que estas consultas tinham logar, encarregava o governo o distincto engenheiro, antigo alumno d'esta Academia, sr. Alfredo Soares, de elaborar um plano geral do edificio, de modo a servir para a installação das duas Escolas de instrucção superior do Porto.

Em virtude do que venho de vos dizer, Senhores, intendeu a commissão d'Obras que se não devia continuar as obras a que se estava procedendo no pavimento terreo do edificio, para a construcção de algumas salas para aulas, por constar que esta parte do edificio era alterada no projecto que se estava elaborando; fazendo sómente excepção para uma sala, que julgou não seria alterada por outra disposição que de futuro se quizesse dar ao interior do edificio.

Se no anno lectivo que vae principiar se não poder ainda dar desenvolvimento ás obras para a construcção de salas d'aulas, de que tanta necessidade temos, tenciono propôr á commissão d'Obras e ao governo, que se empregue uma parte da verba destinada ás obras, na reforma da mobilia que a Academia possue, e na compra de alguma mobilia nova, de que ha necessidade para installar os productos que os gabinetes teem adquirido.

Durante as ferias que veem de ter logar foi offerecido á Academia pelo sr. Ascencio de Freitas Pimentel Soromenho um premio destinado ao estudante que mais se distinguisse, no anno lectivo que vem de findar, no curso de Engenheria.

Apraz-me citar aqui esta acção nobre de um portuguez que, nas longinquas regiões da Australia, se não esquece da patria. Actos d'esta natureza que são ha muito frequentes n'outros paizes, principiam, felizmente, tambem a praticar-se entre nós, o que prova quanto se vae comprehendendo qual a influencia que a instrucção tem sobre a civilisação e progresso das nações.

Illustres Academicos a quem me cabe a honra de entregar hoje os diplomas de premio e *accessit* que, pelo vosso talento e applicação, vos foram conferidos pelos vossos mestres!

Duas cousas concorrem principalmente para tornar o homem grande: — o poder intellectual e o trabalho. Por não juntarem ao poder intellectual o amor ao trabalho, muitos espiritos têem passado sem deixar o traço luminoso que da sua intelligencia havia a esperar. Porém o trabalho, nas sciencias, é uma lucta continuada e intensa contra as difficuldades que ellas apresentam a cada passo aos que as cultivam, e se não vencem sem profunda meditação. Para animar o espirito n'esta lucta é necessario ter fé e muita fé. Ter fé em que se ha de vencer a difficuldade que nos atormenta, ter fé na consideração que a sociedade de-

dica aos que sabem, ter fé nas posições elevadas que o estado reserva para os homens illustrados.

Não ha ramo algum do saber humano cuja historia não apresente exemplos frequentes de quanto póde a fé.

Sem a fé não teria Kepler, um d'esses homens raros, como diz Laplace, que a natureza dá de tempos a tempos ás sciencias para d'ellas tirarem as grandes theorias preparadas pelos trabalhos de muitos seculos, sem a fé, digo, não teria Kepler passado 17 longos annos em tentativas continuadas para chegar finalmente, depois de tão longo intervallo de meditação e estudo, á descoberta memoravel das leis que regulam o movimento dos astros.

Sem a fé não teria Saussure, um dos fundadores da geologia, escalado entre mil difficuldades o gigante da Europa, o Monte Branco, para ir no vertice do colosso dos Alpes resolver tantas questões importantes para a sciencia que estava fundando.

Sem a fé não teriam os inventores da machina a vapor luctado com tanta coragem e por tanto tempo contra as difficuldades que a ignorancia oppunha á realisação de tão importante descoberta.

Sem a fé não teria Lesseps conseguido organisar a poderosa companhia que forneceu os meios para levar a effeito a abertura do canal de Suez, nem teria conseguido concluir esta obra colossal, a maior que a engenheria tem até hoje realisado.

Que uma fé viva vos anime pois, jovens academicos, na vossa lucta contra as difficuldades das sciencias, que d'entre vós sairão por certo engenheiros distinctos, medicos illustres e talvez mesmo homens

eminentes que um dia farão progredir as proprias sciencias que hoje estudaes. Que este numero seja grande, é o que vivamente desejo para honra d'esta Academia e interesse da patria.

DISSE

I

Organisação

I

PESSOAL

A — Pessoal do quadro legal da Academia

1. Direcção

Francisco Gomes Teixeira, doutor na faculdade de Mathematica na Universidade de Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Costa Cabral, 132.

2. Corpo docente

Francisco de Salles Gomes Cardoso, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra e capitão de mar e guerra.

Mattosinhos—Rua Direita, 20.

Francisco da Silva Cardoso.

Rua da Alegria, 341.

José Joaquim Rodrigues de Freitas, engenheiro civil pela

Academia Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Travessa de Santa Catharina, 52.

Antonio Alexandre Oliveira Lobo, bacharel formado na faculdade de Direito.

Rua do Principe, 50.

Conde de Campo Bello, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Quinta de Campo Bello (Gaya).

Joaquim de Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, antigo professor no Lyceu Nacional do Porto, etc.

Rua dos Fogueteiros, 1.

Antonio Joaquim Ferreira da Silva, bacharel formado na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, director do Laboratorio Municipal de chimica do Porto, etc.

Rua da Alegria, 929.

José Diogo Arroyo, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Martyres da Liberdade, 189.

Manoel da Terra Pereira Vianna, bacharel formado nas faculdades de Mathematica e de Philosophia da Universidade de Coimbra, engenheiro pela Eschola de Pontes

e Estradas de Paris, e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Santa Catharina, 473.

Wenceslau de Sousa Pereira Lima, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, membro do Conselho Superior de Instrucção Publica, e deputado ás côrtes.

Rua de Cedofeita, 137.

Roberto Rodrigues Mendes, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, capitão d'estado maior d'engenheria, e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

S. Lazaro, (Hotel America).

Luiz Ignacio Woodouse, bacharel formado em Mathematica pela Universidade de Coimbra e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Rua do Breyner, 118.

Manoel Amandio Gonçalves, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 881.

Duarte Leite Pereira da Silva, bacharel formado em Mathematica e Philosophia pela Universidade de Coimbra.

S. Lazaro, 118.

Manoel Rodrigues de Miranda Junior, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Cedofeita, 468.

Victorino Teixeira Laranjeira, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, tenente d'estado maior d'engenheria e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Entreparedes, 28.

Guilherme Antonio Correia, professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Martyres da Liberdade, 94.

Aarão Ferreira de Lacerda, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra.

Alegria, 913.

3. Secretaria

Secretario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, bacharel formado em Direito pela Universidade de Coimbra.

Rua das Vallas, 301.

4. Bibliotheca

Bibliothecario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, (interinamente).

5. Jardim Botanico

Guarda, primeiro official do Jardim Botanico.—*Joaquim Casimiro Barbosa*, (interinamente).

Massarellos, 43.

6. Laboratorio Chimico

Guarda-preparador do Laboratorio Chimico.—*Augus-*

to Wenceslau da Silva, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 612.

7. Gabinete de physica

Guarda-demonstrador de physica experimental.—*Vago.*

8. Empregados subalternos

Guarda-mór.—*Joaquim Filippe Coelho,* no edificio da Academia.

Guarda subalterno, servindo de ajudante de bibliothecario.—*José Baptista Mendes Moreira,* Campo Alegre, 173.

Guarda subalterno.—*Antonio Correia da Silva,* no edificio da Academia.

Guarda subalterno.—*Francisco Martins Ferreira Borges,* Ferraria, 139.

Servente do Laboratorio chimico e do gabinete de Physica.—*Domingos Gomes da Cruz,* travessa de S. Dionisio, 99.

Servente da secretaria e porteiro.—*Antonio Teixeira da Costa,* Campo Pequeno, 47.

B—Pessoal não pertencente ao quadro legal

1. Pago pela dotação do expediente e dos estabelecimentos academicos

Amanuense da secretaria.—*Eduardo Lopes,* Travessa de Liceiras, 19.

Hortelão do Jardim Botanico.—*Joaquim José Tavares*, no Jardim.

Servente do Jardim Botanico.—*Alberto Ferreira*, idem.

2. Pagos pela dotação das obras do edificio da Academia e serviço de escripturação e inspecção das mesmas obras

Amanuense da commissão das obras. —*J. Filippe Coelho*.

Guarda apontador das obras.—*Joaquim de Sousa Seabra*, rua 9 de julho, 37.

C — Lentes jubilados

Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, do conselho de Sua Magestade e bacharel formado nas faculdades de Medicina e Philosophia da Universidade de Coimbra.

Breyner, 104.

Gustavo Adolpho Gonçalves e Sousa, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, director e professor do Instituto Industrial do Porto.

Principe, 158.

Pedro de Amorim Vianna, bacharel formado na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo professor do lyceu nacional de Lisboa.

Setubal.

Adriano d'Abreu Cardoso Machado, ministro e secretario d'Estado honorario, do conselho de Sua Magestade, dou-

tor na faculdade de Direito da Universidade de Coimbra, antigo lente substituto ordinario da mesma faculdade, e reitor da Universidade de Coimbra.

II

CADEIRAS

1.ª CADEIRA

Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Luiz Ignacio Woodhouse.*

2.ª CADEIRA

Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Francisco Gomes Teixeira.*

3.ª CADEIRA

Mechanica racional; cinematica.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *Joaquim d'Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque.*

4.ª CADEIRA

Geometria descriptiva: — *1.ª parte:* — Geometria descriptiva e projectiva; grapho-estatica.—3 lições semanaes —*2.ª parte:*—Applicações de geometria descriptiva.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Duarte Leite Pereira da Silva.*

5.ª CADEIRA

Astronomia e geodesia: — *1.ª parte:* — Astronomia e geodesia. — 3 lições semanaes. — *2.ª parte:* — Topographia. — 1 lição semanal. — Vaga. Rege interinamente o lente proprietario da 1.ª cadeira.

6.ª CADEIRA

Physica: — *1.ª parte:* — Physica geral. — 3 lições semanaes. — *2.ª parte:* — Physica industrial. — 1 lição semanal. — Lente proprietario *Conde de Campo Bello.*

7.ª CADEIRA

Chimica inorganica. — *1.ª parte:* — Chimica inorganica geral. — 3 lições semanaes. — *2.ª parte:* — Chimica inorganica industrial. — 1 lição semanal. — Lente proprietario *Dr. José Diogo Arroyo.*

8.ª CADEIRA

Chimica organica e analytica: — *1.ª parte:* — Chimica organica geral e biologica. — 2 lições semanaes. — *2.ª parte:* — Chimica analytica. — 1 lição semanal. — *3.ª parte:* — Chimica organica industrial. — 1 lição semanal. — Lente proprietario *Antonio Joaquim Ferreira da Silva.*

9.ª CADEIRA

Mineralogia; paleontologia e geologia. — 3 lições semanaes. — Lente proprietario *Dr. Wenceslau de Sousa Pereira Lima.*

10.ª CADEIRA

Botanica: — *1.ª parte:* — Botanica. — 3 lições semanaes. — *2.ª parte:* — Botanica industrial. Materias primas de ori-

gem vegetal. — 1 lição semanal. — Lente proprietario *Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso.*

11.ª CADEIRA

Zoologia:—*1.ª parte:*—Zoologia.—3 lições semanaes. —*2.ª parte:*—Zoologia industrial. Materias primas de origem animal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Manoel Amandio Gonçalves.*

12.ª CADEIRA

Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções. Materiaes de construcção. Resistencia dos materiaes. Grapho-estatica applicada. Processos geraes de construcção.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Roberto Rodrigues Mendes.*

13.ª CADEIRA

Hydraulica e machinas, curso biennal.—*1.º anno:*— Hydraulica. Machinas em geral. Machinas hydraulicas.— 3 lições semanaes. —*2.º anno:*— Thermodynamica; machinas thermicas. Motores electricos. Machinas diversas. Construcção de machinas. —3 lições semanaes. — Lente proprietario *Manoel da Terra Pereira Vianna.*

14.ª CADEIRA

Construcções e vias de communicação, curso biennal. —*1.º anno:*—Edificios. Abastecimento de aguas e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.—3 lições semanaes.—*2.º anno:*—Estradas. Caminhos de ferro. Pontes.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Victorino Teixeira Laranjeira.*

15.ª CADEIRA

Montanistica e docimasia, curso biennal.—*1.º anno.*

—*1.ª parte;*—Docimasia.—1 lição semanal.—*2.ª parte:* —Metallurgia.—2 lições semanaes.—*2.º anno:*—Arte de minas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel Rodrigues de Miranda Junior.*

16.ª CADEIRA

Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.—*1.ª parte:*—Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial.—2 lições semanaes.—*2.ª parte;*—Economia de legislação e obras publicas, de minas e industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Alexandre Oliveira Lobo.*

17.ª CADEIRA

Commercio, curso biennal.—*1.º anno.*—*1.ª parte:*—Calculo commercial. Escripturação em geral e especialmente dos bancos.—2 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Contabilidade industrial.—1 lição semanal.—*2.º anno:*—Economia commercial e geographia commercial.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *José Joaquim Rodrigues de Freitas.*

18.ª CADEIRA

Desenho.—*1.ª parte:*—Desenho de figura, paizagem e ornato.—3 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Desenho de architectura e aguadas.—3 lições semanaes.—*3.ª parte:*—Desenho topographico. Desenho de machinas (esboços á vista acompanhados de cótas, para reduzir a desenho geometrico.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Francisco da Silva Cardoso.*

III

Plano dos estudos dos diversos cursos da Academia Polytechnica

(*DECRETO DE 10 DE DEZEMBRO DE 1885*)

I — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE OBRAS PUBLICAS

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
14. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
15. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	
4.° ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
16. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
5.° ANNO		
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
30. Construcções I ou II	6	.
23. Projectos de construcções	.	2
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
Exercicios práticos de topographia	.	2
Missões.		
	20	10
	30	

6.° ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
32. Construcções II ou I.	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial.	2	.
33. Projectos de construcções II ou I . . .	.	6
27. Projectos de machinas II ou I	.	6
Missões.		
	14	12
	26	

II — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE MINAS

1.° ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
2.° ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.° ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.° ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24 Hydraulica e machinas I ou II	6	.
37. Montanistica e docimasia I ou II	6	.
25. Projectos de hydraulica e machinas	.	6
38. Projectos de arte de minas	.	6
Exercicios praticos de topographia	.	2
Missões.		
	20	14
	34	

6.° ANNO	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
34 e 35. Montanistica e docimasia II ou I	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
27. Projectos de metallurgia	.	6
36. Projectos de metallurgia	.	2
36. Exercicios de docimasia	.	2
Missões.		
	14	10
	24	

III — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS INDUSTRIAES

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
3.º ANNO	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	2	.
14. Chimica organica e biologica	4	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo . .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
Chimica prática	.	2
	16	10
	26	
4.º ANNO		
6 Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
20. Zoologia geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

	Numero de horas semanaes	
5.º ANNO	Lições	Exercicios
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
13. Chimica inorganica industrial	2	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 6.º)	2	.
28. Projectos relativos a machinas e a chimica industrial	.	6
Missões.		
	18	6
	24	
6.º ANNO		
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
16. Chimica organica industrial	2	.
11. Physica industrial.	2	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 5.º)	2	.
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial	.	6
Missões.		
	16	6
	22	

IV — CURSO DE COMMERCIO

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
10. Physica geral.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
Physica prática, especialmente trabalho com o microscopio.	.	2
Chimica prática	.	2
	12	4
	16	
2.º ANNO		
43. Commercio I ou II	6	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
15. Chimica analytica.	2	.
Chimica prática	.	2
	10	2
	12	
3.º ANNO		
41 e 42. Commercio II ou I.	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial	4	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
47. Analyse chimica commercial.	.	2
	12	2
	14	

V — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DO EXERCITO

a. Para officiaes de estado maior e de engenheria militar; e para engenheria civil.

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.° ANNO

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	

4.° ANNO

	Lições	Exercicios
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

b. Para officiaes de artilheria.

1.° ANNO

	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
2.° ANNO	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.° ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva. . .	.	2
	16	8
	24	

VI — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA NAVAL

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
a. Para officiaes de marinha.		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
10. Physica geral	6	.
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
	12	4
	16	
b. Para engenheiros constructores navaes.		
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
10. Physica geral	6	.
45. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
Physica prática	.	2
	18	10
	28	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
18. Botanica geral.	6	.
46. Desenho	.	6
	12	6
	18	

VII — CURSO PREPARATORIO PARA AS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
10. Physica geral. Physica prática	6	2
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
20. Zoologia geral.	6	.
18. Botanica geral.	6	.
	30	6
	36	

VIII — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DE PHARMACIA NAS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
18. Botanica geral.	6	.
	18	4
	22	

Condições da admissão dos alumnos

Para a matricula na Academia Polytechnica do Porto é necessario a apresentação das certidões d'approvação em todas as disciplinas de 1.ª, 2.ª e 3.ª classe (secção de sciencias) do curso dos lyceus, e certidão d'approvação em desenho.

Aos alumnos, que até outubro de 1886, inclusivè, obtiveram approvação no 3.º e 4.º anno d'elementos de physica, chimica e historia natural, segundo o regimen de 1880, é dispensada a certidão d'approvação nos exames do 5.º e 6.º anno da mesma disciplina (D. D. de 29 de julho de 1886 e 17 de fevereiro de 1887.)

A matricula é requerida ao director. O requerimento deve ser feito em papel sellado, datado, assignado e documentado nos termos acima referidos, declarando-se n'elle a naturalidade (freguezia e concelho), filiação paterna, idade do requerente e os cursos ou cadeiras em que pretende matricular-se.

Os estudantes admittidos á matricula tem de apresentar no acto da assignatura da matricula a guia do pagamento da propina de 16$602 reis, feito no cofre central do districto do Porto.

Os alumnos militares, que pretendam frequentar os cursos preparatorios para a Escóla do Exercito, precisam requerer ao Ministerio da Guerra a respectiva licença.

Dias e horas das aulas e dos exercicios

1.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 3.as; das 10 ás 12 horas.
2.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.
3.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
4.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 3.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.
5.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.
6.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.
7.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.
8.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 8 ás 10 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.
9.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; da 2 ás 4 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.
10.ª Cadeira—aula, 2.as, 4as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.
11.a Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 5.as; das 12 ás 2 horas.
12.a Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
13.a Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
14.a Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
15.a Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
16.a Cadeira—1.a parte—aula, 3.as e 5.as; das 10 ás 12 horas.
—2.a parte—aula, sabbado; das 10 ás 12 horas.
17.a Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 10 ás 12 horas.
18.a Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 10 ás 12 horas.

IV

Livros que servem de texto e aconselhados para consulta nas diversas cadeiras, no anno lectivo de 1887-1888

1.a Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Introducção á theoria das funcções.

Carnoy; Curso de geometria analytica.

2.a Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Curso d'analyse infinitesimal. Porto, 1887.

Castro Freire e *Sousa Pinto*: Elementos de calculo differencial e integral—Coimbra.

3.a Cadeira—*Laurent (H.)*: Traité de mécanique rationelle, á l'usage des candidats á l'Aggregation et á la Licence, 2.me edition, 2 vol. in-8.o Paris, 1877-1878.

4.ª Cadeira—*La Gournerie (Jules de)*: Traité de géometrie descriptive, 2.me edition, in-4.°, en trois parties; 1.re partie: texte de XIX-143 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1880.—2.me partie: texte de XIX-222 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1885. 3.me partie: texte de XX-230 p. et atlas de 46 planches. Paris, 1885.

5.ª Cadeira—*Faye (H.)*: Cours d'astronomie de l'École Polytechnique, 2 vol. in-8.° Paris, 1881-1883. I. partie: Astronomie sphérique. Description des instruments. Théorie des erreurs. Géodésie et géographie mathématique. 1881. 1 vol. in-8.° de VIII-374 p.—II. partie: Astronomie solaire. Théorie de la lune. Navigation. 1883.

Habets: Topographie.

Calheiros: Apontamentos de geodesia.

6.ª Cadeira—*Jamin (J.)*: Petit traité de physique á l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. Nouveau tirage, augmenté des *Notes sur les progrès récents de la physique,* par M. E. Bouty. 1 vol. in-8.° Paris, 1882.

Ganot (A.): Traité élémentaire de physique. 19.e edition, entièrement refondue, par George Maneuvrier. 1 vol. in-8.° de 1160 p. contenant 1014 gravures intercalées dans le texte et deux planches en couleur. Paris, 1884.

7.ª e 8.ª Cadeiras—Agenda du chimiste à l'usage des ingénieurs, physiciens, chimistes, etc. Paris, librairie Hachette, ultima edição.

Berthelot (M.): Traité élémentaire de chimie inorganique, 2.me edition, avec la collaboration de Jungfleisch. 2. vol. in-8.° de XX-483 pag. e XV-489 pag. Paris, 1880.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas agricolo-florestaes. 1.ª parte: Productos fermentados. 3.ª edição. 1 vol. in-8.° de 374 p. Lisboa, 1885. 2.ª

parte: Azeites, lacticinios, cereaes, farinhas, pão e féculas. 2.ª edição. 1 vol. in-8.º de 221 pag. Lisboa, 1875. 3.ª parte: Productos saccharinos, florestaes, textis, animaes e salinos. 1 vol. in-8.º Lisboa.

Payen (A.): Précis de chimie industrielle, á l'usage: 1.º des écoles d'arts et manufactures et des arts et métiers; 2.º des écoles préparatoires aux professions industrielles; 3.º des fabricants et des agriculteurs; 6.me édition, revue et mise au courant des dernières décourvertes scientifiques, par Camille Vincent, 2 tom. in-8.º de 882 e 1:014 pag. et 1 atlas de XLIV planches. Paris, 1877-78.

Silva (A. J. Ferreira da): Tratado de chimica elementar. I. Chimica mineral. 1 vol. in-8. de XV-580 p. Porto, 1883.

Debraye: Cours élémentaire de chimie, 2 vol.

9.ª Cadeira—*Lapparent, (A. de)*: Cours de minéralogie. 1 vol. in-8.º de XII-560 pag. avec 519 gravures dans le texte et une planche chromo-lithographiée. Paris, 1884.

Gonçalves Guimarães (Dr. A. J.): Tratado elementar de mineralogia. Principios geraes. Porto, 1883. 1 vol. in-8.º de 239 pag. e atlas de XXII est.

10.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

Henriques (Julio): Terminologia botanica.

Bonnier et Layens: Nouvelle flore pour la determination facile des plantes. Paris.

11.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

12.ª Cadeira—*Flamant*: Stabilité des constructions et résistance des matériaux. 1886. (Baudry).

13.ª Cadeira—*Collignon*: Cours de mécanique, appliquée aux constructions.

14.ª Cadeira—*Durand-Claye* (*Ch. L.*) et *L. Marx*: Routes et chemins vicinaux.

Debauve: Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.

15.ª cadeira—*Balling*: Guide pour l'essai des minerals des produits métallurgiques et des combustibles. Paris 1881.

Corradi (*D. Luiz Barinaga y*): Curso de metallurgia especial.

Philipp's (*J. A.*): Elements of metallurgy.

16.ª Cadeira—*Rodrigues de Freitas* (*J. J.*): Principios de economia politica.

Codigo administrativo.

Codigo Commercial Portuguez.

17.ª Cadeira—*Léfévre*:La comptabilité.

Pereire: Tables de l'intérêt composé des annuités et des rents viagères.

Estabelecimentos da Academia

I. — Bibliotheca

1. Sobre a historia e desenvolvimento d'este estabelecimento veja-se:

Memoria historica da Academia Polytechnica do Porto, pelo conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado, no *Annuario* de 1877-1878, pag. 206, 208-210, 225 e 226.

Catalogo da Bibliotheca da Academia Polytechnica do Porto; 1.ª parte. Catalogo dos livros de Mathematica e de Philosophia natural. Porto, 1883; *Annuario* de 1878-1879, pag. 29-37; *Annuario* de 1879-1880, pag. 33 a 41; *Annuario* de 1880-1881, pag. 45-54; *Annuario* de 1881-

1882, pag. 55-82; *Annuario* de 1882-1883, pag. 167-195; *Annuario* de 1883-1884, pag. 100-116; *Annuario* de 1884-1885, pag. 48-57; *Annuario* de 1886-1887, pag. 48-60.

II. — Gabinete de historia natural

Sobre este gabinete veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 39-41, e *Annuario* 1886-1887, pag. 60.

III. — Gabinete de machinas e de physica

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* de 1884-1885, pag. 57.

IV. — Laboratorio chimico

1.—Sobre este laboratorio veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 45-59, *Annuario* de 1879-1880, pag. 47-57, *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57, *Annuario* de 1881-1882, pag. 83-97, *Annuario* de 1882-1883, pag. 143-162, *Annuario* de 1883-1884, pag. 117-203, *Annuario* de 1884-1885, pag. 58-59, *Annuario* de 1886-1887, pag. 61-65.

2.—Relatorio do director do laboratorio

Ill.^mo^ *Ex.*^mo^ *Snr.*

Tenho a honra de enviar a V. Ex.ª um succinto relatorio dos trabalhos academicos realisados no anno lectivo findo de 1886-1887, na cadeira de chimica organica e analytica, a meu cargo.

A regencia dos dous cursos fez-se com sufficiente regularidade. O programma das lições foi o que apresentei ao Conselho em Julho de 1886 e que foi approvado pelo Conselho Superior de Instrucção Publica.

No curso de chimica organica foram estudadas com o de-

vido desenvolvimento as principaes materias constantes do programma, abrangendo as generalidades, os hydrocarbonetos, os alcooes, os aldehydes e os acidos organicos. As outras partes do programma foram mais rapidamente percorridas por falta de tempo.

No curso de chimica analytica foram mais aprofundadas as duas primeiras partes do programma—preliminares e analyse mineral qualitativa, dando eu particular importancia ao estudo dos methodos geraes de separação e reconhecimento dos acidos e das bases no caso mais complexo de uma mistura de saes mineraes. As outras tres partes do programma, versando sobre analyse mineral, quantitativa, analyse dos gazes e analyses especiaes, só poderam ser mui rapidamente esboçadas.

Parece reconhecer-se que uma só lição por semana para o desenvolvimento sufficiente de todas as partes do programma de chimica analytica, é insufficiente. E comtudo ninguem desconhece os grandissimos subsidios que a analyse chimica hoje fornece para a resolução d'um grande numero de problemas que interessam as mais importantes forças vivas d'uma nação. Se a experiencia de mais este anno lectivo me mostrar a impossibilidade de dar áquelle estudo o desenvolvimento que elle merece, proporei a V. Ex.ª e ao Conselho academico as providencias que julgar mais acertadas.

Os trabalhos práticos realisados no Labóratorio pelos alumnos, que foram distribuidos em turmas, versaram sobre a preparação d'alguns corpos importantes da chimica organica. Entre estes mencionaremos, no grupo dos hydrocarbonetos, os que se referem á formena, ao chloroformio e ao iodoformio, á ethylena e chloreto e brometo de ethylena, á acetylena, á terebinthena e seus chlorhydratos, á benzina e nitrobenzina, e á naphtalina. A proposito dos alcooes foram praticadas preparações relativas ao alcool absoluto, á glycerina e mannita, á glucose, ao assucar invertido; ao phenol ordinario e ao acido picrico. Dos acidos organicos prepararamse os acidos formico, benzoico e oxalico. Foi tambem objecto d'um trabalho a formação da importante base organica, pon-

to de partida para a preparação d'essa immensidade de côres artificiaes que a industria hoje aproveita em larga escala para a impressão nos tecidos — quero fallar da anilina obtida por meio da benzina, por intermedio da nitrobenzina.

Além d'estes trabalhos e de um certo numero de demonstrações durante as lições, tambem realisei, perante o curso, a importante synthese total da acetylena, que abriu a Berthelot o caminho para a synthese dos corpos organicos, a partir dos elementos. A experiencia foi realisada em 22 de Dezembro do anno findo. tendo-me V. Ex.ª feito a honra de assistir á realisação d'ella e alguns meus collegas. É uma experiencia que não póde facilmente repetir-se, se attendermos aos meios de que é necessario lançar mão. Como se sabe, consiste ella em provocar a combinação directa do hydrogenio e do carbono por influencia do arco voltaico.

No curso de chimica analytica fiz a demonstração da principal parte dos apparelhos em uso nos laboratorios e realisei perante o curso numerosas experiencias demonstrativas. O numero de sessões de trabalho no Laboratorio não podia ser muito elevado, visto que por emquanto o Conselho apenas lhe destina um turno por semana. Alguns, mas poucos, alumnos sollicitaram de mim permissão para estudarem no Laboratorio além dos dias que lhe cabiam por turno. Dous d'esses alumnos, Annibal Augusto Trigo e Alfredo Augusto Lisboa de Lima, que foram laureados pelo Conselho, merecem louvores pela assiduidade, applicação e cuidado de que deram provas n'estes trabalhos, em que eram guiados pelo preparador do Laboratorio.

Com a dotação do Laboratorio foram compradas obras de chimica para o Laboratorio, diversos productos chimicos e reagentes, e alguns apparelhos e utensilios, entre os quaes mencionarei — o apparelho gazogenico d'Alvergniat, campanas para vacuo, grande exsiccador de Dupré, apparelho de Soxhlet para analyse do leite, reguladores de temperatura, etc. As mezas para trabalho dos alumnos foram reformadas, ficando mais commodas para o trabalho.

Deus guarde V. Ex.ª Porto, 11 de Outubro de 1887.
Ill.mo Ex.mo Snr. Director da Academia Polytechnica do Porto.

A. J. Ferreira da Silva.

V. — Jardim Botanico

1. — Sobre este jardim veja-se: *Annuario* de 1877-1878, pag. 29-30; *Annuario* de 1878-1879, pag. 51-56; *Annuario* de 1879-1880, pag. 44-45 e 230, *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57, *Annuario* de 1881-1882, pag. 99-113, *Annuario* de 1882-1883, pag. 136-142, *Annuario* de 1883-1884, pag. 203-247.

VI. — Observatorio Astronomico

Veja-se a *Memoria historica* do conselheiro Adriano Machado, já citada, *Annuario* de 1877-1878, pag. 207 e 223, *Annuario* de 1886-1887, pag. 66. Conserva-se, ainda hoje, imprestravel para observações.

VII. — Gabinete de Cinematica (Systema Reuleaux)

Sobre este gabinete veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 59, *Annuario* de 1881-1882, pag. 115-120, *Annuario* de 1884-1885, pag. 61 e 62 e *Annuario* de 1886-1887, pag. 66-67.

II

Estatistica

LISTA ALPHABETICA DOS ALUMNOS DA ACADEMIA
indicando a sua filiação, naturalidade, e as cadeiras em que se matricularam

---

1—Abel Brandão Leite Pereira Cardoso de Menezes, filho de Antonio Brandão de Andrade da Cunha e Lima, natural de S. Thomé de Covellos, concelho de Baião—6.ª cadeira (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

2—Abilio Ribeiro de Miranda, filho de Joaquim Correia de Miranda, natural de Santo Thyrso—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), e 18.ª (2.ª parte);

3—Accacio Umbelino Pereira da Silva, filho de Eduardo Augusto Pereira Barbosa, natural de Santa Eulalia, concelho de Paços de Ferreira—6.ª (1.ª parte), e 7.ª (1.ª parte);

4—Adolpho Pinto Monteiro da Cruz, filho de Antonio Alves Pinto da Cruz, natural de Rio Preto (Brazil)—6.ª (1.ª parte), e 7.ª (1.ª parte);

5—Affonso da Silveira Machado Vasconcellos Castello Branco, filho de João da Silveira Machado Castello Branco, natural de Vizeu—4.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

6—Albano Annibal de Barros, filho de Francisco Augusto de Barros, natural de Bragança—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

7—Albano Augusto d'Oliveira, filho de Delfina da Rocha Oliveira, natural de Recarei, concelho de Paredes—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

8—Albano Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

9—Alberto Alvaro d'Armada, filho de Joaquim Alvaro d'Armada, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—10.ª (1.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

10—Alberto Augusto Gomes d'Almeida, filho de José Gomes d'Almeida, natural de Castellões, concelho de Cambra—11.ª (1.ª parte);

11—Alberto Barbosa de Queiroz, filho de Antonio Barbosa de Queiroz, natural de Ancêde, concelho de Baião—1.ª e 11.ª (1.ª parte);

12—Alberto Ortigão de Miranda, filho de João Baptista de Miranda, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

13—Alberto Vieira Gomes, filho de Manoel Joaquim Gomes, natural de Braga—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

14—Alexandre Carneiro Geraldes da Silva Moreira, filho de José Carneiro Geraldes da Silva Moreira, natural do Marco de Canavezes—4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

15—Alfredo Araujo d'Almeida Campos, filho de Antonio d'Almeida Querido, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

16—Alfredo Arthur Lopes Navarro, filho de Antonio José Lopes Navarro, natural de Coimbra—1.ª;

17—Alfredo Augusto Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

18—Alfredo da Costa Rodrigues, filho de Antonio da Costa Rodrigues, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

19—Alfredo da Silva Reis, filho de João José da Silva, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

20—Alfredo Simões Ramos, filho de José Ramos de Proença Saraiva, natural do Souto da Casa, concelho de Fundão—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

21—Alfredo de Sousa Azevedo, filho de João Baptista de Sousa Azevedo, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

22—Alvaro Alves Moreira Coelho, filho de José Joaquim Moreira Coelho, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

23—Alvaro Augusto Ferreira Pipa, filho de Joaquim José da Silva Pipa, natural de Braga—7.ª, (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

24—Alvaro Aurelio de Sousa Rego, filho de José Maria Rego, natural do Porto—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª;

25—Alvaro d'Azevedo Albuquerque, filho de Joaquim de Sousa Azevedo Vieira da Silva Albuquerque, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

26—Annibal Augusto da Silva, filho de José Joaquim Fernandes da Silva, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

27—Annibal Augusto Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

28—Annibal Lopes Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

29—Antonio d'Almeida Moraes Pessanha, filho de José Pereira da Silva e Castro, natural de Passos, concelho de Sabrosa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

30—Antonio Amorim Pires Toste, filho de Joaquim Augusto Pires Toste, natural de Angra do Heroismo (Açores)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

31—Antonio Arnaldo Taveira, filho de José Januario Taveira Cardoso, natural de Sande, concelho de Lamego—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

32—Antonio Augusto d'Abreu e Silva Lapa, filho de José Antonio Pereira da Silva Lapa, natural de Lamego—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

33—Antonio Augusto da Rocha Peixoto, filho de Antonio Luiz da Rocha Peixoto, natural da Povoa de Varzim—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

34—Antonio Correia de Magalhães Ribeiro Junior, filho de Antonio Correia de Magalhães Ribeiro, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

35—Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de S. Miguel do Bairro, concelho de Castello de Paiva—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 17.ª;

36—Antonio Evaristo de Moraes Rocha, filho de João Evaristo da Rocha, natural de Chaves—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

37—Antonio Geraldo da Cunha, filho de José da Cunha Alves de Sousa, natural de Braga—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

38—Antonio Gomes Duarte, filho de José Antonio Gomes Duarte, natural de Pinheiro, concelho d'Aguiar de Sousa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

39—Antonio José de Lima, filho de José Antonio de Lima, natural de Pereiro, concelho de Barcellos—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª

40—Antonio José da Motta Campos Junior, filho de Antonio José da Motta Campos, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

41—Antonio Julio Ferreira de Barros, filho de Sabino Ferreira de Barros, natural de Murça—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

42—Antonio Lopes Baptista, filho de João Lopes Baptista, natural do Porto—2.ª, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

43—Antonio Luiz Soares Duarte, filho de Manoel Francisco Duarte, natural do Porto—4.ª (1.ª parte);

44—Antonio Manoel Botelho, filho de Francisco de Paula Botelho, natural de Belem—2.ª, 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

45—Antonio Martins Delgado, filho de João Martins Delgado, natural de Perre, concelho de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

46—Antonio Moreira Beato, filho de Joaquim Antonio Beato, natural de Souzel, districto de Portalegre—6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

47—Antonio Pedro Saraiva, filho de José Pedro Saraiva, natural de Villa Nova de Foz-Côa—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

48—Antonio Pinto d'Albuquerque Stockler, filho de Luiz d'Albuquerque do Amaral Cardoso, natural de Ceia—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

49—Antonio Pinto de Sampaio e Mello, filho de Antonio Pinto da Cunha e Sousa, natural de Arcos de Baulhe, concelho de Cabeceiras de Basto—1.ª, 7.ª (1.ª parte);

50—Antonio Rigaud Nogueira, filho de Francisco Rodrigues Nogueira, natural da Bahia (Brazil)—5.ª (2.ª parte), 9.ª, 12.ª, 13.ª (2.ª parte) e 14.ª (2.ª parte);

51—Antonio de Sousa Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria—13.ª (2.ª parte), 14.ª (2.ª parte), 15.ª e 16.ª (2.ª parte);

52—Antonio Thomaz Ferreira Cardoso, filho de Antonio Joaquim Santiago, natural d'Oliveira d'Azemeis—4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

53—Antonio Villela Areias Junior, filho de Antonio Villela Areias, natural da Povoa de Lanhoso—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

54—Antonio Xavier Gomes dos Santos, filho de Antonio Gomes dos Santos, natural de S. Miguel do Souto, concelho da Villa da Feira—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 9.ª

55—Armando da Cunha Azevedo, filho de José Marques d'Azevedo, natural de Aveiro—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

56—Armindo Augusto Girão Guimarães, filho de José Antonio Guimarães, natural de Vizeu—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

57—Arnaldo Arthur Ferreira Braga, filho de Arthur Aureliano Ferreira Braga, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

58—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira, filho de João Antonio Lourenço Gomes Ferreira, natural de Villarinho de Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—11.ª (1.ª parte);

59—Arnaldo José Claro, filho de Sebastião José Claro, natural de Villa Real—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

60—Arnaldo de Mattos Cardoso Pereira, filho de Luiz Cardoso Pereira, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

61—Arthur Augusto d'Albuquerque Seabra, filho de Armando Arthur Ferreira de Seabra da Motta e Silva, natural do Porto—4.ª (1.ª parte) e 9.ª;

62—Arthur Hygino Soares, filho de José Victorino Soares, natural d'Angra do Heroismo (Açôres)—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

63—Arthur Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—13.ª, 14.ª, 15.ª e 16.ª (2.ª parte);

64—Arthur Pinto Malheiro, filho de Manoel Pinto Malheiro, natural do Porto—1.ª, 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

65—Arthur Vieira de Castro, filho de José Antonio Vieira de Castro, natural de Santa Eulalia, concelho de Fafe—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

66—Augusto Guedes da Silva, filho de Clemente Guedes da Silva, natural de Crestuma, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

67—Augusto Maria Soares, filho de João Lourenço d'Almeida Soares, natural de Valença—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

68—Augusto de Miranda, filho de Januario de Miranda, natural de Torres Vedras—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

69—Augusto Pereira Nobre, filho de José Pereira Nobre, natural do Porto—9.ª e 11.ª (1.ª parte);

70—Bellarmino Baptista Vasconcellos, filho de Antonio Soares Moreira Vasconcellos, natural de Cepellos, concelho de Amarante—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

71—Bernardo José Borges, filho de Manoel José Borges, natural da Regoa—11.ª (1.ª parte);

72—Candido Frias Sampaio e Mello, filho de Antonio Pinto da Cunha e Sousa, natural de S. Braz do Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

73—Carlos Alberto Vianna Pedreira, filho de Joaquim Maria Pedreira, natural de Vianna—2.ª, 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

74—Carlos Augusto Afflalo Carneiro Geraldes, filho de José Carneiro Geraldes, natural do Porto—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

75—Carlos Augusto Teixeira Babo, filho de José Joaquim Teixeira Babo, natural de Figueiró, concelho d'Amarante—11.ª (1.ª parte);

76—Carlos Fernando Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—2.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

77—Carlos Henrique Coisne, filho de Pedro Francisco José Coisne, natural de Steeniverk (França)—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

78—Carlos Henrique da Silva Maia Pinto, filho de Henrique Pinto, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

79—Carlos José Gomes Brandão, filho de José Antonio Gomes Brandão, natural do Rio de Janeiro—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

80—Carlos de Sampaio Gonçalves, filho de Joaquim José Gonçalves, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

81—Casimiro Antonio d'Oliveira, filho de Francisco José d'Oliveira, natural de Mosteiró, concelho de Vieira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

82—Casimiro Jeronymo de Faria, filho de Jeronymo Domingos de Faria, natural de Galafura, concelho da Regoa—5.ª (1.ª parte) e 9.ª

83—Cesar Augusto Gonçalves da Costa Lima, filho de Francisco Gonçalves da Costa Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

84—Christovão Teixeira Machado, filho de Francisco Teixeira Machado, natural do Rio de Janeiro—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

85—Clemente Joaquim dos Santos Pinto Junior, filho de Clemente Joaquim dos Santos Pinto, natural de Carrazeda do Montenegro, concelho de Valpassos—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

86—Custodio José Ribeiro, filho de José Maria Ribeiro, natural de Christello, concelho de Valença—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

87—Custodio Martins Henriques, filho de Joaquim Martins Henriques, natural de Pecegueiro, concelho de Sever do Vouga—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

88—Diniz Fernandes Neves, filho de Antonio Thomaz das Neves, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

89—Eduardo Alfredo de Sousa, filho de João José de Sousa, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

90—Eduardo Augusto Soares de Freitas, filho de Antonio Joaquim de Freitas, natural de Villa Cova da Lixa—6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

91—Eduardo Gonçalves de Mattos, filho de José Gonçalves de Mattos, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

92—Eduardo de Moura, filho de Francisco Antonio Marques de Moura, natural d'Ilhavo—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

93—Eduardo Nunes d'Oliveira, filho de Manoel Nunes Cancella, natural de Figueiró dos Vinhos—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

94—Eduardo de Sousa Monteiro Maia, filho de Henrique Anthero de Sousa Maia, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

95—Eduardo Teixeira Leite, filho de Antonio Teixeira Leite, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—4.ª (1.ª parte), 9.ª, 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

96—Eduino Rocha, filho de Justino Augusto Rocha, natural da Horta (Ilha do Fayal)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

97—Eleuterio Adolfo Moreira da Fonseca, filho de Manoel Eleuterio Moreira da Fonseca, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

98—Elysio Leitão Vieira dos Santos, filho de Joaquim Vieira dos Santos, natural do Porto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

99—Ernesto Eugenio Alves de Sousa Junior, filho de Ernesto Eugenio Alves de Souza, natural do Porto—13.ª (2.ª parte), 14.ª (2.ª parte) e 16.ª (2.ª parte);

100—Fernando José d'Almeida, filho de Francisco José d'Almeida, natural de S. Pedro do Sul—11.ª (1.ª parte);

101—Fernando Moutinho, filho de Joaquim Ferreira Moutinho, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

102—Filippe de Sousa Carneiro Canavarro, filho de Cypriano de Sousa Carneiro Canavarro, natural da Regoa—12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno) a 16.ª (2.ª parte);

103—Flavio Augusto Marinho Paes, filho de Carlos Augusto Paes, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

104—Flavio Moreira da Fonseca, filho de Miguel Moreira da Fonseca, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

105—Flavio Norberto de Barros, filho de Manoel Antonio de Barros, natural de Valença—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

106—Fortunato d'Azevedo Varella, filho de Antonio José d'Azevedo Varella, natural de Santa Maria d'Infias, concelho de Guimarães—11.ª (1.ª parte);

107—Francisco Antonio Bayão Taquenho, filho de Francisco Joaquim Gomes Taquenho, natural de Cuba—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

108—Francisco Antonio Lopes, filho de Antonio Joaquim Lopes, natural de Azenhas, concelho de Mogadouro—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

109—Francisco Araujo de Castro Coutinho, filho de Francisco José d'Araujo, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

110—Francisco Emilio de Carvalho Pinheiro, filho de D. Emilia do Carmo d'Oliveira Carvalho, natural d'Alter do Chão—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

111—Francisco Ferreira Figueiredo Leitão, filho de José Ferreira Figueiredo Leitão, natural de Santa Eulalia de Besteiros—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

112—Francisco Forbes de Bessa, filho de Joaquim de Bessa Pinto, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

113—Francisco Ignacio Párra, filho de Simão Antonio Párra, natural d'Urros, concelho de Mogadouro—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

114—Francisco Pereira Vianna, filho de João Pereira Vianna, natural de Vianna do Castello—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

115—Francisco de Pina Vaz, filho de Jacintho de Pina Vaz, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

116—Francisco de Resende, filho de Francisco Antonio de Resende Junior, natural d'Aveiro—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

117—Frederico Leite Pereira de Mello, filho de José Leite Pereira de Mello, natural de Penafiel—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

118—Gregorio Correia Pinto Rolla, filho de Simplicio Arlindo Correia Rolla, natural da Regoa—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

119—Guilherme Maria Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

120—Guilherme Teixeira de Sousa e Silva Alcoforado, filho de Duarte Teixeira de Sousa e Silva Alcoforado, natural de Guimarães—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

121—Guilhermina de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

122—Heitor Correia da Silva Sampaio, filho de João Correia da Silva Sampaio, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

123—Henrique Carlos Rodrigues, filho de Antonio Francisco Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

124—Henrique Guedes de Vasconcellos, filho de José Vasconcellos Noronha e Menezes, natural de Lamego—1.ª, 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

125—Henrique José Martins Ferreira, filho de Antonio José Martins Ferreira, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

126—Herculano de Mattos Sarmento de Beja, filho de Antonio Augusto de Mattos Sarmento de Beja, natural de Coimbra—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

127—Horacio Dias Peixoto, filho de Joaquim Dias Peixoto, natural de S. Bartholomeu do Rego, concelho de Celorico de Basto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

128—Hugo de Noronha, filho de Tito Augusto Duarte de Noronha, natural d'Ovar—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

129—Ignacio Pinto d'Oliveira, filho de José Pinto d'Oliveira, natural de Guimarães—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

130—Illydio Fernandes Monteiro, filho de Manoel Fernandes Monteiro, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

131—Izolino Aurelio Ferreira Ennes, filho de José Augusto Ennes Junior, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

132—João Alves Pinto da Cruz, filho de João Alves da Cruz, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

133—João Augusto dos Santos Teixeira, filho de Augusto Cesar Justino Teixeira, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte);

134—João Carlos de Castro Côrte Real Machado, filho de João Carlos d'Almeida Machado, natural d'Oliveirinha, concelho d'Aveiro—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

135—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos, filho de João d'Oliveira Ramos, natural de Santa Maria de Vallega, concelho d'Ovar—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte);

136—João Dias Pereira da Graça, filho de Januario Dias Pereira da Graça, natural de Sôsa, concelho de Vagos—10.ª (1.ª parte);

137—João Fernandes da Silva Leão, filho de José Fernandes da Silva Leão, natural de Bissau (Guiné)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

138—João Gomes da Silva Osorio Junior, filho de João Gomes da Silva Osorio, natural de Lamego—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

139—João Luiz Carrilho, filho de Manoel José Carrilho, natural de Seixas, concelho de Caminha—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

140—João Machado d'Araujo, filho de Joaquim da Costa Araujo, natural de Landim, concelho de Famalicão—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

141—João Monteiro Guedes, filho de Rita Laró, natural de Moura-Morta, concelho da Regoa—8.ª, (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

142—João Pereira Vasco, filho de Manoel Pereira Vasco, natural de Olhão—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

143—João Simões Castello, filho de Antonio Simões Castello, natural de Lisboa—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

144—Joaquim Dias do Soccorro, filho de Joaquim Antonio do Soccorro, natural de Villa do Conde—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

145—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco, filho de Antonio Pereira Rodrigues Pacheco d'Almeida, natural de Sande, concelho de Lamego—13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno), 16.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

146—Joaquim José Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Penafiel—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

147—Joaquim Manoel Cabral, filho de Antonio Joaquim Cabral, natural d'Outeiro de Gatos, concelho da Mêda—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

148—Joaquim de Mattos Coutinho, filho de José de Mattos Coutinho, natural d'Alpiarça, concelho d'Almeirim—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

149—Joaquim Pinto Coelho, filho do José Pinto Coelho, natural de Mósellos, concelho da Feira—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

150—Joaquim de Sousa Brandão, filho de Francisco José de Sousa Brandão, natural de Lordello, concelho de Paredes—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

151—José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de

Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello—13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno) e 16.ª (2.ª parte);

152—José Alves Ferreira da Silva, filho de Augusto Alves Ferreira da Silva, natural de Santo Antonio da Lomba, concelho de Gondomar—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

153—José Antonio Duarte, filho de Francisco Antonio Duarte, natural das Caldas da Rainha—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

154—José Antonio Gonçalves de Lima, filho de Antonio Gonçalves de Lima, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 10.ª (2.ª parte), 11.ª (2.ª parte) e 17.ª (1.º anno);

155—José Augusto de Campos e Brito, filho de Francisco Antonio da Costa e Brito, natural de Melgaço—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

156—José Augusto Vieira da Fonseca, filho de José Augusto Vieira da Fonseca, natural de Chaves—2.ª, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

157—José Augusto Villas Boas, filho de Severino Cesar Villas Boas, natural de S. Faustino, concelho do Peso da Regoa—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

158—José Baptista Gonçalves Dias Junior, filho de José Baptista Gonçalves Dias, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

159—José Caetano de Sousa e Lacerda, filho de João Caetano de Sousa e Lacerda, natural de S. Thiago da Ribeira Secca, concelho da Calhêta (Açores)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

160—José Corrêa Pinto da Fonseca, filho de Francisco Corrêa Pinto, natural de Samodães, concelho de Lamego—8.ª (1.ª parte), 9.ª e 11.ª (1.ª parte);

161—José da Cunha Rolla, filho de José da Cunha Rolla Pereira, natural de S. Christovão de Lordello, concelho de Felgueiras—1.ª, 6.ª (1.ª parte);

162—José Dordio Rebocho Paes, filho de Antonio Paes Dordio Falcato, natural de Cano, concelho de Souzel—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

163—José Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves d'Araujo, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

164—José Gonçalves da Costa, filho de Manoel Gonçalves da Costa, natural de Balazar, concelho da Povoa de Varzim—12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 16.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

165—José Guedes Junior, filho de José Guedes de Carvalho, natural de Ervedosa, concelho da Pesqueira—11.ª (1.ª parte):

166—José Henriques de Meirelles Pinto, filho de Manoel Antonio Meirelles, natural de S. Bartholomeu, concelho de Villa Flor—7.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

167—José Lopes dos Rios, filho de José Lopes dos Rios, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

168—José Maria Rebello da Silva, filho de José Antonio Rebello da Silva, natural de Braga—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

169—José Maria Rodrigues de Faria, filho de Lino Antonio Rodrigues

de Faria, natural de S. Thiago de Lanhoso, concelho da Povoa de Lanhoso —7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

170—José Maria Rebello Valente de Carvalho, filho de João Nepomuceno Rebello Valente, natural d'Oliveira d'Azemeis—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

171—José Méndes Esteves Guimarães, filho de Antonio José Esteves Guimarães, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

172—José do Nascimento Ribeiro da Cruz, filho de José Ribeiro da Cruz, natural de Fozcôa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

173—José Pinto Pizarro da Gama Lobo, filho de Francisco Teixeira Lobo, natural de Sabroza—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

174—José Rodrigues Braga, filho de José Rodrigues Braga, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

175—José Vicente d'Araujo, filho de Antonio Vicente d'Araujo, natural de Tougues, concelho de Villa do Conde—10.ª (1.ª parte);

176—José Vicente da Silva Senna, filho de João Vicente Senna, natural d'Elvas—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

177—Julio Baptista da Cunha Braga, filho de João Baptista Braga, natural de Braga—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

178—Julio de Carvalho Baptista, filho de José Maria Lopes de Carvalho Baptista, natural de Celorico da Beira—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

179—Julio Lopes Valente da Cruz, filho de João Carlos da Cruz, natural da Guarda—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

180—Julio da Mouta Sardinha, filho d'Antonio Sardinha, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

181—Julio Nunes de Mattos, filho de Francisco Augusto Nunes de Mattos, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

182—Lucindo Martins d'Oliveira, filho de Francisco Moreira d'Oliveira, natural de S. João da Foz do Sousa, concelho de Gondomar—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

183—Luiz Couto dos Santos, filho de Miguel Couto dos Santos, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

184—Luiz de Freitas Viegas, filho de Luiz de Freitas Viegas, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

185—Luiz José de Lima, filho d'Antonio José de Lima, natural do Rio de Janeiro—8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

186—Luiz Paulo d'Aguiar, filho de Francisca Ermelinda d'Oliveira Ferraz, natural de Gourães, concelho de Sabrosa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

187—Luiz Pinto Ribeiro da Fonseca, filho de Manoel Ribeiro da Fonseca, natural de Villar do Paraiso, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

188—Luiz Xavier Barbosa da Costa, filho de João Thomaz da Costa, natural de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

189—Manoel Augusto de Queiroz e Castro, filho de Joaquim Augusto

de Queiroz, natural de S. Cosmado, concelho d'Armamar—11.ª (1.ª parte);

190—Manoel Correia d'Almeida, filho de Miguel Correia d'Almeida, natural de Villa Real—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

191—Manoel Ferreira Machado Junior, filho de Manoel Ferreira Machado, natural de Fontes, concelho de Leiria—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

192—Manoel Garrido Monteiro, filho de Manoel Garrido Baqueiro, natural de Santa Maria d'Insua, concelho de Ponte-Caldella (Galliza)—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

193—Manoel Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves d'Araujo, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

194—Manoel Luiz Mendes, filho de João Francisco Mendes, natural de Seara, concelho de Ponte de Lima—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

195—Manoel de Mello Ferrari, filho de José de Mello Ferrari, natural de Villar d'Ordem, concelho de Vizeu—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

196—Manoel Nunes d'Oliveira, filho de José Nunes d'Oliveira, natural de Sôsa, concelho de Vagos—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

197—Manoel Pinto Pimentel, filho de Joaquim Pinto Furtado, natural de Favaios, concelho d'Alijó—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

198—Manoel de Sousa Machado Junior, filho de Manoel de Sousa Machado, natural do Porto—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

199—Manoel Victorino de Bettencourt Junior, filho de Manoel Victorino de Bettencourt, natural de Santa Barbara, concelho de Villa das Vellas (Açores)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

200—Narciso da Silva Guimarães, filho d'Antonio Joaquim da Silva Guimarães, natural de S. Christovão da Matta, concelho de Villa do Conde —6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

201—Olympio Arthur d'Oliveira Dias, filho d'Antonio Augusto d'Oliveira Dias, natural de Bragança—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

202—Olympio Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—2.ª e 7.ª (1.ª parte);

203—Oscar Cibrão e Garção, filho de Francisco Luiz Garção, natural de Valença—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

204—Paulo Ferreira, filho de Luiz José Ferreira, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

205—Raul Corrêa Bettencourt Furtado, filho de José Candido de Bettencourt Furtado, natural da Horta (Ilha do Fayal)—1.ª e 18.ª (1.ª parte);

206—Raul Larose Rocha, filho de José Gonçalves Rocha, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

207—Raymundo Ferreira dos Santos, filho d'Antonio Ferreira dos Santos, natural do Porto—5.ª (2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno) e 15.ª (1.º anno);

208—Ricardo Candido Furtado d'Antas, filho de João Candido Furtado d'Antas, natural de Lisboa—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

209—Ricardo Severo da Fonseca Costa, filho de José Antonio da

Fonseca Costa, natural de Lisboa—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

210—Rita de Moraes Sarmento, filha d'Anselmo de Moraes Sarmento, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

211—Rodolpho Augusto da Silva Telles, filho d'Antonio Xavier da Silva Telles, natural de Pondá (India portugueza)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

212—Ruy da Rocha e Castro, filho d'Agostinho da Rocha e Castro, natural de S. Pedro, concelho de Villa Real—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

213—Samuel Tavares Maia, filho de Manoel Tavares d'Almeida Maia, natural de Ilhavo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

214—Sebastião Barroso Monge, filho de Pedro Monge, natural d'Aldeia Nova, concelho de Serpa—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

215—Segismundo Alves Roçadas, filho d'Anna de Jesus Ferreira, natural de Villa Real—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

216—Serafim Martins dos Santos, filho de Francisco Martins dos Santos, natural de Castello de Paiva—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

217—Theodorico Teixeira Pimentel, filho de João Rodrigues Pimentel, natural de Favaios, concelho d'Alijó—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

218—Thiago Augusto d'Almeida, filho de José Bernardino d'Almeida, natural de Gandra, concelho d'Esposende—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

219—Torquato Ernesto Leite Brochado, filho d'Affonso Augusto Cardoso Brochado, natural de S. Pedro d'Athayde, concelho d'Amarante—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

220—Vasco Ortigão de Sampaio, filho de José Joaquim d'Oliveira Sampaio, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

221—Vicente Augusto Bayão Taquenho, filho de Francisco Joaquim Gomes Taquenho, natural de Cuba—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

222—Vicente de Bessa, filho de Leonardo Joaquim de Bessa, natural de Penella, concelho de Castello de Paiva—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

223—Vicente Moreira de Carvalho, filho de Antonio Moreira de Carvalho, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

224—Victor Henriques Ayres Móra, filho de Emygdio Antonio Móra, natural do Sardoal—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

225—Victor Hugo José Teixeira Machado, filho de Antonio Anastacio Machado, natural de S. Miguel, concelho de Santa Martha de Penaguião—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

226—Virginio José Gomes Braga, filho de Manoel José Gomes Braga, natural de Vimieiro, concelho de Braga—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte).

Quadro estatistico dos alumnos matriculados em 1887-1888 distribuidos segundo a sua naturalidade

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
Aveiro	Aveiro	3	18	40
	Castello de Paiva	3		
	Ilhavo	2		
	Macieira de Cambra	1		
	Oliveira d'Azemeis	2		
	Ovar	2		
	Sever do Vonga	1		
	Vagos	2		
	Villa da Feira	2		
Beja	Cuba	2	3	
	Serpa	1		
Braga	Barcellos	1	19	
	Braga	7		
	Cabeceiras de Basto	1		
	Celorico de Basto	1		
	Espozende	1		
	Fafe	1		
	Famalicão	1		
	Guimarães	3		
	Povoa de Lanhoso	2		
	Vieira	1		

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				40
Bragança	Bragança	2	8	31
	Carrazeda d'Anciães	2		
	Mogadouro	2		
	Moncorvo	1		
	Villa-Flôr	1		
C. Branco	Fundão	1	1	
Coimbra	Coimbra	1	1	
Faro	Olhão	1	1	
Guarda	Ceia	1	5	
	Celorico da Beira	1		
	Guarda	1		
	Villa Nova de Fozcôa	2		
Leiria	Caldas da Rainha	1	4	
	Figueiró dos Vinhos	1		
	Leiria	2		
Lisboa	Belem	1	7	
	Lisboa	5		
	Torres Vedras	1		
Portalegre	Alter do Chão	1	4	
	Elvas	1		
	Souzel	2		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
	Transporte			71
Porto	Amarante	3	80	115
	Baião	2		
	Felgueiras	1		
	Gondomar	2		
	Marco de Canavezes	1		
	Paços de Ferreira	1		
	Paredes	3		
	Penafiel	2		
	Porto	57		
	Povoa de Varzim	2		
	Santo Thyrso	1		
	Villa do Conde	3		
	Villa Nova de Gaya	2		
Santarem	Almeirim	1	2	
	Sardoal	1		
V. do Castello	Caminha	1	12	
	Melgaço	1		
	Ponte do Lima	1		
	Valença	4		
	Vianna do Castello	5		
Villa Real	Alijó	2	21	
	Chaves	3		
	Murça	1		
	Regoa	6		
	Sabroza	3		
	Santa Martha de Penaguião	1		
	Valpassos	1		
	Villa Real	4		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos por conc.	por dist.	Total
	Transporte			186
Vizeu	Armamar	1	18	
	Lamego	11		
	S. João da Pesqueira	1		
	S. Pedro do Sul	1		
	Vizeu	4		
	ILHAS ADJACENTES			
Angra	Angra do Heroismo	2	3	
	Villa das Vellas	1		
Funchal	Calheta	1	1	
Horta	Horta	2	2	
	POSSESSÕES ULTRAMARINAS			40
E. G. da India	Pondá	1	1	
Cabo Verde	Bissau	1	1	
	PAIZES ESTRANGEIROS			
Brazil	Bahia	1	12	
	Rio de Janeiro	10		
	Rio Preto	1		
França	Steenwerk	1	1	
Hespanha	Ponte Caldella (Galliza)	1	1	
	Total			226

Quadro do exercicio dos cursos no anno lectivo de 1886 a 1887

DESIGNAÇÃO DOS CURSOS	ABERTURA DO CURSO	ENCERRAMENTO DO CURSO	N.º total das lições e exercicios	Duração das lições	N.º de horas semanaes de cada curso
1.ª—Geometria analytica no plano e no espaço; trigonometria espherica; algebra superior	25 d'outubro de 1886	16 de junho de 1887	74	2	6
2.ª—Calculo differencial e integral	21 » »	16 » »	84	2	6
3.ª—Mecanica racional; Cinematica	21 » »	18 » »	84	2	6
4.ª—Geometria descriptiva	21 » »	14 » »	85	2	6
5.ª—Astronomia e geodesia	25 » »	15 » »	63	2	6
6.ª—Physica	22 » »	15 » »	70	2	6
7.ª—Chimica inorganica	21 » »	31 de maio »	68	2	6
8.ª—Chimica organica e analytica	22 » »	16 de junho »	89	2	6
9.ª—Mineralogia e geologia	21 » »	16 » »	76	2	6
10.ª—Botanica	22 » »	16 » »	66	2	6
11.ª—Zoologia	22 » »	31 de maio »	60	2	6
12.ª—Resistencia de materiaes	22 » »	15 de junho »	65	2	6
13.ª—Hydraulica e machinas	21 » »	16 » »	79	2	6
14.ª—Construcções	22 » »	15 » »	69	2	6
15.ª—Montanistica e docimasia	21 » »	11 » »	72	2	6
16.ª—Economia politica, etc.	22 » »	15 » »	52	2	6
17.ª—Commercio	21 » »	20 » »	80	2	6
18.ª—Desenho	21 » »	30 » »	75	2	6

Alumnos premiados e distinctos no anno lectivo de 1886 a 1887, proclamados em sessão solemne de 17 d'outubro de 1887

1.ª Cadeira

Distincção — Gregorio Correia Pinto Rolha.
» — Guilherme Maria Rodrigues Bello.

2.ª Cadeira

Accessit — Abel Fontoura da Costa.
» — Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
Distincção — Annibal Augusto Trigo.

3.ª Cadeira

1.º accessit — João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
2.º » — Casimiro Jeronymo de Faria.
» » — Manoel de Souza Machado Junior.

4.ª Cadeira

Accessit — Antonio José de Lima.

6.ª Cadeira

Premio honorifico — Arthur Pinto Malheiro.
Accessit — Antonio José da Motta Campos Junior.
» — José Alves Ferreira da Silva.
— Antonio Joaquim Judice Cabral.
Distincto — Francisco Forbes de Bessa.
— Carlos Henrique Coisne.
— Arthur Hygino Soares.
— Manoel Gonçalves d'Araujo.
— José Maria Rebello Valente de Carvalho.

7.ª Cadeira

Premio honorifico—Arthur Pinto Malheiro.
1.° accessit—Antonio Joaquim Judice Cabral.
—Antonio José da Motta Campos Junior.
—José Alves Ferreira da Silva.
2.° accessit—Alberto Vieira Gomes.
—Annibal Bettencourt.
Distincção—Custodio Martins Henriques.

8.ª Cadeira (1.ª e 2.ª parte)

1.° Premio honorifico—Arthur Pinto Malheiro.
2.° » » —Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
1.° accessit—Annibal Bettencourt.
—Antonio Augusto da Costa Soares.
—Antonio Joaquim Judice Cabral.
—Antonio José da Motta Campos Junior.
—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira.
—João Delfim de Mattos Rivára.
2.° accessit—Alexandre Martins Pamplona Ramos.
Distincção—Alfredo da Costa Rodrigues.
—Eduardo de Barros.
—João Alves Martins.
—Manoel Augusto Dias Milheiro.

8.ª Cadeira (2.ª parte)

1.° accessit—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
—Annibal Augusto Trigo.
2.° » —João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
Distincção—Ricardo Severo da Fonseca Costa.

10.ª Cadeira

Accessit—Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.

11.ª Cadeira

1.º *accessit*—Antonio Augusto Pereira Cardoso.
2.º » —Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
Distincção—Humberto Pinto da Costa Araujo.

12.ª Cadeira

Accessit—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

13.ª Cadeira

Accessit—José Alves Bonifacio.
Distincção—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

14.ª Cadeira

Distincção—José Alves Bonifacio.
» —Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

18.ª Cadeira (1.ª parte)

Distincção—Hugo de Noronha.

18.ª Cadeira (2.ª parte)

Premio honorifico—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
» » —Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
Accessit—Fernando de Souza Magalhães.
Distincção—Carlos José Gomes Brandão.
» —Annibal Augusto Trigo.
» —Carlos Henrique Coisne.
» —Manoel Gonçalves d'Araujo.

18.ª Cadeira (3.ª parte)

Accessit—Antonio Duarte Pereira da Silva.

Classificação dos alumnos que terminaram o 3.º anno do curso d'engenharia no anno lectivo de 1885-1886

2.ª CLASSE

Casimiro Augusto Lobo Ramalho.
Alfredo Djalme Martins d'Azevedo.

3.ª CLASSE

1.º—Alberto Pimenta Castel-Branco.
2.º—Antonio Rigaud Nogueira.

no anno lectivo de 1886-1887

1.ª CLASSE

1.º—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
1.º—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.
2.º—Manoel de Souza Machado Junior.

2.ª CLASSE

1.º—Casimiro Jeronymo de Faria.
2.º—Antonio José de Lima.
3.º—Alfredo Baptista Coelho.
4.º—Ricardo Severo da Fonseca Porto.

3.ª CLASSE

1.º—Antonio Ferreira da Silva Barros.
2.º—Alfredo Ernesto Dias Branco.
3.º—Alvaro Aurelio de Souza Rego.
3.º—Antonio Duarte Pereira da Silva.
4.º—Fernando de Souza Magalhães.

Designação dos alumnos que tiraram carta de capacidade de cursos da Academia no anno lectivo de 1886 a 1887

Nomes e designação do curso	Data em que foi conferida a carta de curso
Commerciantes	
José Bento Rodrigues Pereira........	22 de janeiro de 1887.
Minas	
William Macdonald Smith............	21 de julho de 1887.

Mappa estatistico do movimento dos alumnos da Academia no anno lectivo de 1886 a 1887

CADEIRAS	Alumnos matriculados por cadeiras		Approvados		Reprovados	Não examinados	Alumnos distinctos com			Total dos distinctos
	ordinarios	voluntarios	n. d.	simp.			premio honorifico	accessit.	m. honrosa	
1.ª—Algebra superior, etc.	8	34	13	16	2	9			2	2
2.ª—Calculo differencial, etc.	1	22	8	1	4	10		2	1	3
3.ª—Mecanica; Cinematica		22	7	5	2	8		3		3
4.ª—Geometria descriptiva		34	9	6	1	18		1		1
5.ª—Astronomia, geodesia e topographia	2	14	13	2		1				
6.ª—Physica	33	72	59	13	23	10	1	3	6	10
7.ª—Chimica inorganica	39	49	35	10	12	31	1	5	1	7
8.ª—Chimica organica e analytica	42	99	51	4	9	77	2	9	5	16
9.ª—Mineralogia e geologia	1	10	4	1	1	5				
10.ª—Botanica	25	64	25	14	20	30		1		1
11.ª—Zoologia	24	35	23	3	3	30		2	1	3
12.ª—Resistencia de materiaes	2	4	3	1		2		1		1
13.ª—Hydraulica e machinas	2	5	4	3				1	1	2
14.ª—Construcções	3	3	5	1	1				2	2
15.ª—Montanistica e docimasia	2	3	4	1						
16.ª—Economia politica, etc.	1	13	9			5				
17.ª—Commercio		2	1							
18.ª—Desenho	11	75	51	1			2	2	5	9

III

Legislação

Decreto de 14 d'agosto de 1885 sobre a collocação de 2 lentes na propriedade de 2 cadeiras da Academia Polytechnica

MINISTERIO DO REINO

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Dr. José Diogo Arroyo, lente proprietario da cadeira de zoologia da Academia Polytechnica do Porto, collocado na cadeira de chimica inorganica da mesma Academia.

Manuel Amandio Gonçalves, lente substituto da Academia Polytechnica do Porto, promovido á propriedade da cadeira de zoologia.

Secretaria d'estado dos Negocios do Reino, em 19 de agosto de 1885.—*Antonio Maria de Amorim.*

(*Diario do Governo* n.º 184, de 20 d'agosto de 1885.)

Decreto de 23 de setembro de 1885 sobre a collocação de varios lentes da Academia Polytechnica

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Por decreto de 23 de setembro ultimo, em virtude da carta de lei de 21 de julho de 1885, collocados: nas cadei-

ras da Academia Polytechnica do Porto, os respectivos lentes proprietarios, pela fórma seguinte :

Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso — na 10.ª cadeira (Botanica); Francisco da Silva Cardoso — na 18.ª cadeira (Desenho); Conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado — na 16.ª cadeira (Economia politica, estatistica, principios de direito publico, administrativo e commercial, legislação); José Joaquim Rodrigues de Freitas, na 17.ª cadeira (Commercio); Dr. Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão — na 6.ª cadeira (Physica); Joaquim de Azevedo Souza Vieira da Silva Albuquerque — na 3.ª cadeira (Mecanica racional, cinematica); Antonio Joaquim Ferreira da Silva — na 8.ª cadeira (Chimica organica e analytica); Manoel da Terra Pereira Vianna — na 13.ª cadeira (Hydraulica, machinas); Dr. Wenceslau de Souza Pereira Lima — na 9.ª cadeira (Mineralogia, paleontologia e geologia); Dr. Francisco Gomes Teixeira — na 2.ª cadeira (Calculo differencial e integral, calculo das differenças e das variações); Roberto Rodrigues Mendes — na 12.ª cadeira (Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções); Luiz Ignacio Woodhouse — na 1.ª cadeira (Geometria analytica, algebra superior, trigonometria espherica).

Secretaria d'estado dos Negocios do Reino, em 10 de novembro de 1885. — *Antonio Maria de Amorim.*

(*Diario do Governo* n.º 255, de 11 de novembro de 1885.)

DECRETO N.º 1

Aposentação dos empregados civis

Artigo 1.º É garantida a aposentação, conforme as prescripções d'este decreto, aos empregados e funccionarios civis ou magistrados, pagos pelos cofres do estado que, por effeito da legislação em vigor, têem direito de ser jubilados ou aposentados.

§ unico. Igualmente é concedido o direito de aposentação aos empregados que, não o gosando actualmente, contem menos de quarenta e cinco annos de idade e se sujeitem ao pagamento da quota por idades, fixada na tabella annexa a este decreto, que faz parte d'elle e que baixa assignada pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da fazenda.

Art. 2.º A aposentação dos empregados civis póde ser ordinaria ou extraordinaria.

Art. 3.º São condições indispensaveis para obter a aposentação ordinaria:

1.º Ter completado sessenta annos de idade e trinta de serviço effectivo;

2.º Absoluta impossibilidade, physica ou moral, de continuar no desempenho do cargo;

3.º Contribuição, durante dez annos ao menos, com a quota legal para a caixa das aposentações.

§ 1.º Na contagem do tempo de serviço não são attendidos os dias de suspensão, de faltas não justificadas, nem de licença por mais de trinta dias em cada anno.

§ 2.º A impossibilidade physica ou moral é verificada pelo exame de tres facultativos nomeados pelo governo e parecer fundamentado do chefe da repartição ou serviço a que pertença o empregado a aposentar.

§ 3.º A disposição do n.º 3.º d'este artigo não é applicavel aos actuaes empregados que, ao tempo da publicação d'este decreto, tiverem completado cincoenta annos de idade.

Art. 4.º A aposentação extraordinaria é concedida:

1.º Ao empregado que, contando quarenta annos de idade e quinze de serviço, se impossibilite de continuar na actividade por motivo de doença não contrahida, ou accidente não occorrido no exercicio das suas funcções;

2.º Ao empregado de qualquer idade que, tendo dez annos de serviço, se impossibilite de continuar na actividade em rasão de molestia contrahida no exercicio das suas funcções e por causa d'elle;

3.º Ao empregado que, independentemente de qualquer outra condição, se torne inhabil para o serviço por desastre que resulte do exercicio das suas funcções; por ferimento ou mutilação em combate ou lucta no desempenho do cargo; por molestia adquirida na pratica de algum acto humanitario ou de dedicação á causa publica.

§ 1.º Ás causas de impossibilidade previstas n'este artigo são applicaveis as disposições do § 2.º do artigo 3.º

§ 2.º Cessando a impossibilidade, e verificado que seja esse facto pelo modo indicado no paragrapho antecedente, o empregado será restituido á actividade do serviço no mesmo logar que servia, ou n'outro equivalente e na primeira vacatura que se der.

Art. 5.º Perde o direito á aposentação o empregado que for demittido ou exonerado; porém, sendo readmittido, contar-se-lhe-ha o tempo de serviço anterior.

Art. 6.º Para o effeito das aposentações só póde contar-se cumulativamente o tempo de serviço em cargos ou empregos que dêem direito á aposentação ou jubilação.

Art. 7.º No caso de aposentação ordinaria a pensão do aposentado é igual ao vencimento do ultimo cargo exercido

durante ao menos cinco annos, mas nunca superio
tia de 1:200$000 réis. Este limite será reduzid
1:000$000 para os empregados nomeados depois c
cação da lei de 15 de julho de 1885.

§ 1.º O limite de cinco annos é reduzido a doi:
empregados que tenham actualmente pelo meno:
annos do serviço.

§ 2.º No caso de um empregado ter sido tra
por conveniencia do serviço, e não como castigo,
gar de vencimento menor dentro da mesma categ(
gulará o vencimento do logar mais rendoso exe
menos durante cinco annos.

Art. 8.º Nas aposentações extraordinarias as
são:

1.º De metade do vencimento nos casos dos n
2.º do artigo 4.º com o augmento de 3 ¹/₈ por cent(
meiro caso e de 2 ¹/₂ por cento no segundo, por :
serviço a mais do minimo ali designado, até trinta

2.º Na hypothese do n.º 3.º do artigo 4.º a pen:
igual ao vencimento da actividade.

§ unico. A disposição do artigo 7.º é applicavel
dos os casos previstos n'este artigo.

Art. 9.º Para os effeitos dos artigos 7.º e 8.º d'e
creto só se considera o ordenado ou o vencimento p
com exclusão de gratificações, supplementos de ord
emolumentos, ajudas de custo, augmento por diutu
de serviço, ou outras retribuições accessorias de q
natureza.

§ 1.º A disposição d'este artigo não é applicavel
gmento do terço de ordenado concedido aos juizes
fessores por diuturnidade de serviço, nem ás part
emolumentos concedidas nas aposentações de empr
das alfandegas.

§ 2.º Igualmente não se applica o disposto n'este

aos funccionarios ou magistrados a quem seja imposto por lei um limite de idade para aposentação.

Art. 10.° A aposentação póde ser concedida, ou a requerimento do interessado, ou por determinação do governo independentemente de solicitação d'aquelle.

§ 1.° Quando a aposentação provenha de determinação do governo e o empregado com ella não se conforme, é-lhe permittido recorrer do parecer da junta medica estabelecida pelo artigo 3.° § 2.° para uma nova junta, composta de dois facultativos nomeados pelo governo, dois escolhidos pelo interessado entre os lentes da escola medico-cirurgica de Lisboa e o director do serviço ou repartição a que o aposentado pertença, presidindo o ultimo que dará aos outros membros da junta todos os precisos esclarecimentos. Se esta nova junta confirmar o parecer da primeira, serão pagos pelo interessado os honorarios dos facultativos que a compozerem.

§ 2.° Em qualquer hypothese o decreto da aposentação conterá as causas e condições d'esta, bem como a pensão concedida, e não sortirá effeito de pagamento da pensão, emquanto o processo não tiver recebido *visto* pelo qual o tribunal de contas reconheça a legalidade da aposentação e o seu cabimento dentro do fundo disponivel de que trata o n.° 2.° do artigo 17.°

§ 3.° Emquanto o *visto* não for concedido, não póde ser provido o logar exercido pelo pensionista.

§ 4.° O governo dará todos os annos ás côrtes conta circumstanciada das aposentações que tiver decretado.

Art. 11.° O empregado aposentado perde a respectiva pensão quando seja condemnado em alguma das penas maiores estabelecidas na lei penal, ou ainda em pena correccional por crime de furto, abuso de confiança, burla, receptação de cousa furtada ou roubada, falsidade, attenta-

do contra o pudor ou qualquer outro que importe perda dos direitos politicos.

Art. 12.º As pensões de aposentação só pódem ser penhoradas nos mesmos casos e proporções que os vencimentos da actividade.

Art. 13.º A pensão de aposentação não póde ser accumulada com qualquer outro vencimento pago pelos cofres do estado, quando da accumulação resulte quantia superior ou igual á que o empregado perceberia, se continuasse no serviço activo.

Art. 14.º Todos os empregados civis nomeados depois da data d'este decreto, ou que por effeito de reorganisação ou reforma legal dos serviços ou repartições recebam melhoria de vencimentos depois da mesma data, bem como os que depois da mesma data forem promovidos ou augmentados em vencimento por diuturnidade de serviço, são obrigados a contribuir para a caixa de aposentações com a quota de 5 por cento, deduzida para os primeiros e segundos de todos os seus vencimentos, fixos ou eventuaes, de qualquer natureza que sejam, excepto abonos para despeza de jornada, para renda das casas das repartições ou para despezas d'estas, e para os terceiros deduzidos de qualquer excesso de vencimentos proveniente da promoção ou augmento.

§ 1.º A importancia das quotas pagas por empregados que se impossibilitem antes de terem adquirido direito á aposentação extraordinaria será restituida aos interessados sem vencimento de juros.

§ 2.º Os empregados a que se referem os artigos 2.º e 3.º da lei de 15 de julho de 1885 continuarão pagando a quota n'ella fixada até que se verifiquem as circumstancias previstas n'este artigo. O producto anterior e futuro das mesmas quotas faz parte do capital da caixa de aposentações.

Art. 15.º O pagamento das quotas de que trata o artigo

precedente, é feito por desconto nas folhas ou recibos dos vencimentos de qualquer natureza, e a sua importancia será entregue mensalmente na caixa de aposentações.

Art. 16.° Junto do monte pio official é creada uma caixa de aposentações para os empregados civis, a qual fica sujeita á inspecção e fiscalisação do governo, exercida pelo ministerio da fazenda.

§ unico. Á caixa de aposentações incumbe arrecadar e capitalisar os seus rendimentos, e pagar as pensões dos interessados que apresentem os seus titulos visados pelo tribunal de contas.

Art. 17.° Os fundos da caixa de aposentação dividem-se:

1.° Em fundo permanente e indefinido formado pela capitalisação de 10 por cento do fundo disponivel, pelos saldos d'esse mesmo fundo e por quaesquer quantias provenientes das multas, de que trata o artigo 20.°

2.° Em fundo disponivel resultando: *a)* do subsidio annual que as côrtes fixarem; *b)* das quotas dos empregados; *c)* do rendimento do fundo permanente, tudo liquido dos 10 por cento de que trata o numero precedente.

Art. 18.° Os fundos da caixa de aposentações, á proporção que possam ser capitalisados, serão convertidos em titulos de divida publica consolidada.

Art. 19.° O dinheiro pertencente á caixa de aposentações será depositado na caixa geral dos depositos, e ali vencerá o juro concedido aos depositos voluntarios. A direcção não poderá ter em cofre quantia superior a 500$000 réis.

Art. 20.° Constituem receita da caixa de aposentações:

1.° Os descontos dos vencimentos dos empregados por motivo de licenças, faltas não justificadas, ou suspensão;

2.° As multas impostas aos empregados por faltas ou abusos no exercicio das suas funcções;

3.° Quaesquer donativos ou legados á mesma caixa.

Art. 21.º A administração da caixa de aposentações é confiada a uma assembléa geral e a uma direcção, composta de presidente que será o mesmo do monte pio official, tres vogaes, um thesoureiro e dois secretarios.

Art. 22.º Os vogaes da direcção, os secretarios e o thesoureiro são eleitos annualmente pela assembléa geral, devendo a eleição caír sempre em dois membros da direcção cessante, sem que nenhum seja obrigado a servir por mais de tres annos consecutivos.

Metade pelo menos da direcção será composta de empregados cujo vencimento não seja inferior a 500$000 réis, pertencendo sempre o thesoureiro a essa metade.

Art. 23.º Todos os cargos da direcção são gratuitos e obrigatorios, não podendo ser escolhidos para ella senão empregados residentes em Lisboa.

Art. 24.º Os membros da direcção são solidariamente responsaveis pelos prejuizos que causarem á caixa por actos de negligencia, omissão ou culpa.

Art. 25.º Haverá uma commissão revisora composta de tres membros, eleita annualmente pela assembléa geral, á qual competirá:

1.º Examinar o relatorio, livros e gerencia da direcção;

2.º Enviar ao governo e apresentar em assembléa o seu parecer ácerca dos actos administrativos da direcção e ácerca do estado da caixa.

Art. 26.º A' assembléa geral da caixa de aposentações podem pertencer todos os empregados civis do estado, que tenham direito á aposentação e que paguem pelo menos 12$000 réis de quota annual. A essa assembléa geral competem as mesmas faculdades e attribuições, que pertencem á do monte pio official.

Art. 27.º O governo proporá todos os annos ás côrtes o subsidio que ha de ser concedido á caixa de aposentações. Emquanto as côrtes não resolvam será n'este anno

economico o subsidio igual aos juros da quantia de réis 1.177:850$000 nominaes de inscripções averbadas a favor da caixa nacional de aposentações, que serão entregues á caixa de aposentações com o devido pertence.

Art. 28.º As aposentações e jubilações concedidas até a data do presente decreto continuam a ser pagas pelo thesouro, conforme a legislação em vigor.

Art. 29.º As disposições dos artigos 7.º e 8.º d'esta lei não são applicaveis aos empregados de qualquer natureza ou categoria, que, tendo direito a ser aposentados ou jubilados, nos termos da legislação em vigor, houverem completado quinze annos de serviço, uma vez que n'elles se verifiquem na occasião da aposentação as condições estabelecidas nos n.os 1.º e 2.º do artigo 3.º

Art. 30.º Não são applicaveis as disposições d'este decreto aos operarios e quaesquer outros servidores do estado, cujo vencimento tenha o caracter de salario ou jornal.

Art. 31.º Podem ser admittidos na caixa de aposentações os empregados das juntas geraes dos districtos, e camaras municipaes, verificadas as seguintes condições:

1.ª Acceitarem essas corporações todos os preceitos do presente decreto ácerca de aposentações ordinarias ou extraordinarias;

2.ª Obrigarem-se a pagar mensalmente á caixa de aposentações e por conta de cada um dos seus actuaes empregados com direito a aposentação ou aos quaes queiram conferil-a, bem como pelos que nomearem com mais de trinta annos de idade, as quotas, de que tracta o § unico do artigo 1.º;

3.ª Obrigarem-se a pagar pelos empregados de futuro nomeados as quotas de que trata o artigo 14.º, quando tenham menos de trinta annos de idade.

4.ª Obrigarem-se a conceder á caixa de aposentações, quando seja necessario, uma subvenção proporcional á do

estado sendo a proporcionalidade relativa ao numero de empregados.

§ unico. São auctorisadas as juntas geraes e as camaras que pretendam aproveitar-se das disposições d'este artigo, a modificarem as disposições vigentes ácerca da aposentação dos empregados.

Art. 32.° Os lucros da caixa geral dos depositos ainda não convertidos em inscripções averbadas a favor da caixa nacional de aposentações e os que de futuro aquella obtiver, salvo a parte de que trata o decreto n.° 2 d'esta data, constituem receita do estado applicavel á amortisação da divida publica, conforme estava preceituado antes da lei de 15 de julho de 1885 sobre aposentações.

Art. 33.° A junta do credito publico entregará á administração da caixa de aposentações o capital existente em seu poder e pertencente á caixa nacional de aposentações, com excepção do que seja proveniente de subvenções das juntas geraes dos districtos ou das camaras municipaes, o qual será restituido ás corporações interessadas com os juros vencidos a rasão de 5 por cento ao anno.

Art. 34.° O governo decretará os estatutos da caixa de aposentações, fará os regulamentos necessarios para a execução d'este decreto, e dará conta ás côrtes das disposições d'elle que careçam de sancção legislativa.

Art. 35.° Ficam revogadas todas as disposições em contrario.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino; e os ministros e secretarios d'estado de todas as outras repartições, assim o tenham entendido e façam executar. Paço, 17 de julho de 1886.—REI.—*José Luciano de Castro—Francisco Antonio da Veiga Beirão—Marianno Cyrillo de Carvalho—Visconde de S. Januario—Henrique de Macedo—Henrique de Barros Gomes—Emygdio Julio Navarro.*

DECRETO N.º 2

Reforma dos empregados e operarios não comprehendidos no decreto d'esta data, ácerca das aposentações dos empregados civis

Art. 1.º E' concedido o direito de reforma aos empregados menores de todos os ministerios, serviços, repartições e estabelecimentos d'elles dependentes, aos dos tribunaes superiores de justiça, de contas e de administração, que não gosem actualmente por lei ou regulamento o direito de aposentação, bem como aos operarios de todos os estabelecimentos fabris do estado, ou dos serviços d'elles dependentes que tenham caracter de permanencia, e que ou ao presente ou na data futura da sua admissão contem menos de quarenta e cinco annos de idade, e queiram sujeitar-se ao pagamento das quotas por idades, constantes da tabella annexa a este decreto, que faz parte d'elle, e baixa assignada pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da fazenda.

§ unico. Nas mesmas condições d'este artigo e seguintes é concedido o direito de reforma, desde que entrem nos quadros legaes, aos empregados e operarios de futuro admittidos nos estabelecimentos fabris da direcção geral de artilheria e do arsenal de marinha, ou aos que ainda actualmente se encontrem em situação, cujo tempo de serviço não se conte para reforma, quando uns e outros não contem mais de quarenta e cinco annos de idade.

Art. 2.º A reforma dos empregados e operarios, de que trata este decreto, póde ser ordinaria ou extraordinaria.

Art. 3.º São condições essenciaes para obter a reforma ordinaria:

1.ª Sessenta annos de idade e quarenta de serviço ou trabalho effectivo;

2.ª Absoluta impossibilidade physica ou moral de continuar na actividade;

3.ª Contribuição durante dez annos, ao menos, com a quota legal para a caixa de reformas creada por este decreto.

§ 1.° Na contagem do tempo de serviço ou trabalho não são attendidos os dias de suspensão, de faltas não justificadas, nem de licença por mais de trinta dias em cada anno.

§ 2.° A impossibilidade physica ou moral é verificada pelo exame de dois facultativos nomeados pelo governo, e informação fundamentada do director ou chefe do serviço ou officina, a que pertença o empregado ou operario a reformar.

Art. 4.° A reforma extraordinaria é concedida:

1.° Ao empregado ou operario que, contando quarenta e cinco annos de idade e vinte de serviço ou trabalho, se impossibilite de continuar na actividade por motivo de doença não contrahida ou de accidente não occorrido no serviço ou trabalho;

2.° Ao que, tendo qualquer idade e dez annos de serviço ou trabalho, se impossibilite de continuar na actividade em rasão de molestia contrahida no exercicio das suas funcções ou trabalho, e por effeito d'aquellas ou d'este;

3.° Ao que, independentemente de qualquer outra condição, se impossibilite por desastre que resulte do exercicio das suas funcções ou trabalho, por ferimento ou mutilação em combate ou lucta no desempenho do cargo ou trabalho, por molestia adquirida na pratica de algum acto humanitario ou de dedicação á causa publica.

§ 1.° A's causas de impossibilidade, previstas n'este artigo, são applicaveis as disposições do § 2.° do artigo 3.°

§ 2.º Cessando a impossibilidade, e verificado que seja esse facto pelo modo indicado no paragrapho antecedente, o empregado ou operario será restituido á actividade do serviço na mesma posição em que servia antes da reforma, ou n'outra equivalente e na primeira vacatura que se der.

Art. 5.º Perde o direito á reforma o empregado ou operario demittido ou despedido; porém, sendo outra vez readmittido, contar-se-ha o tempo do serviço anterior.

Art. 6.º No caso de reforma ordinaria a pensão do reformado é igual aos dois terços do vencimento ou salario do ultimo logar exercido durante ao menos cinco annos, mas nunca superior a 600 reis diarios.

§ unico. Quando o vencimento na actividade seja só por dias uteis, tambem será assim a pensão de reforma.

Art. 7.º Nas reformas extraordinarias as pensões são:

1.º De um terço do vencimento ou salario, nos casos dos n.os 1.º e 2.º do artigo 4.º com o augmento de 2 ½ por cento no primeiro, e de 1 ⅔ por cento no segundo caso, por anno de serviço ou trabalho a mais do minimo ali designado e até quarenta annos;

2.º No caso do n.º 3.º do artigo 4.º, a pensão será igual a dois terços do vencimento da actividade.

§ unico. A disposição ultima do artigo 6.º é applicavel em todos os casos previstos n'este artigo.

Art. 8.º Para os effeitos dos dois artigos antecedentes só se considera o vencimento ou salario principal com exclusão de gratificações, supplementos, ajudas de custo, augmentos por diuturnidade de serviço ou outras retribuições accessorias de qualquer natureza.

Art. 9.º A reforma póde ser concedida a pedido do interessado ou por determinação do governo, independentemente de solicitação d'aquelle.

§ 1.º Em qualquer hypothese o despacho de reforma conterá as causas e condições d'esta, bem como a designa-

ção da pensão concedida, e não surtirá effeito de pagamento da pensão, emquanto não tiver obtido o *visto* do tribunal de contas, reconhecendo a legalidade da reforma, e o seu cabimento dentro do fundo disponivel da caixa de reformas.

§ 2.° Emquanto o *visto* não for concedido não póde ser provido o logar exercido pelo pensionista.

§ 3.° O governo dará todos os annos conta ás côrtes das reformas que tiver concedido.

Art. 10.° Os empregados e os operarios reformados perdem as respectivas pensões de reforma nos mesmos casos em que os outros empregados do estado perdem as de aposentação.

Art. 11.° As pensões de reforma só podem ser penhoradas nos mesmos casos que os vencimentos ou salarios da actividade.

Art. 12.° A pensão de reforma não póde ser accumulada com qualquer outra retribuição paga pelos cofres do estado, quando da accumulação resulta quantia igual ou superior ao vencimento ou salario da actividade.

Art. 13.° A importancia das quotas pagas pelos empregados ou operarios que se impossibilitem antes de completos dez annos de serviço, e que não estejam nos casos do n.° 3.° do artigo 4.°, bem como a dos que forem exonerados ou despedidos por conveniencia do serviço, independente do procedimento dos interessados, serão restituidas aos interessados ou suas familias com o vencimento do juro accumulado de 3 por cento ao anno.

Art. 14.° A cobrança das quotas é feita por desconto na folha ou recibos dos vencimentos de qualquer especie, e a sua importancia será entregue mensalmente na caixa de reformas.

§ unico. Quando os operarios sejam remunerados por meio de tarefas ou empreitadas as quotas recairão sobre os lu-

cros d'esses contractos, que não poderão nunca ser reputados inferiores ao salario normal.

Art. 15.º A administração da caixa de reformas é confiada á direcção da caixa economica portugueza, nos termos da lei de 15 de julho de 1885.

Art. 16.º Os fundos da caixa de reformas dividem-se:

1.º Em fundo permanente e indefinido formado pela capitalisação de 10 por cento do fundo disponivel, pelos saldos d'esse fundo, e por qualquer quantia proveniente de multas ou descontos pagos pelos empregados e operarios de que trata este decreto.

2.º Em fundo disponivel resultante:

a) Do subsidio annual que as côrtes fixarem: *b)* Das quotas dos interessados; *c)* Do rendimento do fundo permanente, tudo liquido dos 10 por cento destinados ao fundo permanente.

Art. 17.º Os fundos da caixa de reformas, á medida que forem capitalisados, serão convertidos em titulos de divida publica perpetua averbados á caixa de reformas.

Art. 18.º O dinheiro pertencente á caixa de reformas será depositado na caixa geral de depositos, e ali vencerá o juro concedido aos depositos voluntarios. A administração da caixa de reformas só conservará em cofre a quantia absolutamente indispensavel para os pagamentos correntes.

Art. 19.º Constituem receita da caixa de reforma além do subsidio e quotas;

1.º Os descontos de vencimentos ou salarios, ou de multas por motivo de licença e de faltas não justificadas;

2.º Quaesquer donativos ou legados.

Art. 20.º O governo proporá annualmente ás côrtes o subsidio que ha de ser concedido á caixa de reformas. Para o anno corrente o subsidio consistirá nos juros que produzirem os titulos de divida publica em que forem convertidos os lucros liquidos da caixa geral de depositos no anno

economico de 1885-1886, ainda não applicados em titulos averbados a favor da caixa nacional de aposentações.

Art. 21.° As reformas já concedidas em virtude dos artigos 244.° a 249.° do regulamento do arsenal da marinha, ou pelo effeito da disposição da lei de 3 de julho de 1878 continuarão a ser pagos pelo thesouro publico.

Art. 22.° É garantida a reforma a que tenham direito os actuaes empregados menores e os operarios dos estabelecimentos fabris da direcção geral de artilheria e do arsenal da marinha, nos precisos termos da legislação em vigor.

Art. 23.° O governo fará os regulamentos necessarios para a plena execução do presente decreto, e dará conta ás côrtes da disposição d'elle que careçam de sancção legislativa.

Art. 24.° Ficam revogadas as disposições em contrario.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, e os ministros e secretarios d'estado das outras repartições, assim o tenham entendido e façam executar. Paço, 17 de julho de 1886.— REI.—*José Luciano de Castro*—*Francisco Antonio da Veiga Beirão*—*Marianno Cyrillo de Carvalho*—*Visconde de S. Januario*—*Henrique de Macedo*—*Henrique de Barros Gomes*—*Emygdio Julio Navarro.*

Tabella das quotas por idades a que se refere o decreto n.° 1 sobre aposentações

Idades	Percentagem
Até 25 annos	5 por cento
De 25 a 30 annos	6 »
De 30 a 35 annos	7 »
De 35 a 40 annos	8 »
De 40 a 45 annos	10 »

Paço, em 17 de julho de 1886.—*Marianno Cyrillo de Carvalho.*

Tabella das quotas por idades a que se refere o decreto n.° 2 sobre reformas

Idades	Percentagem
Até 25 annos	5 por cento
De 25 a 30 annos	6 »
De 30 a 35 annos	7 »
De 35 a 40 annos	8 »
De 40 a 45 annos	9 »

Paço, em 17 de julho de 1886.—*Marianno Cyrillo de Carvalho.*

Diario do Governo n.° 163 de 23 de julho de 1886.

Decreto de 23 d'agosto de 1886, regulamentando o Decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886

Direcção geral da contabilidade publica

REPARTIÇÃO CENTRAL

Sendo urgente regular a execução do decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho de 1886, na parte em que estabelece as receitas proprias da caixa de aposentação, provenientes das quotas dos empregados e funccionarios com direito á mesma aposentação ou jubilação, ao tempo da promulgação do citado decreto, de fórma que essas receitas se tornem effectivas; e bem assim estabelecer o modo pratico de realisar o recurso estabelecido no § 1.º do artigo 10.º, e emquanto não estiver definitivamente constituida a administração da dita caixa: hei por bem, em nome de El-Rei, em conformidade do disposto no artigo 34.º do citado decreto, determinar o seguinte:

Artigo 1.º Os empregados e funccionarios civis de qualquer ordem e natureza, que, nos termos da legislação vigente ao tempo da promulgação da carta de lei de 15 de julho de 1885 e do decreto n.º 1 com força de lei de 17 de julho de 1886 tinham direito á aposentação ou jubilação sem exercicio, e que são desde já obrigados a pagar quota para a caixa de aposentação, contribuirão nos termos seguintes:

1.º Com a quota de 4 por cento dos seus vencimentos nos termos do artigo 7.º do regulamento de 23 de dezembro de 1885, todos os empregados nomeados depois de 4 de janeiro de 1886 que tiverem satisfeito ás prescripções do artigo 8.º do mesmo regulamento e que não se acharem comprehendidos na disposição do n.º 3.º d'este artigo, porque, n'esse caso, a deducção será de 5 por cento e nos termos do mesmo numero;

2.° Com a quota de 4 por cento, só do acrescimo do vencimento, nos termos do numero anterior, os funccionarios de que trata o artigo 9.° do citado regulamento de 23 de dezembro de 1885, que igualmente não estiverem comprehendidos nas disposições do n.° 3.° d'este artigo, porque n'esse caso a deducção será tambem de 5 por cento e nos termos do mesmo numero;

3.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos fixos ou eventuaes, de qualquer natureza que sejam, excepto abonos para despezas de jornada, para renda das casas das repartições ou para despezas d'estas, todos os empregados civis nomeados depois do dia 31 de julho ultimo ou que por effeito de reorganisação ou reforma legal dos serviços ou repartições recebam melhoria de vencimentos, depois da mesma data;

4.° Com a quota de 5 por cento do augmento de vencimento, nos termos do numero antecedente, que tiverem os empregados transferidos, promovidos ou augmentados em vencimento por diuturnidade de serviço;

5.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos os escrivães de fazenda que, á data da publicação do decreto com força de lei de 23 de julho de 1886, tivessem cinco annos de exercicio, para gosarem do beneficio na pensão de aposentação concedida pelo artigo 20.° do mesmo decreto;

6.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos os empregados nomeados depois de 4 de janeiro de 1886, que não fizerám a declaração de que trata o artigo 8.° do já citado regulamento de 23 de dezembro de 1885.

§ 1.° Os empregados que nos termos dos n.°s 1.° e 2.° d'este artigo já eram obrigados a contribuir com 4 por cento de todos ou de parte dos seus vencimentos para a caixa de aposentação, pagarão se não estiverem compre-

hendidos nas disposições do n.° 3.°, pelo augmento de vencimento que tiveram ou tiverem depois do 1.° de julho de 1886, 5 por cento, mas continuarão tambem a contribuir com 4 por cento, deduzidos da somma correspondente aos vencimentos anteriores, e nos termos dos n.os 1.° e 2.° d'este artigo.

§ 2.° Será sempre applicada a deducção de 5 por cento dos vencimentos totaes, nos casos do n.° 3.° d'este artigo, seja qual fôr a data em que os empregados tenham sido nomeados.

Artigo 2.° Pelas differentes repartições da direcção geral da contabilidade publica, nos diversos ministerios, serão expedidas immediatamente as ordens necessarias para que o pagamento das quotas devidas, a começar do mez de agosto corrente, seja feito por desconto nas folhas ou recibos de vencimentos dos respectivos funccionarios a datar d'este mesmo mez.

Artigo 3.° Aos magistrados, tanto judiciaes como do ministerio publico de qualquer graduação, que devam pagar quota para a caixa de aposentação, nos termos d'este decreto, serão os descontos feitos em relação aos vencimentos pagos directamente pelo estado e mencionados no orçamento, visto que só por esses vencimentos é fixada a pensão das aposentações.

Artigo 4.° Aos empregados do serviço interno das alfandegas a deducção, nos termos do artigo anterior, será feita em relação aos vencimentos pagos pelo estado e emolumentos que lhe forem distribuidos; constituindo essa deducção total receita da caixa de aposentação.

§ 1.° A pensão da aposentação d'estes empregados, comprehendendo ordenado e emolumentos, será paga pela caixa, ficando, porém, entendido que o cofre dos emolumentos aduaneiros entregará ao da caixa de aposentação, da qual constituirá receita disponivel, a parte dos emolu-

mentos que competirem aos individuos que forem aposentados a datar de 31 de julho de 1886, e bem assim o desconto mensal que se fizer nos emolumentos dos empregados, nos termos d'este decreto, a datar da sua execução.

§ 2.° A parte dos emolumentos, complementar da pensão de aposentação, será calculada nos termos dos artigos applicaveis do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho ultimo, proporcionalmente ao que estabelecem o capitulo 5.° e a tabella n.° 9 do decreto n.° 3 de 17 de setembro de 1885, de fórma que essa parte nunca exceda a 50 por cento dos emolumentos, que respectivamente receberem os empregados em effectividade de serviço, do modo seguinte:

1.° No caso de aposentação ordinaria a percentagem sobre os emolumentos será de 50 por cento;

2.° No caso de aposentação extraordinaria essa percentagem:

a) na hypothese do n.° 1.° do artigo 4.° do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho ultimo será de 15 por cento, com o augmento de 2 $^1/_3$ por cento por anno de serviço, além de quinze até trinta annos;

b) na hypothese do n.° 2 do mesmo artigo 4.° será de 40 por cento com o augmento de $^1/_2$ por cento por anno de serviço além de dez a trinta annos; e

c) na hypothese do n.° 3 do mesmo artigo 4.° será de 15 por cento até cinco annos de serviço e mais 1 $^2/_5$ por cento por anno de serviço até trinta annos.

Artigo 5.° A importancia da quota a descontar será fixada pelo chefe do serviço ou da repartição, escola ou estabelecimento onde o empregado ou funccionario servir, em vista das instrucções expedidas, nos termos d'este decreto, pela respectiva repartição da direcção geral da contabilidade publica.

§ 1.° No caso em que o funccionario se não conforme

com o desconto por entender que a lei lhe não é correctamente applicada, póde recorrer para o ministro da fazenda, por intermedio de um conselho especial, composto do director geral da contabilidade publica e dos dois chefes de repartição da mesma direcção ou de qualquer outra das do ministerio da fazenda, escolhidos pelo ministro, conselho que informará sobre a reclamação, devendo remetter depois todo o processo ao conselheiro procurador geral da corôa e fazenda, para que, em vista do parecer d'este magistrado sobre a questão, o ministro resolva como fôr de justiça.

§ 2.° O recurso de que trata o § 1.° não tem effeito suspensivo do desconto: este far-se-ha até que o ministro resolva. Modificando o ministro a importancia do desconto restituir-se-ha ao empregado o que a mais lhe houver sido descontado, ou encontrar-se-ha no pagamento das quotas futuras.

Artigo 6.° Para os effeitos do artigo 1.°, a epocha das nomeações dos empregados, mesmo para as que dependem de confirmação posterior, conta-se da data em que os funccionarios começaram ou começarem a servir, ainda só com nomeação legal provisoria. As quotas que porventura hajam pago, ou tenham de pagar, para a caixa de aposentação, ser-lhe-hão restituidas, se os empregados não forem confirmados no exercicio de seus empregos.

Artigo 7.° O processo da aposentação dos magistrados judiciaes será regulado pelas disposições applicaveis da legislação em vigor, devendo o conselheiro do supremo tribunal de justiça, a quem fôr distribuido o processo respectivo, providenciar, nos termos que julgar convenientes, que pela direcção geral da contabilidade publica se mande proceder ao exame medico de que trata o artigo 4.° do decreto de 26 de julho ultimo em execução do § 2.° do artigo 3.° do citado decreto com força de lei n.° 1 de 17 do mesmo mez.

Artigo 8.º A importancia das quotas pagas pelos empregados e das demais deducções feitas nos respectivos vencimentos, que pertencem á caixa de aposentação, será escripturada nas contas publicas em separado, para ser entregue opportunamente á administração da mesma caixa.

§ 1.º Fica, porém, entendido que o producto d'essas quotas ou deducções não poderá ser applicado a vencimentos de aposentação, nos termos do decreto de 26 de julho de 1886, senão na parte que restar depois de deduzidos: 3:533$554 réis, correspondente a 10 por cento do juro do fundo da caixa nacional de aposentações de que trata o artigo 27.º do decreto com força de lei n.º 1 de 17 do mesmo mez, e ainda 10 por cento da totalidade das mesmas quotas ou deducções—afim de ficar intacto o fundo permanente da caixa de aposentação estabelecido pelo citado decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886.

§ 2.º Quando a parte do fundo disponivel da caixa de aposentação não chegar para o pagamento de novas aposentações, em processo, terão preferencia, mediante despacho do ministro da fazenda, pela seguinte ordem, no cabimento da somma disponivel:

1.º A pensão de qualquer aposentando com mais tempo de serviço effectivo;

2.º A pensão menor entre as que couberem a aposentandos com mais tempo de serviço;

3.º Em igualdade de importancia de pensões a relativa a individuo de maior idade; e

4.º Em igualdade de idades dos aposentandos, a pensão cujo processo, depois da aposentação decretada, primeiro tiver sido enviada á direcção geral da contabilidade publica.

§ 3.º Para compensar a despeza do thesouro com aposentações depois da publicação do decreto de 26 de julho ultimo, a junta do credito publico entregará no ministerio

da fazenda, os juros das inscripções de que trata o artigo 27.º do citado decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho ultimo, afim de que, opportunamente, pela direcção geral da contabilidade publica, se entregue á caixa das aposentações o saldo que houver, acompanhado das contas especiaes mandadas coordenar pelo referido decreto de 26 de julho de 1886.

Artigo 9.º Quando a aposentação de qualquer empregado provenha de determinação do governo, a direcção geral da contabilidade dará copia ao interessado, se tiver o exercicio do seu emprego em Lisboa, em vinte e quatro horas, do auto da conferencia medica, de que trata o artigo 4.º do decreto de 29 de julho ultimo, cobrando recibo da entrega.

§ 1.º Se o empregado ou funccionario se não conformar com o parecer da conferencia medica poderá, dentro em tres dias improrogaveis, usar do recurso que estabelece o mesmo artigo, declarando-o em requerimento feito ao Rei pela referida direcção geral da contabilidade publica, e indicando quaes são os facultativos, lentes da escola medico-cirurgica de Lisboa, que escolhe para comporem a nova junta medica.

§ 2.º Apresentado o requerimento, a direcção geral submetterá o recurso immediatamente ao ministro para este indicar os dois facultativos, que por parte do governo devem fazer parte da referida nova junta medica.

§ 3.º Feita esta nomeação a direcção geral, no dia util immediato, ou no mesmo, podendo ser, convocará a nova junta para se reunir sob a presidencia do director dos serviços ou da repartição a que o aposentado pertença, afim de examinar de novo o mesmo aposentado. O presidente d'esta nova junta, quando se tratar da aposentação de magistrado judicial, será o conselheiro do supremo tribunal de justiça a quem o respectivo processo tiver sido distri-

buido, e reunir-se-ha a mesma junta na hora e local que por esse presidente forem indicados.

§ 4.º O termo lavrado por esta junta será enviado á direcção geral da contabilidade, para os effeitos do artigo 4.º do decreto citado de 26 de julho ultimo.

§ 5.º Se o aposentando, em tres dias improrogaveis, não declarar que recorre do parecer da primeira junta medica, apresentando o respectivo requerimento, entender-se-ha que se conforma com a aposentação.

§ 6.º O aposentando poderá exigir que se lhe passe recibo da apresentação do requerimento de recurso, indicando o dia e hora em que o apresentou.

Artigo 10.º Para os effeitos do artigo 4.º do decreto de 26 de julho ultimo, quando o empregado a aposentar não tenha o exercicio do seu emprego em Lisboa, a junta medica a que se refere o § 2.º do artigo 3.º do decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho ultimo, poderá ser nomeada pelo respectivo governador civil do districto, por ordem do ministro da fazenda.

N'este caso, e quando a aposentação não tenha sido requerida pelo aposentando, o governador civil fará praticar todos os actos marcados nos §§ 1.º a 4.º do artigo antecedente, nos prasos marcados nos mesmos paragraphos, exactamente como o deveria fazer o director geral da contabilidade publica.

Artigo 11.º Os honorarios dos facultativos que compozerem as juntas de recurso, de que tratam os artigos 9.º e 10.º, d'este decreto, quando esta se conforme com o parecer da primeira, serão pagos pelo interessado; no caso que este os não satisfaça, ser-lhe-hão integralmente descontados no primeiro vencimento que o thesouro ou a caixa das aposentações houver de lhe fazer.

O conselheiro d'estado, presidente do conselho de mi-

nistros, e os ministros e secretarios d'estado de todas as repartições, assim o tenham entendido e façam executar.

Paço, aos 23 de agosto de 1886. — PRINCIPE REGENTE. —*José Luciano de Castro—Francisco Antonio da Veiga Beirão—Marianno Cyrillo de Carvalho—Visconde de S. Januario—Henrique de Barros Gomes—Emygdio Julio Navarro.*

Determinando o decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho ultimo que creou a caixa geral de aposentação, que a administração d'ella seja confiada á respectiva assembléa geral e a uma direcção eleita pela mesma assembléa;

Considerando que nos termos do artigo 26.º do mesmo decreto podem pertencer á assembléa geral todos os empregados civis do estado, que paguem pelo menos 12$000 réis de quota annual, e sendo certo que igual direito compete a todos os funccionarios civis que, sem pagamento de quota, têem a aposentação garantida por força das disposições do mesmo decreto;

Considerando assim que a aposentação se acha assegurada a todos os empregados que a ella tinham direito na epocha da promulgação do citado decreto, mesmo os nomeados depois de 4 de janeiro de 1886, que houvessem satisfeito ás prescripções do regulamento de 23 de dezembro anterior;

Considerando que é urgente estabelecer a administração da caixa de aposentação, fazendo installar os respectivos corpos gerentes, para que tenha plena execução o mesmo decreto de 17 de julho ultimo: hei por bem, em nome de El-Rei, determinar o seguinte:

Artigo 1.º E' convocada para o dia 30 de setembro do corrente anno a assembléa geral da caixa de aposentação, a qual se reunirá em Lisboa, na sala do monte pio official.

Artigo 2.º Podem fazer parte da assembléa geral da caixa de aposentação:

1.º Os funccionarios a quem o decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho de 1886 manteve o direito de aposentação e que a ella tinham jus nos termos da legislação vigente n'essa data; comtanto que paguem ou devessem pagar, nos termos geraes do mesmo decreto, pelo menos 12$000 annuaes de quotas para a dita caixa de aposentação;

2.º Todos os funccionarios comprehendidos na disposição do § unico do artigo 1.º do citado decreto, que declararem sujeitar-se á disposição do mesmo paragrapho, e que paguem pelo menos a mesma quota annual de 12$000 rs.

Art. 3.º Os funccionarios, nos termos do artigo antecedente, que pretenderem fazer parte da assembléa geral, apresentarão em qualquer dos dias, que decorrerem desde 1 até 20 de setembro, á direcção geral da contabilidade publica no ministerio da fazenda, o pedido para fazerem parte da assembléa, demonstrando o direito que têem para esse pedido. Reconhecido o direito, a direcção geral da contabilidade publica entregará ao reclamante uma senha com o nome e categoria do funccionario, senha que dará direito a este, de fazer parte da assembléa geral da caixa de aposentação.

§ unico. As duvidas que a direcção geral da contabilidade publica tenha na concessão de qualquer senha de entrada na assembléa geral serão resolvidas pelo ministro da fazenda até 25 do mesmo mez.

Art. 4.º A assembléa geral compor-se-ha dos funccionarios munidos das senhas de admissão, que tiverem sido expedidas pela direcção geral da contabilidade publica. Esta terá enviado antecipadamente ao presidente da direcção do monte pio official, que servirá de presidente da assembléa preparatoria da caixa de aposentação, uma relação dos funccionarios aos quaes tiver entregue a senha de

admissão. Por essa relação será feita a chamada dos funccionarios com direito a fazer parte da assembléa.

Art. 5.º Reunidos os funccionarios de que trata o artigo antecedente, pelo menos em numero de cincoenta, e sob a presidencia provisoria do presidente da direcção do monte pio official, este nomeará dois secretarios interinos e fará proceder ao escrutinio para a eleição da mesa, nos termos dos artigos 21.º e 22.º do decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho de 1886. Corrido o escrutinio e eleitos um presidente, um vice-presidente, dois secretarios e dois vice-secretarios, o presidente interino dará posse aos nomeados, cessando as funcções da mesa provisoria.

Art. 6.º Em seguimento, a assembléa fará a eleição do thesoureiro e secretario da direcção, nos termos dos artigos 22.º e 23.º do mesmo decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886.

Art. 7.º A assembléa geral nomeará tambem uma commissão especial para redigir e submetter á approvação do governo o projecto dos estatutos por que a caixa de aposentação se ha de reger, podendo fazer parte d'essa commissão especial os membros da mesa da assembléa geral e da direcção.

Art. 8.º Pelo ministerio dos negocios da fazenda serão dadas as providencias necessarias para a execução d'este decreto.

O conselheiro d'estado, presidente do conselho de ministros, e os ministros e secretarios d'estado de todas as repartições assim o tenham entendido e façam executar. Paço, aos 23 de agosto de 1886.—PRINCIPE REGENTE.—*José Luciano de Castro—Francisco Antonio da Veiga Beirão—Marianno Cyrillo de Carvalho—Visconde de S. Januario—Henrique de Barros Gomes—Emygdio Julio Navarro.*

(Diario do Governo n.º 192 de 26 d'agosto de 1886).

Carta de lei de 1 de setembro de 1887 regulando o vencimento d'exercicio aos professores d'instrucção superior

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

DOM LUIZ, por graça de Deus, Rei de Portugal e dos Algarves, etc. Fazemos saber a todos os nossos subditos, que as côrtes geraes decretaram e nós queremos a lei seguinte:

Artigo 1.º Os vencimentos dos lentes cathedraticos e professores proprietarios dos estabelecimentos de instrucção superior dependentes do ministerio do reino constam de duas partes, uma permanente ou de categoria e outra eventual ou de exercicio. Constitue o vencimento permanente ou de categoria o ordenado fixo, que se acha estabelecido pela legislação actual para os lentes e professores de cada um dos indicados estabelecimentos. O vencimento eventual ou de exercicio consiste n'uma gratificação mensal de 43$000 réis.

§ 1.º O vencimento eventual ou de exercicio é pago unica e exclusivamente aos lentes e professores que exercem o effectivo serviço de actos, exames e regencia de cadeira na faculdade, escola ou instituto a que pertencem. Nenhum outro serviço publico de qualquer natureza dá direito a este vencimento para cuja contagem as faltas dos professores não podem ser abonados por motivo algum, nem ainda por doença.

§ 2.º Os lentes e professores que accumularem com o seu serviço a regencia de uma ou mais cadeiras da mesma faculdade ou escola, recebem, durante os dias que servirem, a parte do vencimento de exercicio que deixar de ser abonado ao professor substituido, alem da gratificação

de effectividade que lhes competir nos termos do paragrapho antecedente.

§ 3.º Quando para occorrer á interrupção do ensino seja chamada pessoa idonea de fóra da escola ou estabelecimento, nos termos da legislação em vigor, será abonado a essa pessoa o vencimento de exercicio durante o tempo que servir.

Art. 2.º Os lentes e professores substitutos de instrucção superior em serviço effectivo de actos, exames e regencia de cadeira, recebem desde o primeiro dia de exercicio o respectivo ordenado fixo de substituto e o vencimento do exercicio pelo tempo que servem, na conformidade do disposto n'esta lei.

§ unico. No caso de accumulação de regencia de duas ou mais cadeiras é applicavel aos lentes e professores substitutos a disposição do § 2.º do artigo antecedente.

Art. 3.º O vencimento de exercicio é de 43$000 réis por mez completo de effectivo serviço. As fracções do mez contam-se proporcionalmente aos dias de serviço, não se incluindo n'essa contagem as férias do Natal e Paschoa, ou quaesquer outros feriados superiores e cinco dias consecutivos.

Art. 4.º Para os lentes substitutos ou auxiliares que dirigem salas de estudo ou trabalhos práticos o vencimento de exercicio é de 25$000 réis por mez de serviço effectivo, não podendo accumular-se com o da regencia de cadeira, nem as salas de estudo ou trabalhos práticos prolongar-se mais tempo que a regencia da cadeira.

Art. 5.º Os lentes que sirvam em duas ou mais escolas só por uma d'ellas poderão receber o vencimento de exercicio, creado por esta lei, além dos vencimentos de qualquer natureza a que já hoje tenham direito.

Art. 6.º Os lentes proprietarios e substitutos de ensino superior, que no tempo lectivo estiverem ausentes das ter-

ras em que devem exercer o magisterio, não recebem o ordenado de categoria, salvo justificando a ausencia, com licença ou impedimento legal.

§ 1.º Só é legal a licença concedida pelo chefe do estabelecimento respectivo até trinta dias, durante o anno lectivo, e pelo governo seja qual fôr o praso.

§ 2.º Só é legal o impedimento do lente ausente, quando desempenha alguma commissão inherente ao seu cargo por virtude de lei ou exerce funcções legislativas.

§ 3.º A licença por mais de seis mezes, ainda que por motivo de molestia, faz perder o direito ao ordenado de categoria. A licença por mais de dous mezes importa o desconto de um terço do ordenado de categoria.

§ 4.º A licença póde em qualquer d'estas hypotheses ser prorogada pelo governo sem prejuizo do ordenado de categoria, precedendo exame de facultativos nomeados pelo governo.

Art. 7.º Os lentes e substitutos de ensino superior que acceitarem do poder executivo logares de commissão incompativeis com o serviço do magisterio, e que não sejam considerados por lei como de exercicio effectivo no professorado, deixam vagas as suas cadeiras ou substituições; mas se forem exonerados da commissão, vão tomar no magisterio o logar que por antiguidade lhes pertenceria se n'elle houvessem persistido, com o ordenado correspondente, logo que as vacaturas do quadro permittam abonar-lh'o.

§ 1.º Aos lentes e substitutos que forem providos em logares de commissão, que preferirem o magisterio, é concedido o praso de tres mezes para o declararem ao governo, sob pena de se entender que optam pela commissão.

§ 2.º O governo fica auctorisado para declarar no decreto de nomeação, ou ainda depois, antes do provimento da vacatura, que o nomeado é isento das disposições d'este

artigo e seu § 1.° por um espaço de tempo não excedente a tres annos.

Art. 8.° Para occorrer ás despezas creadas pela presente lei, cobrar-se-hão nos diversos estabelecimentos de instrucção superior, dependentes do ministerio do reino, mais 36 por cento sobre os direitos de matriculas e cartas, designados na tabella approvada por decreto de 26 de junho de 1880, e na carta de lei de 21 de julho de 1885, artigo 1.°, § 2.°

§ unico. Se a receita proveniente d'este addicional não chegar para as despezas creadas por esta lei, será a differença supprida pelas quantias que sobrarem dos differentes capitulos de instrucção publica descriptos no orçamento geral do estado.

Art. 9.° Ao vencimento de exercicio concedido n'esta lei é applicavel quanto aos lentes e professores nomeados antes do decreto n.° 1 de 17 de julho de 1886, o que dispõe a ultima parte do artigo 14.° d'este decreto, relativamente ao excesso de vencimentos proveniente de promoção ou diuturnidade de serviço.

Art. 10.° Fica revogada a legislação contraria a esta.

Mandâmos portanto a todas as auctoridades, a quem o conhecimento e execução da referida lei pertencer, que a cumpram e a façam cumprir e guardar tão inteiramente como n'ella se contém.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, a faça imprimir, publicar e correr. Dada no paço da Ajuda, em 1 de setembro de 1887.—EL-REI, com rubrica e guarda.—*José Luciano de Castro.*—(Logar do sêllo grande das armas reaes.)

Carta de lei pela qual Vossa Magestade, tendo sanccionado o decreto das côrtes geraes de 6 de agosto ultimo,

que estabelece o vencimento de exercicio para os lentes e professores proprietarios dos estabelecimentos de instrucção superior dependentes do ministerio do reino; regula o modo e condições em que deve ser abonado o alludido vencimento, tanto em relação áquelles lentes e professores como aos substitutos e auxiliares que tiverem regencia de cadeiras; e fixa algumas regras relativas a licenças e logares de commissões; manda cumprir e guardar o referido decreto como n'elle se contém, pela fórma retro declarada.

Para Vossa Magestade ver. — *Antonio Germano Ferreira e Silva* a fez.

(*Diario do Governo*, n.º 201, de 9 de setembro de 1887).

Decreto de 17 de fevereiro de 1887 modificando o decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Tomando em consideração as representações de alguns estabelecimentos de instrucção superior sobre a necessidade de se modificar em varias disposições o decreto de 22 de agosto de 1865, que regula os concursos aos logares do magisterio superior, dependentes do ministerio do reino; e

Conformando-me com as propostas do conselho superior de instrucção publica ácerca do assumpto, e depois de ouvir a secção permanente do mesmo conselho:

Hei por bem ordenar o seguinte:

I. O numero V do artigo 8.º, § 1.º do decreto de 22 de agosto de 1865 é substituido pela fórma seguinte:

«V. Diploma de um curso completo de instrucção superior obtido nas faculdades de mathematica ou de philosophia da universidade de Coimbra, na escola polytechnica de Lisboa ou na academia polytechnica do Porto; ou diploma de um curso das academias de bellas artes; ou diploma do ensino do 2.º grau, ou de algum dos cursos especiaes, dos institutos industriaes, em que se comprehenda a frequencia e exame de desenho, para a admissão ao concurso das cadeiras de desenho na universidade, na escola polytechnica e na academia polytechnica.»

II. A disposição do artigo 12.º, sob a epigraphe «Faculdade de mathematica», é substituida d'este modo:

«1.ª Lição: algebra superior, calculo differencial e integral, geometria analytica, mechanica racional e physica mathematica.»

«2.ª Lição: astronomia, geodesia e mechanica celeste.»

III. A disposição do mesmo artigo 12.º, sob a epigraphe «Escola polytechnica», e com referencia ás lições do concurso para as cadeiras de mineralogia e geologia, e de montanistica, docimasia e metallurgia, é substituida d'esta fórma:

«Para a cadeira de mineralogia e geologia: uma em mineralogia e outra em geologia.»

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, assim o tenha entendido e faça executar. Paço da Ajuda, em 17 de fevereiro de 1887.—REI.—*José Luciano de Castro.*

(Diario do Governo, n.º 45, de 28 de fevereiro de 1887).

Decreto de 5 de janeiro de 1888, ampliando o n.º 4.º, § 1.º do art. 8.º do decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865

Tomando em consideração as razões expostas pelo Conselho Superior de instrucção publica no seu relatorio geral de 15 d'outubro de 1887, sobre a necessidade de se ampliar o disposto no n.º 4.º, § 1.º do artigo 8.º do decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865, por modo que os alumnos habilitados na Academia Polytechnica do Porto não sejam inhibidos de concorrer aos logares do magisterio, na secção de philosophia da mesma Academia: Hei por bem decretar o seguinte:

Artigo 1.º São admittidos ao concurso para provimento dos logares do magisterio na secção de philosophia da Academia Polytechnica do Porto os candidatos que apresentarem documentos por onde provem ter sido approvados nos actos das seguintes cadeiras da referida Academia:

1.ª Geometria analytica, algebra superior e trigonometria espherica;

2.ª Calculo differencial e integral;

3.ª Mechanica;

6.ª Physica;

7.ª Chimica inorganica;

8.ª Chimica organica e analyse chimica;

9.ª Mineralogia e geologia;

10.ª Botanica;

11.ª Zoologia.

Os candidatos deverão tambem apresentar certidão de approvação nas lições de ornato e paizagem professadas na cadeira de desenho, e certidão dos actos de quaesquer outras cadeiras physico-chimicas ou naturaes, que de futuro alli venham a crear-se.

Art. 2.° Fica por este modo ampliado o n.° 4.°, § 1.° do artigo 8.° do decreto regulamentar de 22 de agosto de 1865.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, o tenha assim entendido e faça executar. Paço d'Ajuda, em 5 de janeiro de 1888.—REI.—*José Luciano de Castro.*

(*Diario do Governo* n.° 7 de 10 de janeiro de 1888).

A proposta a que se refere este decreto foi feita no Conselho Superior de Instrucção Publica na sua sessão de outubro de 1887 pelo delegado da Academia Polytechnica, Dr. José Diogo Arroyo.

Programmas

PROGRAMMAS

I Cadeira — **Algebra superior e geometria analytica**

Lente. *L. I. Woodhouse.* Seis horas semanaes

ALGEBRA

I

1. *Determinantes.* — Noções preliminares. Disposição par, disposição impar. Permutação de dous elementos. Permutação circular. Definição do determinante. Notação. Ordem do determinante. Termo principal. Propriedades geraes dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento dos determinantes, regra de Sarrus. Calculo dos determinantes. Resolução das equações do primeiro grau a muitas incognitas. Producto de dous determinantes.

2. *Generalisação da noção de quantidade.* — Propriedades combinatorias das operações de arithmetica. Numeros irracionaes. Introducção da ideia de direcção no symbolo representativo da grandeza. Quantidades geometricas. Módulo, argumento. Definição das operações geometricas. Verificação das propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Quantidades imaginarias. Interpretação geometrica de $\sqrt{-1}$. Notação algebrica e trigonometrica das quantidades imaginarias. Operações sobre imaginarios. Formula de Moivre. Raizes da unidade.

3. *Series.* — Series convergentes e divergentes. Series de termos reaes. Regras de convergencia. — Series de termos imaginarios. Series absolutamente convergentes. Operações sobre series. Series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. Circulo de convergencia. Series uniformemente convergentes.

4. *Productos infinitos.* — Condição de convergencia. Limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n cresce indefinidamente.

5. *Fracções continuas.* — Definição. Transformação da fracção em serie. Estudo do caso em que os numeradores das integrantes são a unidade.

6. *Principios geraes da theoria das funcções.* — Continuidade e descontinuidade. Theoremas sobre continuidade. Funcções uniformes e multiformes.

Funcção algebrica inteira. — Formula de Taylor. Definição e formação das derivadas. Continuidade da funcção inteira. Decomposição (1) da funcção em factores lineares. Funcções racionaes fraccionarias. Sua decomposição.

Funcção exponencial. Sua periodicidade. A funcção exponencial é uniforme e continua em todo o plano. Funcção inversa ou logarithmica. Ramos da funcção. Continuidade.

Funcções circulares directas e inversas. Ramos e pontos criticos. Continuidade.

II

7. *Theoria geral das equações algebricas.* — Theoremas preliminares. A equação algebrica tem pelo menos uma raiz. Decomposição do seu primeiro membro em n factores lineares. A equação algebrica de grau n tem n raizes. Composição dos coefficientes. Divisores algebricos. Reducção da equação com raizes eguaes. Soluções communs a duas equações. Transformação das equações. Irreductibilidade.

8. *Separação das raizes das equações numericas.* — Resolução algebrica e numerica das equações. Limites dos módulos das raizes e limites das raizes reaes de uma equação de coefficientes reaes. Theoremas relativos á substituição da variavel por dois numeros e corollarios. Theorema sobre a mudança de signal de $\frac{F(z)}{F'(z)}$ quando $F(Z)$ passa por zero. Theorema de Rolle. Theorema de Sturm. Applicação ás condições de realidade das raizes de uma equação de grau dado.

Separação das raizes pelo theorema de Sturm.

Separação das raizes pelo methodo de Lagrange.

Theorema de Cauchy e separação das raizes imaginarias.

9. *Calculo das raizes.* — Raizes commensuraveis. Raizes incommensuraveis. Methodo de Newton e Fourier. Raizes imaginarias.

10. *Funcções symetricas.* — Eliminação.

11. *Resolução algebrica das equações.* — Equação do terceiro grau. Equação do quarto grau.

TRIGONOMETRIA ESPHERICA

Formulas fundamentaes. — Resolução dos triangulos.

(1) A demonstração dá-se na theoria das equações.

GEOMETRIA ANALYTICA PLANA

I

1. *Ponto.* — Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Distancia entre dois pontos. Transformação de coordenadas. Classificação das linhas planas.

2. *Linha recta.* — Equação da linha recta. A equação do primeiro grau representa uma recta. Differentes formas da equação da linha recta. Recta que passa por dois pontos dados. Condições para que tres pontos estejam em linha recta. Angulo de duas rectas. Condições de parallelismo e perpendicularidade. Intersecção de duas rectas. Condição para que tres rectas sejam concorrentes. Equação de uma recta que passa pela intersecção de outras duas. Distancia de um ponto a uma recta. Recta imaginaria. Equações representando um systema de rectas. Generalidades sobre equações que se decompõem em factores.

3. *Circulo.* — Equação em coordenadas cartesianas e polares. Determinação do raio e coordenadas do centro. Circulo que passa por dois e tres pontos. Tangente e polar.

4. *Curvas do segundo grau.* — Discussão da equação do segundo grau. Identidade das curvas do segundo grau com as secções conicas. As curvas do segundo grau são em geral determinadas por cinco condições. Conica que passa por dois pontos dados. Conica que passa por quatro pontos dados. Relação entre seis pontos d'uma conica. Definição das conicas pela relação das distancias de cada um dos seus pontos a uma recta e a um ponto. Directris e foco.

Centro, diametros e eixos. Tangente e polar.

5. *Ellipse.* — Estudo da ellipse. Focos e directrises. Raios vectores. Tangente e normal. Diametros. Diametros conjugados. Cordas supplementares.

6. *Hyperbole.* — Estudo da hyperbole. Focos e directrises. Raios vectores. Tangente e normal. Diametros. Diametros conjugados. Cordas supplementares. Asymptotas.

7. *Parabola.* — Estudo da parabola. Foco e directris. Tangente e normal. Diametros.

II

COMPLEMENTOS

8. *Applicação do methodo da notação abreviada á linha recta.* — Da equação $\alpha - k\beta = 0$. Applicação do methodo á demonstração de theoremas e resolução de problemas. Relação harmonica e anharmonica. Systema de rectas homographicas. Coordenadas trilineares e tangenciaes.

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO

9. *Ponto recto e plano.* — Coordenadas do ponto no espaço. Distancia entre dois pontos. Coordenadas polares de um ponto. Transformação de

coordenadas. Superficies e linhas. Equações da recta e do plano. Problemas sobre a recta e o plano.

10. *Superficies cylindricas conicas e de revolução.*

11. *Equação geral do segundo grau.*

II Cadeira — **Circulo differencial e integral; calculo das differenças e das variações**

Lente. *Dr. F. Gomes Teixeira.* Seis horas semanaes

Na exposição das doutrinas que são comprehendidas n'esta cadeira, o respectivo lente segue os **Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal,** que são publicados n'este *Annuario,* e de que elle é auctor.

III Cadeira — **Mecanica racional e cinematica**

Lente *J. A. Albuquerque.* Seis horas semanaes

I—MECANICA RACIONAL

Noção de movimento e de força: objecto da mecanica; distincção entre mecanica racional e mecanica physica. Divisão da mecanica racional em Phoronomia, Estatica e Dynamica. Representação ideal dos corpos em mecanica racional: ponto material e systema material.

Caracter vectorial das grandezas em mecanica. Noções de geometria de systemas de vectores como propedeutica da mecanica moderna.

A.—PHORONOMIA

a) MOVIMENTO ABSOLUTO

1) Phoronomia do ponto material

Objecto da Phoronomia; correlação entre esta sciencia e a geometria. Movimento absoluto e relativo. A fluxão das grandezas: noção geral de velocidade.

Theoria da velocidade

Equação do movimento do ponto sobre a trajectoria. Movimento uniforme e variado, rectilineo e curvilineo. Velocidade linear. Representação graphica da lei do movimento: curva dos espaços e das velocidades. Importancia da representação graphica do movimento como methodo de investigação das leis naturaes.

Decomposição do movimento: a simultaneidade de movimentos como pura concepção. Expressão do movimento de um ponto pelo de tres movimentos rectilineos coordenados: equações finitas do movimento. Composição de velocidades simultaneas de um ponto: parallelogrammo, parallelipipedo e, geralmente, polygono das velocidades. Movimento de um ponto em relação a um polo fixo: movimento areolar no plano e no espaço; movimento angular, movimento de circulação, e de resvalamento; velocidades respectivas. Propriedades projectivas do movimento de um ponto.

Applicações: projecção de um movimento circular e uniforme sobre um diametro — principaes propriedades da velocidade de um planeta no seu movimento ao redor do sol — methodo de Roberval para o traçado das tangentes ás curvas: exemplifica-se o methodo na espira de Archimedes, na conchoide, na quadratriz, nas conicas e na cycloide.

Theoria da acceleração

Incremento geometrico da velocidade; acceleração total; sua decomposição natural em acceleração tangencial e centripeta. Interpretação geometrica da acceleração total. Propriedades projectivas da acceleração total. Desvio elementar: importancia da sua consideração; expressão da acceleração no desvio. Equações differenciaes do movimento. Conhecimento que a consideração simultanea das noções de velocidade e acceleração dá do movimento de um ponto. Hodrographo. — Decomposição da acceleração total segundo o raio vector e a perpendicular a este raio n'um movimento plano. Exemplos: movimento elliptico areolar uniforme com o polo no centro da ellipse; movimento kepleriano.

2) Phoronomia dos solidos ou systemas invariaveis

Simplificações que ao estudo do movimento de um solido dá a hypothese da invariabilidade da fórma. Movimento elementar de um solido. As especies mais simples do movimento elementar de um solido: movimento de translação e de rotação; suas propriedades geometricas e phoronomicas. Representação da rotação por um vector.

Figuras planas

Movimento de uma figura plana no seu plano: deslocação finita: deslocação infinitamente pequena; centro ou polo instantaneo de rotação; determinação do polo pelo conhecimento das direcções das velocidades contemporaneas de dois pontos; situação do polo no infinito. Movimento con-

tinuo da figura plana; trajectorias polares; sua reciprocidade; sua determinação por pontos; movimento epicycloidal plano. Problema inverso das epicycloides.

Applicação ao movimento de uma recta de comprimento constante, cujos extremos são dirigidos pelos lados de um angulo: circulos de Cardan.

Exemplo de Reuleaux do *fuso plano no triangulo* (Gleichseitiges Bogenzweieck im Dreieck).

Movimento de uma figura plana no espaço: deslocação infinitamente pequena; fóco do plano; caracteristica; propriedades do fóco e da caracteristica. Caso em que a caracteristica passa ao infinito.

Figuras esphericas

Movimento de uma figura espherica na sua esphera; deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; polo e eixo instantaneo de rotação; sua determinação. Movimento continuo da figura espherica: trajectorias polares esphericas; reducção do movimento da figura ao de rolamento das trajectorias polares esphericas; movimento epicycloidal espherico.

Solidos

Movimento de um solido cujos pontos se deslocam parallelamente a um plano fixo; sua reducção ao de uma figura plana no seu plano; rolamento cylindrico.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: sua reducção ao de uma figura espherica na sua esphera; theorema de Poinsot: rolamento conico. Relação que liga a velocidade angular ao redor do eixo instantaneo, a velocidade angular d'este eixo descrevendo as duas superficies conicas e os raios de curvatura d'ellas. Applicação á rotação diurna. Solução analytica: expressão em determinantes das componentes da velocidade linear de um ponto do solido (Euler).

Movimento o mais geral de um solido livre no espaço: deslocação finita; reducção a uma translação e rotação; infinidade de combinações de dois movimentos do mesmo genero; quantidades que permanecem constantes em todos os systemas d'essas combinações; systema notavel em que a translação é parallela ao eixo da rotação; seu estado unico: movimento helicoidal; eixo de rotação e de resvalamento, sua construcção — deslocação infinitesimal: eixo instantaneo de rotação e de resvalamento; determinação da velocidade do movimento helicoidal. Movimento continuo: imagem de Poinsot; imperfeição d'esta representação. Axoides: imagem de Poncelet. Superficies e contornos complementares dos axoides: theorema de Reuleaux que reduz o movimento mais geral de um solido ao rolamento de duas curvas.

b) MOVIMENTO RELATIVO

1) Movimento relativo de um ponto material

Relação entre a velocidade absoluta, relativa e de arrastamento. Casos de movimento relativo em que o movimento de arrastamento é uma translação simples, uma rotação simples: exemplifica-se no movimento apparente do sol e no movimento diurno dos astros. Relação entre a acceleração absoluta, relativa, de arrastamento e complementar: theorema de Coriolis, sua demonstração geometrica e analytica. Expressão em determinantes das componentes da acceleração complementar. Exemplos da applicação do theorema de Coriolis: acceleração de um ponto referido a coordenadas rectilineas, e polares.

2) Movimentos elementares compostos ou relativos de um solido

Composição de translações. Composição de rotações: 1.° ao redor de eixos parallelos: binario de rotações — 2.° ao redor de eixos convergentes. Composição de translações e rotações. Determinação analytica do *eixo central do movimento.*

Expressões analyticas da deslocação elementar de um ponto do solido em funcção dos seis parametros que definem o movimento mais geral do solido. Acceleração angular: componentes segundo o eixo instantaneo e a normal a este eixo. Projecções sobre tres eixos rectangulares fixos da acceleração angular total; que o theorema subsiste no caso dos eixos coordenados serem levados pelo movimento de rotação. Expressão em determinantes das componentes da acceleração de um ponto do solido devido á acceleração angular.

Acceleração no movimento dos solidos: *a*) acceleração no movimento de um solido parallelamente a um plano, ou acceleração no movimento de uma figura plana no seu plano: logar geometrico dos pontos materiaes em que a acceleração normal é nulla (circumferencia de inflexão); logar geometrico dos pontos materiaes em que a acceleração tangencial é nulla; centro das accelerações; centro *geometrico* das accelerações; *b*) acceleração no movimento de um solido ao redor de um ponto fixo; *c*) acceleração no movimento geral de um solido: theorema de Rivals; expressão analytica d'este theorema.

De algumas particularidades que o movimento relativo de duas superficies solidas em contacto podem apresentar.

Passagem da phoronomia á estatica e dynamica

Principios fundamentaes da mecanica racional, considerados como factos primarios da constituição cosmica: I Principio da persistencia — II Principio da coexistencia — III Principio da mutualidade de acção.

As forças comparadas aos seus effeitos: noção de massa. Avaliação numerica das massas pelos pesos; densidade; homogenidade. Representação das forças por vectores.

Como a noção de massa opera a passagem dos theoremas e construcções da phoronomia para a dynamica: composição das forças applicadas a um mesmo ponto material; projecção das forças; decomposição de uma força applicada a um ponto material em força tangencial e normal á trajectoria do ponto; theorema de Coriolis em dynamica; força de inercia de arrastamento, força centrifuga composta.

Noção do trabalho das forças: alta importancia da noção do trabalho, tirada da sciencia economica, em vista da industria do homem e da grande industria da Natureza. Unidades de trabalho. Trabalho elementar de uma força: dois aspectos differentes de o considerar. Expressão do trabalho elementar de uma força emanante de um ponto fixo.

Trabalho virtual; importancia d'esta concepção como artificio de raciocinio. Theorema que liga o trabalho elementar da força resultante ao das forças componentes; theorema que liga o trabalho elementar de uma força relativo a uma deslocação qualquer aos trabalhos da mesma força relativos ás deslocações componentes d'aquella. Expressão do trabalho elementar de uma força em coordenadas rectangulares. Noção de momento de uma força em relação a um ponto, a um eixo e a um plano. Representação do momento por uma area plana; representação do momento por um vectore: eixo do momento. Theorema do trabalho elementar de uma força na rotação do ponto de applicação da força ao redor do eixo. Determinantes que exprimem os momentos de uma força relativamente a tres eixos rectangulares. Modificações que soffrem estes determinantes devidas a uma translação dos eixos coordenados. Expressão do momento de uma força relativamente a um eixo dado de posição em funcção d'aquelles determinantes. Theorema de Varignon. Relação entre os momentos de uma força relativamente a um feixe de rectas que se crusam no mesmo ponto.

B. — ESTATICA

1) Estatica do ponto material

Definição de equilibrio. Independencia das condições estaticas das forças e do estado de quietação ou de movimento do ponto material. Equa-

ções geraes do equilibrio de um ponto livre. Reducção das tres equações do equilibrio a uma unica equação, por meio do trabalho virtual. Equilibrio de um ponto obrigado a uma curva ou superficie; reacção normal da curva e da superficie; reducção d'este equilibrio ao do ponto livre. Dois methodos para o estabelecimento das equações de equilibrio: 1.º methodo do trabalho virtual; 2.º methodo das reacções. Equilibrio relativo de um ponto livre: applicação a um ponto pesado á superficie da terra; peso do ponto material.

2) Estatica dos systemas materiaes

Noções sobre a constituição dos systemas naturaes; distincção de forças interiores e exteriores. Hypothese da continuidade da materia nos corpos. Pressão n'um elemento dos systemas materiaes; isotropismo. Systemas obrigados a ligações: systemas invariaveis. Lemma relativo á somma dos trabalhos das forças interiores.

Equilibrio dos systemas obrigados a ligações (*principio das velocidades virtuaes*): reducção do systema ao de pontos livres. Theorema de Tschirnhausen servindo de lemma para obter a expressão do trabalho das forças de ligação. Annullação d'este trabalho para deslocações virtuaes compativeis com as ligações. Methodo de Lagrange para o estabelecimento analytico das equações geraes do equilibrio; sua importancia.

Exemplos.

Equilibrio dos systemas invariaveis; applicação do *principios das velocidades virtuaes* aos systemas invariaveis — 1.º caso em que o systema é livre: as seis equações necessarias e sufficientes que definem o equilibrio. Reducção do numero das equações de equilibrio em casos especiaes das forças applicadas: *a*) forças convergentes em um mesmo ponto; *b*) forças parallelas a um plano, a uma recta; *c*) forças situadas n'um mesmo plano. — 2.º caso em que o systema está obrigado a um ponto fixo, ou a um eixo fixo; equações da reacção do ponto ou do eixo.

Equilibrio de um corpo que se appoia n'um plano fixo por um numero determinado de pontos; solução do paradoxo relativo ás pressões.

Equivalencia das forças; sua expressão analytica por seis ou por uma equação. Consequencias immediatas da equivalencia.

Composição das forças nos casos especiaes: systema de forças convergentes; systema de forças parallelas. Caso de duas forças parallelas — *binario* de forças.

Theoria dos binarios de forças: propriedades do binario; representação do binario por uma area, e por um vector (*eixo do binario*); propriedade projectiva do eixo; effeito dynamico de um binario applicado a um solido. Composição dos binarios.

Composição geral das forças: reducção de um systema qualquer de forças a duas; a uma resultante de translação e a um binario; momento resultante. Expressão analytica da condição de reductibilidade de um systema

de forças a uma unica força. Minimo dos momentos relativamente ás diversas posições da resultante de translação (*dynamo*): *eixo central dos momentos* — representação geometrica de Poinsot dos eixos no espaço relativamente aos quaes se tomam os momentos de um systema de forças. Theorema de Chasles relativo á invariabilidade de volume do tetraedro cujas arestas oppostas são os dois vectores que representam as forças equivalentes a um systema. Lei de dualidade entre a Estatica e a Phoronomia.

Centro das forças parallelas; propriedades caracteristicas. Centro de gravidade: centro de massa de solidos, superficies e linhas. Caso da homogenidade. Theoremas que podem facilitar a determinação do centro de gravidade. Exemplos principaes da determinação do centro de gravidade na hypothese da homogenidade.

Methodo centrobarico: theorema de Pappus-Guldin.

Equilibrio dos systemas funiculares: noção de tensão do cordão: equilibrio de um cordão actuado por tres forças: equilibrio do polygno funicular; construcção graphica de Varignon: casos particulares do polygno funicular; equações do equilibrio da curva funicular: applicação a um fio tenso sobre uma superficie — a um fio homogeneo pesado suspenso pelas extremidades (catenaria). Equilibrio dos systemas polygonaes articulados sem attricto.

Theoria geral da funcção de força: determinação simples das quantidades relativas á força por meio da funcção de força; representação geometrica por meio das superficies de nivel. Caso fundamental em que existe uma funcção de força; potencial. Theoremas de Laplace e de Poisson relativos ao parametro differencial da segunda ordem do potencial.

Applicação á attracção de uma esphera homogenea, ou composta de camadas esphericas homogeneas, sobre um ponto material situado no exterior ou interior da esphera.

Equações do equilibrio interior de um systema material qualquer; equilibrio do parallelipido e do tetraedro elementar. Ellipsoide das pressões. Orientação de um elemento plano sob uma determinada pressão.

Casos de systemas isotropos: Hydrostatica. Equações geraes do equilibrio dos fluidos; equação de Clairaut. Superficie de nivel; expressão da pressão no parametro da superficie de nivel; propriedades izopiezica, isotherma e homogenica de uma camada de nivel.

Applicação aos liquidos pesados; altura representativa das pressões. Pressão de um liquido pesado sobre uma superficie immersa: centro de pressão; sua determinação geometrica e analytica no caso da superficie plana. Reducção das pressões elementares sobre uma superficie curva. Caso em que as pressões superficiaes dão resultante: *principio* de Archimedes. Equilibrio dos corpos fluctuantes: condição de estabilidade do equilibrio.

Applicações: nivellamento barometrico: equilibrio relativo de um liquido que gira uniformemente ao redor de um eixo vertical.

Summaria exposição historica dos diversos principios sobre que se tem fundado a Estatica.

C. — DYNAMICA

1) Dynamica de um ponto material

Equações differenciaes dynamicas do movimento linear: forma de Euler; forma de Maclaurin: problemas geraes que ellas exprimem; determinação das constantes arbitrarias. Expressão d'estas equações sob a forma de equilibrio: força de inercia, equação do trabalho virtual que exprime o equilibrio dynamico.

Equações differenciaes dynamicas do movimento areolar.

Integraes geraes das equações differenciaes do movimento: Theorema do augmento da quantidade de movimento projectado — Theorema do trabalho; caso de funcção de força: theorema das forças vivas; expressão do theorema por meio das superficies de nivel. Dois casos importantes em que existe funcção de força — Theorema do accrescimo do momento da quantidade de movimento em relação a um eixo. Caso do theorema das areas. Forças centraes: expressão differencial de uma força central nos elementos da trajectoria.

Movimento de um ponto sobre uma curva e sobre uma superficie dadas: caso de funcção de força. Dynamica do movimento relativo de um ponto material: extensão dos theoremas geraes a este movimento.

Applicações:

Movimento rectilineo em geral: casos em que a integração se reduz a quadratura — Movimento rectilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central proporcional á distancia ao centro — Movimento rectilineo e vertical, descendente e ascendente, de um ponto pesado no vacuo e n'um meio resistente.

Exemplos principaes de movimento curvilineo:

Movimento dos projectis no vacuo e em um meio resistente — Movimento curvilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central: *a*) proporcional á distancia ao centro; *b*) inversamente proporcional ao quadrado da distancia ao centro: movimento dos planetas ao redor do Sol; leis de Kepler e suas immediatas consequencias.

Exemplos principaes do movimento de um ponto sobre uma curva e uma superficie: Movimento de um ponto pesado sobre uma recta inclinada. Movimento de um ponto material pesado movel sobre um circulo vertical; pendulo circular simples no vacuo; pendulo cycloidal no vacuo. Tautochrona e brachistochrona de um ponto pesado no vacuo. Pendulo circular em um meio resistente no caso de mui pequenas oscillações. *Soluções singulares* em mecanica; interpretação de Boussinesq; um dos exemplos mais simples.

Exemplos de movimentos relativos: queda de um ponto pesado no vacuo attendendo ao movimento da terra: desvio êste confirmado pela experiencia de Reich em Freyberg. Pendulo de Foucault.

2) Dynamica dos systemas materiaes

Systemas obrigados a ligações:

Reducção da dynamica dos systemas á estatica dos systemas: *principio* de d'Alembert: seus differentes enunciados, e expressão analytica. Equações geraes do movimento estabelecidas pela applicação do methodo dos multiplicadores; vantagem da introducção das indeterminadas. Exemplos do emprego do methodo. Distincção essencial das ligações não variarem ou variarem com o tempo para a dependencia que existe entre o movimento real e os movimentos virtuaes. Theorema de Hamilton; equações dynamicas de Lagrange (primeira forma canonica); equações dynamicas de Hamilton (segunda forma canonica). Applicação das equações de Lagrange ao movimento de um ponto obrigado a uma esphera (pendulo conico).

Integraes da equação geral do movimento: Theorema do movimento do centro de gravidade — Theorema das quantidades de movimento projectadas — Theorema dos momentos das quantidades de movimento; interpretação phoronomica de Resal: theorema das areas; plano do maximo das areas; caso do plano invariavel — Theorema das forças vivas; theorema da energia: conservação da energia total do Universo; theorema de Yvon Villarceau relativo ao virial.

Theorema de Gauss do minimo esforço. Theorema da menor acção.

Estabelidade do equilibrio: theorema de Lejeune-Dirichlet.

Extensão dos theoremas geraes ao caso do movimento relativo.

Propriedades mecanicas do centro de gravidade; theorema de Kœnig; trabalho da gravidade.

Systemas invariaveis: Decomposição do movimento de um solido livre em movimento do centro de gravidade e ao redor d'este centro; expressão da somma dos momentos das quantidades de movimento e da força viva de um solido movendo-se ao redor de um eixo.

Theoria dos momentos de inercia: momentos de inercia em relação a um eixo, a um ponto (*polar*), e a um plano; relação de dependencia das tres especies de momentos de inercia; raio de gyração; relação entre os momentos de inercia relativos a eixos parallelos; propriedade de minimo momento. Momento de inercia em relação a um eixo passante por um ponto; eixos principaes de inercia (Segner) e momentos de desvio (*deviations moments, Rankine*); propriedades dos eixos principaes e sua determinação; ellipsoide central (Cauchy-Poinsol). Theoremas geraes que podem felicitar a determinação dos eixos principaes de inercia. Expressão do momento de inercia de um solido de revolução em relação ao seu eixo. Momentos de inercia das figuras planas: ellipse central. Momento de inercia polar. Exemplos principaes da determinação de momentos de inercia.

Equações dynamicas do movimento de um solido ao redor de um eixo fixo; theoria do pendulo composto — pendulo simples synchrono; eixo de oscillação; propriedades de maximo e de minimo do tempo de uma oscillação.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo; equações de Eu-

ler; formulas que exprimem as componentes de rotação instantanea nas velocidades de nutação, precessão e rotação propria do solido. Caso em que as forças são nullas, ou reductiveis a uma força que passa constantemente pelo ponto fixo: dois primeiros integraes das equações de Euler; estabelecimento directo d'estes integraes. Theoria geometrica de Poinsot.

Movimento de um solido de revolução homogeneo obrigado a um ponto fixo do seu eixo de figura — caso particular de uma precessão uniforme sem nutação, com rotação propria uniforme. — Applicação a um solido de revolução pesado homogeneo.

Movimento de um solido inteiramente livre, actuado por um systema qualquer de forças.

Theoria da percussão; theoremas de Darboux relativos á variação da orça viva na percussão. Applicação a um solido obrigado a um eixo fixo; centro de percussão. Choque dos corpos; solução geometrica de Darboux.

II—CINEMATICA

(THEORIA DOS MECANISMOS)

Objecto da cinematica theorica, considerada como sciencia da composição e do movimento das machinas, ou theoria dos mecanismos. Breve digressão historica sobre a origem e formação d'esta sciencia — exposição critica dos systemas de classificação dos mecanismos de Monge, Hachette, Lanz e Bétancourt (1809-1819), Borgnis (1818). Limitação e denominação da sciencia por Ampère (1834); systema de Robert Willis (1841), de Laboulaye (1849), de Haton de la Goupillière (1864).

Razão da imperfeição dos systemas propostos. Constituição logica e scientifica da cinematica pelo systema Reuleaux, fundado nas verdadeiras leis da formação dos mecanismos. Solução geral dos problemas das machinas: ponto de partida de Reuleaux; definição de machina. Caracteristica dos problemas relativos ás machinas. Analyse cinematica das machinas: decomposição em mecanimos, em cadeias, em binarios de elementos. Formação de um binario de elementos pela ligação reciproca dos elementos de dois binarios primitivos. Ligação de um numero qualquer de binarios de elementos: cadeia cinematica simples e composta; cadeia fechada desmodromica. Transformação da cadeia fechada em mecanismo. Pluralidade d'esta transformação. Transformação do mecanismo em machina.

Differentes especies de binarios de elementos: condição a que deve satisfazer um binario de elementos para ser desmodromico. Binarios de elementos inferiores ou de encaixamento (parafuso, cylindro, prisma); seu estabelecimento *à priori*. Apoios necessarios e sufficientes dos elementos. Binarios superiores. Investigação geral dos perfis de elementos em vista de uma dada lei de movimento: processo geral de dentadura; theorema e construcção de Savary; processo approximado de Poncelet; processo de trajectorias polares auxiliares.

Caso em que a lei do movimento é defenida por trajectorias polares circulares: engrenagens cylindricas nos tres typos principaes de lanterna, flancos, desenvolventes de circulo; processos de dentadura de Reuleaux. Engrenagem de cremalheira. Resvalamento durante o movimento relativo elementar de dois dentes em contacto. Engrenagens conicas; methodo practico de Tredgold. Engrenagens hyperboloides.

Binarios de elementos dependentes: clausura dos binarios por meio de forças sensiveis; clausura por meio de cadeias cinematicas. Elementos cinematicos ductis; binarios monocineticos (orgãos de tracção e de compressão); clausura cinematica completa dos elementos ductis.

Cadeiras cinematicas dependentes: pontos mortos nos mecanismos; passagem d'estes pontos por meio de forças sensiveis ou por clausura de càdeias.

Notação cinematica.

Cadeia fundamental: *quadrilatero de manivella cylindrico;* trajectorias polares da cadeia; trajectorias polares reduzidas. Mecanismos derivados da cadeia. Transformação evolutiva da cadeia: *cadeia cylindrica de manivella de impulsão;* theoria geometrica e analytica da biella. Mecanismos d'ella derivados; machinas que elles constituem.

Principios geraes de modificação accessoria de fórma: 1.º amplificação dos moendes (Zapfen-Erweiterung).—2.º reducção das cadeias.

Applicação d'estes principios à cadeia de manivella $(C''_3P\perp)$: amplificação 2 em 1, 1 em 2 (excentrico), 3 em 2, 2 em 3, 1 em 2 em 3, 3 em 2 em 1.

Transformação evolutiva da amplificação annular 2 em 3: *cadeia de corrediça em cruz rectangular;* mecanismos derivados.

Reducção do numero de membros de uma cadeia: exemplifica-se nas cadeias $(C''_3P\perp)$ — c; $(C''_3P\perp)$ — a — c; $(C_2\perp C_2\perp)$ — c.

Corrediça oscillante em cruz obliqua $(C''_2 P_2\perp)^d$. Cadeias de corrediça angular de desvio simples e duplo: $(CP\perp\ CP\perp)$; 2 $(CP\perp)$.

Cadeia simples de rodas dentadas cylindricas; mecanismos derivados: mecanismo epicyclo.

Capsulismos de manivella derivados da cadeia $(C''_3P\perp)$: analyse feita sobre os modelos do gabinete (schemas das machinas de vapor de Simpson e Shipton, de Cochrane, de Davies; schemas das bombas de Beale e de Ramelli, do ventilador de Wedding).

Capsulismos de rodas derivados da cadeia simples de rodas dentadas cylindricas $(C^z + C''_2)$: analyse feita sobre os modelos do gabinete (schema das machinas de Pappenheim, Fabry, Root, Evrard, Repsold, Dart, Révillion Galloway. Trens ordinarios de rodas dentadas; engrenagens recorrentes; trens epicycloidaes.

Analyse cinematica das machinas tradicionalmente consideradas como *machinas simples:* alavanca, plano inclinado, cunha, roldana, sarilho, parafuso.

Analyse das machinas completas: concepção que considera a machina completa como o resultado da combinação das tres partes — receptor — transmissor — operador. Divisão das machinas em machinas de transporte e de transformação. Critica d'aquella concepção. Interpretação cinematica da machina completa.

Theoria geral do movimento das machinas.

METHODO DE ENSINO

O curso da 3.ª cadeira é dado em 70 lições (numero médio) de duas horas cada uma (seis semanaes) expostas na aula pelo professor. Depois de um certo numero de lições, que completem uma divisão do programma, os alumnos são interrogados pelo professor sobre as materias dadas (o numero dos interrogatorios não excede doze).

O professor expõe as lições segundo o programma, sem dependencia de compendio; para o que, previamente á hora da lição, os calculos e as figuras são escriptos e traçadas com todo o desenvolvimento nas tres pedras da aula, sendo as duas horas da lição consagradas á exposição oral feita pelo professor. Indica-se, porém, como podendo servir de auxilio ao trabalho dos alumnos no estudo das lições expostas sobre o programma, a obra de G. Gilbert — Cours de Mécanique, 2.ª edição, 1882: e faz-se opportunamente a bibliographia das principaes obras a consultar para maior desenvolvimento de alguns assumptos mais importantes do curso.

IV Cadeira — **Geometria descriptiva**

Lente *Duarte Leite Pereira da Silva*. Oito horas semanaes.

PRIMEIRA PARTE

Objecto e historia da geometria descriptiva; methodos de projecção central e parallela. Formas fundamentaes das 3 especies, sua relação e correspondencia.

Projecção central; correspondencia e collineação perspectiva. Representação do centro e dos elementos que o contém. Raios e planos projectivos, triangulo caracteristico.

Representação d'elementos que não contém o centro. Rectas e planos; traços, pontos e linhas de fuga, triangulo caracteristico. Rebatimento do plano projector, ponto de divisão. Problemas sobre rectas e planos.

Passagem para a geometria projectiva. Lei de dualidade na geometria do espaço, do plano e da paveia; fórmas correlativas; exemplos.

Correspondencia de formas. Formas perspectivas, elementos correspondentes e unidos. Formas projectivas; theorema fundamental.

Projectividade de duas formas de tres elementos.

Formas sobrepostas concordes e oppostas.

Relações metricas entre formas projectivas. Razão anharmonica, symbolo de Möbius. Theorema de Pappus para as formas perspectivas, passagem para as projectivas; as seis razões anharmonicas de quatro pontos.

Formas harmonicas, elementos conjugados. Theoremas e construcções geometricas resultantes.

Construcção de formas projectivas, e razões anharmonicas e harmoni-

cas. Pontos limites em pontuaes projectivas; rectos centraes em feixes projectivos.

Theoremas de Pappus, Desargues e Chasles.

Formas semelhantes e eguaes, theoremas.

Formas involutorias; involução, elementos conjugados. Ponto e recta central, elementos duplos. Theoremas fundamentaes, elementos imaginarios (v. Staudt).

Theorema de Desargues, construcção de formas involutorias. Theoremas de la Ceva e Menelaus.

Collineação de formas de 2.ª especie. Formas collineares e reciprocas (v. Staudt); lei da dualidade.

Projectividade de formas collineares e reciprocas. Centro e eixo de collineação, elementos correspondentes e unidos, rectas limites.

Theorema sobre a rotação do centro de collineação em torno d'uma recta, limite, homologia, centro e eixo; rectas limites, construcção de formas homologicas. Conicas, como homologas do circulo; suas especies. Caracteristica da homologia; affinidade, semelhança, e congruencia.

Dupla geração pontual e tangenical d'um circulo. Passagem para as conicas; pontual e feixe de segunda ordem, theoremas fundamentaes.

Elementos que determinam uma conica. Theoremas de Pascal e Brianchon; seus corollarios; applicações e problemas.

Series projectivas de pontos e tangentes, elementos unidos; generalisação das formas de 1.ª especie.

Series involutorias de pontos e tangentes, elementos duplos.

Polos e polares, separação harmonica; triangulo polar. Theorema fundamental; demonstração da lei da dualidade no plano.

Curvas polares reciprocas.

Elementos conjugados e sobrepostos em involução.

Centros e diametros conjugados, propriedades e theoremas, eixos. Fócos e directrizes.

Theorema de Desargues e corollarios. Problemas do segundo gráu. Collineação nas formas a tres dimensões, elementos correspondentes e unidos; centros, eixos e plano de collineação, planos limites Caracteristica; affinidade, semelhança, e congruencia. Projecção orthogonal usual. Repetição dos elementos do methodo das projecções orthogonaes, e seu desenvolvimento; problemas.

2. Curvas planas, geometricas e graphicas. Tangente e normal, pontos singulares; traçado das tangentes e normaes a curvas graphicas, curvas d'erro. Curvatura, construcção do seu centro.

Projecções d'uma curva plana, e da tangente; partes uteis e parasitas.

Superficies; plano tangente, e normal. Curvatura; secções principaes, theorema d'Euler. Normalias, linhas de curvatura e geodesicas. Representação graphica d'uma superficie, contornos apparentes.

3. Cones e cylindros, em especial de 2.ª ordem, sua representação graphica. Construcção do plano tangente. Problemas em que entram como auxiliares cones e cylindros.

Secções planas d'um cone ou cylindro; caso em que são parallelas. Fórma das curvas; ramos infinitos e assymptotas. Processos para construir as projecções d'uma secção, e das suas tangentes.

Construcção da secção no seu plano. Transformada por planificação methodo geral para o seu traçado.

4. Superficies de revolução, modos de geração. Planos tangentes, e normaes. Representação graphica das superficies de revolução e construcção do plano tangente.

Secções planas; methodos geraes para determinar as suas projecções, e a tangente n'um ponto qualquer.

Toro; forma das secções planas, theorema de Yvon Villarceau. Hyperboloide de revolução; principaes propriedades.

5. Superficies regradas, modos de geração. Superficies planificaveis, e enviezadas; planos tangentes, aresta de reversão. Concordancia de duas superficies regradas ao longo d'uma geratriz.

Hyperboloide regrado; principaes propriedades. Divisão homographica e propriedades anharmonicas das geratrizes. Representação graphica: construcção de planos tangentes e secções planas.

Transição para o paraboloide; estudo especial d'esta superficie. Sua representação graphica; construcção de planos tangentes e de secções planas.

Construcção do plano tangente a uma superficie regrada qualquer, por meio de hyperboloides e paraboloides auxiliares.

Estudo summario dos conoides, cylindroides, e superficies d'egual declive.

6. Quadricas; modos de geração, propriedades e theoremas geraes. Theoria dos pólos e polares; demonstração da lei de reciprocidade. Representação graphica das differentes especies de quadricas; construcção de planos tangentes. Secções planas; sua construcção.

7. Intersecção de superficies; curvas empenadas. Tangente, e plano normal, pontos singulares; plano e circulo osculador. Propriedades projectivas das curvas empenadas.

Methodos geraes de construcção da intersecção de duas superficies, e da tangente n'um ponto qualquer.

8. Intersecção de cones e cylindros, processos de construcção da curva e da tangente. Penetrações, arrancamentos, e casos mixtos. Fórma da curva; ramos infinitos e assymptotas, pontos singulares.

9. Intersecção de superficies de revolução e cones ou cylindros; processo de construcção da curva por meio de projecções conicas ou cylindricas, e traçado da tangente.

Intersecção de superficies de revolução. Processo de construcção no caso em que os seus eixos se encontram, e traçado da tangente, grau da projecção da intersecção no plano dos eixos. Caso geral em que os eixos se não encontram; varios processos de construcção, emprego de superficies auxiliares de revolução (Schiappa Monteiro), traçado da tangente.

10. Intersecção de quadricas. Discussão da curva; quarticas de segunda especie e cubicas; principaes propriedades. Theoremas geraes sobre as intersecções planas de quadricas.

Processos geraes de construcção da intersecção de quadricas, baseados na projecção conica (Schiappa Monteiro); traçado da tangente, e determinação dos pontos singulares.

Processos especiaes para o caso de duas quadricas de revolução (Chapuy), e duas quadricas regradas, com geratriz commum.

11. Projecções cotadas. Problemas relativos á recta e ao plano.

Cones e cylindros, construcção de planos tangentes.

12. Calculo graphico. Operações simples, potencias e raizes; logarithmos. Instrumentos de calculo. Operações graphicas sobre areas; transformação graphica de areas; planimetro polar.

13. Graphostatica. Representação graphica das forças. Composição de forças que actuam n'um ponto; parallelogrammo e polygono de forças. Composição de forças n'um plano; binarios, polygono funicular. Momentos de rotação das forças. Forças no espaço. Caso de forças parallelas; centro de gravidade. Momentos de inercia. Applicações.

SEGUNDA PARTE (4.º ANNO)

1. Superficies helicoidaes. Parafuzos de filetes triangulares e quadrados.

Traçado das engrenagens cylindricas, conicas e helicoidaes.

2. Superficies topographicas.

3. Theoria das sombras. Definição: linha de separação de sombra e luz. Sombra propria e produzida. Methodos geraes para a resolução dos problemas de sombras; pontos brilhantes. Noções sobre aguadas.

4. Perspectiva linear conica. Definições; perspectiva de figuras no geometral, escala de larguras. Perspectiva d'uma elevação, escala de alturas; rebaixamento do geometral. Construcções directas sobre o quadro. Problema inverso da perspectiva.

5. Perspectiva cavalheira, axonometrica e isometrica.

6. Noções de stereotomia.

V Cadeira — Astronomia e geodesia

Lente (interino) *L. I. Woodhouse*. Oito horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 66 a 68).

VI Cadeira — Physica

Lente *Conde de Campo Bello*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 68 a 83).

VII Cadeira — Chimica inorganica

Lente *Dr. José Diogo Arroyo*. Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 83 a 89).

VIII Cadeira — **Chimica organica**

Lente *A. J. Ferreira da Silva.* Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 17 a 23).

IX Cadeira — **Mineralogia, paleontologia e geologia**

Lente (interino) *M. A. Gonçalves.* Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 95 a 100).

X Cadeira — **Botanica**

Lente *Dr. F. Salles Gomes Cardoso.* Seis horas semanaes

Introducção. — Plano d'exposição do curso. Objectos d'estudo e meios d'observação.

Jardins botanicos.

Hervarios. Processos para a colheita e conservação das plantas.

Technica microscopica. Condições especiaes das preparações botanicas. Methodos para obter as amplificações maximas. Processos de desenho. Noções theoricas necessarias para a interpretação das imagens microscopicas.

Historia da sciencia botanica. Estudos feitos sobre a Botanica portugueza.

MORPHOLOGIA — PHYSIOLOGIA — EMBRYOGENIA

NOÇÕES GERAES DE MORPHOLOGIA E PHYSIOLOGIA

Morphologia da cellula. — Natureza chimica e estructura physica do protoplasma. E' uma substancia proleica. Suas relações com os corpos colloides. Meio interno da cellula. Productos a que o protoplasma dá origem. Cytoplasma e Hyaloplasma. Microsomas-cytoplasmaticos. O protoplasma tem uma estructura reticulada. Camada membranosa. Morphologia do nucleo. Hyaloplasma nuclear. Microsomas nucleares. Nucleolos. Nucleina, chromatina e achromatina. Membrana cellular. Fermentos soluveis. Chlorophylla. Productos de transubstanciação. Cristalloides. Aleurona. Amido.

Physiologia da cellula. — Elementos nutritivos da cellula vegetal. Nutrição e respiração. Theorias da respiração. Condições physicas de todos os phenomenos vitaes. Nutrição. Assimilação e transubstanciação. Estados de combinação em que os elementos nutritivos são mais aptos para entrar na corrente organica. Funcção chlorophyllina. Synthese dos compostos ternarios. Trabalho chimico da nutrição no protoplasma incolor. Digestão vege-

tal. Papel dos fermentos soluveis nos phenomenos chimicos da cellula. Synthese dos albuminoides.

Formação das cellulas. — Divisão cellular. Divisão binaria. Cellulas sem nucleo. Cellulas com nucleo. Phenomenos da Karyokinese. Trabalhos recentes de Strasburger, Flemming e Guignard. Significação dos asters. O processo typico de divisão binaria parece estabelecer um parentesco intimo entre os phytoplasmas e os zooplasmas. Reproducção por gomos. Divisão pluricellular. Formação livre; casos intermediarios que a ligàm á divisão normal. Renovação; é reductivel ao processo da bipartição. Conjugação e fecundação. Sexualidade. Gametas. Homologias entre os gametas masculinos e femininos. Theoria geral da conjugação e fecundação.

Motilidade. — A contractilidade parece ser o resultado d'acções physico chimicas. Theoria e classificação dos movimentos que se observam na cellula vegetal.

Evolutilidade e Sensibilidade. — Definição das propriedades fundamentaes da materia viva. Os phytoplasmas e os zooplasmas considerados comparativamente nas suas tendencias evolutivas. A sensibilidade nos phytos e zoorganismos. O bioplasma.

Morphologia dos tecidos e apparelhos. — Caracteres geraes dos tecidos. Origem dos tecidos. Meristema. Genese do meristema. Classificação e estudo dos tecidos e apparelhos. Epiderme. Suber. Parenchyma. Tecido secretor. Sclerenchyma. Tecido crivoso. Tecido vascular. Espaços intercellulares aeriferos. Apparelhos: tegmentar, conductor, de sustentação, conjunctivo, assimilador, de reserva, secretor, absorvente, e aerifero.

Physiologia dos tecidos e apparelhos.

Morphologia geral do corpo da planta. — Differenciação progressiva e divisão correspondente do trabalho vital. Crescimento. Desegualdade de crescimento; nutação. Ramificação. Disposição dos membros. Diagrammas. Entre-nós e divergencias. Causas morphologicas que determinam a disposição dos membros. Accidentes da superficie; pellos; emergencias; cryptas e stomas. Alteração na disposição primitiva dos membros.

Physiologia geral do corpo da planta. — Condições de exercicio de vida. Analyse do meio externo. Natureza dos alimentos. Influencia das radiações. Thermotropismo. Heliotropismo. Combinação do geotropismo e do heliotropismo. Influencia da refrangibilidade das radiações sobre os movimentos phototacticos. Acção da planta sobre o meio externo. Emissão de radiações. Acção dos solidos, liquidos e substancias dissolvidas.

Differenciação progressiva do corpo da planta. — Divisão progressiva do trabalho. Raiz. Caule. Folha. Flor.

Morphologia e Physiologia da raiz.

Morphologia e Physiologia do caule.

Morphologia e Physiologia da folha. Phyllotaxia. Folheatura dos gomos.

Morphologia e Physiologia da flor. — Estructura do pedicello, das bracteas, do calix e da corolla. Estructura do androceo; formação das cellulas mães do pollen; estructura e dehiscencia da parede da anthera; desenvolvimento e estructura do tubo pollinico. Estructura do gyneceo; gyneceo dyalycarpellar. Estructura do estylete e estigma. Estructura do ovulo. Formação do sacco embryonario. Homologia da nucella e sacco pollinico. Angiospermicas, gymnospermicas. Formação da oosphera no sacco embryo-

nario das Angiospermicas. Formação da oosphera no sacco embryonario das Gymnospermicas. Estructura do funiculo e dos tegumentos. Estructura dos nectarios floraes. Liquido estygmatico. Transpiração da flor. Desenvolvimento d'acido carbonico nos orgãos floraes. Papel physiologico dos verticillios floraes successivos. Pollinisação. Papel dos insectos na pollinisação. Flores dichogamicas e isogamicas. Germinação do pollen. Fecundação nas Angiospermicas e Gymnospermicas. Caracteres geraes da formação do ovo.

Inflorescencias. Preflorescencia. Diagrammas floraes.

Embryogenia das Phanerogamicas. — Desenvolvimento do ovo em embryão nas Angiospermicas e Gymnospermicas. Suspensor. Formação do albumen. Endosperma. Desenvolvimento do ovulo em semente. Perisperma. Amendoa. Formação do fructo. Germinação da semente e desenvolvimento do embryão em plantula. Digestão das provisões nutritivas. Desenvolvimento da plantula em planta adulta. Discontinuidade do desenvolvimento. Periodos de repouso. Vida latente dos tuberculos e gomos. Applicação dos processos naturaes de desenvolvimento dissociado á multiplicação artificial das plantas. Esboço geral da vida das plantas.

Embryogenia das Cryptogamicas vasculares. — Formação do ovo nos Fetos. Soros. Sporangeos. Sporos. Germinação dos sporos e desenvolvimento do *prothallium*. Antheridios e archegonios. Desenvolvimento do ovulo em embryão e d'este em planta adulta.

Embryogenia das Muscineas.

Formação da cellula-ovo e desenvolvimento das Thallophytas.

Sexualidade e autofecundação. Differença sexual dos gametas. Parthenogenese. Apogamia. Hybridos e Mestiços. Formação de variedades pelo crusamento.

TERMINOLOGIA — TAXONOMIA

Definição dos termos technicos. Traducção latina d'esses termos. Noções geraes sobre classificação. Methodo artificial de Tournefort. Clave do systema de Linneo. Methodo natural de Jussieu. Agrupamento de De Candolle. Classificações de Endlicher e de Brogniarr.

BOTANICA ESPECIAL

Thallophytas. — Caracteres geraes e divisão.

Cogumellos. — Caracteres physicos e chimicos dos Cogumellos. Estructura dos Cogumellos: sporos; hymenium; mycelium. Reproducção e fecundação nos Cogumellos. Polymorphismo. Propriedades nocivas dos Cogumellos. Schizomycetos e Saccharomycetos. Fermentações pathologicas. Theorias da auto-infecção. As Ptomainas. Classificação dos organismos fermentos. Papel alimentar dos Cogumellos. Caracteres geraes que permittem distinguir as especies nocivas das especies inoffensivas.

Algas. — Classificação e descripção.

Lichens.

Hepaticas. Sphagneas. Musgos.

Cryptogamicas vasculares. — Fetos. Ophiogliosseas. Lycopocaios. Sebaginellas. Isoetaceas. Marsiliaceas. Salvineas.

Gymnospermicas. — Cycadaceas. Conniferas e Gnetaceas.

Angiospermicas. — Caracteres geraes.
Monocotyledoneas.
Dycotyledoneas.

PALEONTOLOGIA

CLASSIFICAÇÃO DOS TERRENOS GEOLOGICOS

Floras que se têm succedido durante os differentes periodos geologicos.
Algas fosseis.
Cryptogamicas vasculares fosseis.
Evolução particular das Sigillarias. Calamodendreas, Dolerophylleas, Salisbureas, Acicullareas.
Evolução particular das Gnetaceas.
Origem e evolução das Monocotyledoneas e Dycotyledoneas.

GEOGRAPHIA BOTANICA

Noções sobre os climas.
Caracteres botanicos das zonas.
Influencia da distribuição dos climas, dos continentes, e dos mares nos periodos prehistoricos sobre a geographia vegetal.

BOTANICA AGRICOLA E INDUSTRIAL

Productos agricolas. Culturas industriaes. Plantas lenhosas. Arvores florestaes e fructiferas da Europa. Arvores folhosas. Arvores resinosas. Conservação de madeiras. Gommas. Materias gordurosas. Productos resinosos. Gommas elasticas. Materias filamentosas. Materias tinctoriaes. Substancias feculentas e saccharinas.

Aptidões agricolas do solo portuguez. Meios de melhorar essas aptidões. Productos agricolas do paiz. Descripção botanica de Portugal. Areas florestaes.

XI Cadeira — Zoologia

Lente *M. A. Gonçalves*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 108 a 109).

XII Cadeira — Construcções em geral e resistencia dos materiaes

Lente (interino) *M. Terra Pereira Vianna.* Seis horas semanaes

---

PRIMEIRA PARTE

PROCESSOS GERAES DE CONSTRUCÇÃO

I—Construcções e movimentos de terras.
1—Escavações. Transportes. Aterros. Consolidação de taludes.

2—Dragagens.
II—Construcções de pedra.
1—Pedras naturaes. Tijolos e outros productos artificiaes.
2—Argamassas. Cal, cimentos, pozzolanas. Areia.
3—Execução das cantarias e alvenarias.
III—Construcções de madeira.
1—Madeiras.
2—Samblagens e ligações.
IV—Construcções de ferro.
1—Ferro fundido. Ferro forjado. Aço.
2—Ligações e emprego do ferro nas construcções.
V—Materiaes e obras accessorias.
1—Gesso.
2—Betumes e asphalto.
3—Tintas e vernizes.
4—Alguns metaes e ligas.
VI—Fundações.
1—Sondagens.
2—Fundações ordinarias.
3—Fundações especiaes.
VII—Projectos. Organisação dos estaleiros. Direcção dos trabalhos. Marcação das obras.

SEGUNDA PARTE

RESISTENCIA DOS MATERIAES

(Os methodos da graphostatica são expostos juntamente com as theorias analyticas)

I—Noções preliminares.
1—Determinação dos centros de gravidade e momentos de inercia das areas planas.
2—Distribuição dos esforços sobre uma area plana.
II—Estabilidade das construcções de alvenaria.
1—Condições geraes de estabilidade. Massiço isolado. Massiço submettido a acções lateraes.
2—Exemplos. Acção do vento; chaminés. Muros de reservatorios.
3—Impulsos das terras. Muros de supporte.
4—Abobadas.
III—Determinação dos esforços nos systemas articulados. Vigas americanas. Vigas de rotula.
IV—Distensão e compressão simples.
1—Estudo geral.
2—Vasos e supportes cylindricos e esphericos.
V—Escorregamento transversal. Arrebites.
VI—Torsão.
VII—Flexão das vigas rectas.
1—Estudo geral.
2—Calculo dos momentos de flexão e dos esforços transversos. Vigas apoiadas em 2 pontos. Vigas encastradas. Vigas apoiadas em muitos pontos.

3—Determinação graphica dos momentos de flexão e dos esforços transversos.
4—Calculo das dimensões transversaes das vigas flectidas.
5—Vigas carregadas de topo.
6—Vigas submettidas a forças obliquas.
7—Semelhança das vigas na resistencia á flexão.

VIII—Flexão d'um systema de vigas rectas.
IX—Flexão dos arcos.
X—Flexão das superficies. Portas de eclusas.
XI—Flexão das molas.
XII—Effeito dos choques e das cargas em movimento.

Na segunda parte serve de texto o livro: A. Flamant—*Stabilité des constructions. Résistance des matériaux*—1886.

XIII Cadeira—**Hydraulica e machinas**

Lente *Roberto Rodrigues Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 25 a 28).

XIV Cadeira—**Construcções e vias de communicação**

Lente (interino) *R. Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 28 a 31).

XV Cadeira—**Montanistica e docimasia**

Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 116 a 122).

XVI Cadeira—**Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação**

Lente *A. Lobo*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 32 a 39).

XVII. Cadeira — Escripturação em geral e especialmente dos bancos. Contabilidade industrial

Lente *J. J. Rodrigues de Freitas*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 39 a 41).

XVIII Cadeira

Lente *Francisco da Silva Cardoso*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, paginas 41).

SECÇÃO SCIENTIFICA

FRAGMENTOS DE UM CURSO D'ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

IV

(CALCULO DIFFERENCIAL)

Continuado do Annuario de 1886-1887

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I

Definições e principios geraes

128. — Tendo de tractar agora das funcções de variaveis imaginarias, recordemos primeiro que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ póde ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y; e portanto que podemos fallar no ponto z, quando nos quizermos referir ao ponto (x, y), e reciprocamente que podemos fallar no imaginario representado pelo ponto (x, y) quando quizermos fallar no imaginario z.

129. — A toda a funcção da variavel imaginaria $z = x + iy$ que tem uma derivada finita e determinada em todos os pontos $x + iy$ do plano chama-se uma *funcção monogenea* da variavel imaginaria $z = x + iy$. Assim, por exemplo, são funcções monogeneas as funcções raccionaes inteiras, as funcções transcendentes e^z, sen z, cos z, etc.

Se entre dous pontos quaesquer de uma região A do plano onde estão representados os valores de z, se poder traçar uma linha continua em todos os pontos da qual a funcção $f(z)$ tenha uma derivada finita e determinada, diz-se que $f(z)$ é uma *funcção monogenea de* z *na área* A.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.ª — Para que uma expressão $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja

funcção monogenea de uma variavel imaginaria $z = x + iy$ é necessario que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ satisfaçam ás condições seguintes (n.º 50):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Assim, por exemplo, a expressão

$$x^2 + y^2 + i(x - y)$$

não é funcção monogenea de $x + iy$.

2.ª — Uma funcção de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a funcção definida pela série (*)

$$f(z) = \sum_0^\infty b^n z^{a^n}$$

quando a, que representa um numero inteiro positivo impar, e b que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem á condição $ab < 1 + \frac{3}{2}\pi$. Com effeito, a série considerada é convergente quando é $|z| < 1$ (**) e quando é $|z| = 1$. Em todos os pontos que satisfazem á primeira condição, a funcção tem uma derivada finita e determinada, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á segunda condição, a funcção não tem derivada, visto que, pondo $z = \cos\omega + i \operatorname{sen}\omega$, vem

$$f(z) = \sum_0^\infty b^n [\cos(a^n\omega) + i \operatorname{sen}(a^n\omega)],$$

e a funcção de ω

$$\sum_0^\infty b^n \cos(a^n\omega)$$

não tem derivada (n.º 127).

(*) Weierstrass: *Zur Functionen-Lehre* (*Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin*, 1880).

(**) Representa-se por $|m|$ o módulo da quantidade m (Weierstrass).

3.ª — Uma funcção monogenea n'uma área A póde ser uma parte de outra funcção monogenea n'uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a funcção definida pela série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

convergente quando é $| z | < 1$, faz parte da funcção $\frac{1}{1 - z}$ monogenea em todo o plano, excepto no ponto $z = 1$.

Do mesmo modo, a funcção definida pela série (*)

$$f(z) = F(z) - \frac{1}{z - a} + (z - a - 1)\left[\frac{1}{(z - a)^3} + \frac{1}{(z - a)^5} + \ldots\right]$$

é igual a $F(z)$ quando $| z - a | > 1$, e é igual ao infinito quando é $| z - a | < 1$. Logo se $F(z)$ representa uma funcção monogenea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa funcção monogenea.

4.ª — Quando a região do plano em que a funcção $f(z)$ é determinada se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funcções monogeneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada pelo snr. Weierstrass da maneira seguinte :

Seja $\varphi(z)$ uma expressão igual a $+ 1$ quando $| z | < 1$, e igual a $- 1$ quando $| z | > 1$. Pondo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

a expressão

$$F_0(z) + F_1(z)\,\varphi(z)$$

é igual a $f_1(z)$ quando $| z | < 1$, e é igual a $f_2(z)$ quando $| z | > 1$.

Ha várias expressões analyticas satisfazendo ás condições impostas a $\varphi(z)$; taes são as expressões dadas pelos snrs.

(*) Veja-se o nosso artigo: *Exemples de fonctions à espaces lacunaires* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, tomo VI.

Weierstrass (*) e Schröder (**). Aqui empregaremos para esse fim a expressão

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}$$

estudada no n.º 125, no caso das variaveis reaes, e que tem logar tambem no caso das variaveis imaginarias. Com effeito, por ser

$$\varphi(z) = \lim_{m=\infty} \frac{1-z^m}{1+z^m}$$

conclue-se que $\varphi(z) = 1$ quando $|z| < 1$, e que $\varphi(z) = -1$ quando $|z| > 1$.

Ha muitos outros meios de formar expressões analyticas satisfazendo ás condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido ao snr. Lerch, de Praga (***).

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z) = u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \dots}}$$

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$c_{n+1} c_n - (u_1 + u_2) c_n + u_1 u_2 = 0.$$

É facil de vêr que esta igualdade póde ser escripta debaixo da fórma

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2}$$

(*) *Weierstrass* loc. cit.
(**) *Zeitschrift* für Mathematik, 1876.
(***) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2.ª série, tomo x.

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}$$

$$\frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}$$

....

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2}$$

ou, por ser $c_0 = u_1 + u_2$,

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2}.$$

D'esta igualdade conclue-se que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_1$ se $|u_2| < |u_1|$, e que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_2$ se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $f(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

130. — *Theorema I — Se a funcção* f (z) *tiver uma derivada finita e determinada para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *para* Z *descrevendo uma recta que une estes dois pontos, será* (*)

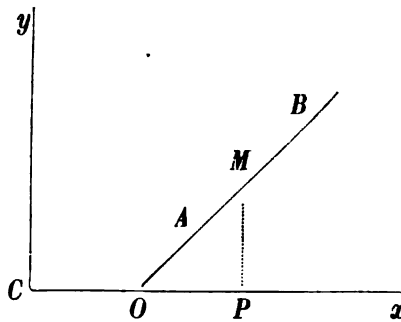
(*) Pelas notações $R[A]$ e $I[A]$ representa-se a parte real e a parte imaginaria de A.

$$(1)\quad f(Z) - f(z_0) = R\,[(Z - z_0)\, f'(z_1)] + I\,[(Z - z_0)\, f'(z_2)]$$

z_1 e z_2 representando dois valores de z comprehendidos no caminho seguido por z para ir de z_0 e Z. Será tambem

$$(2)\quad f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2}\, e^{\alpha i} (Z - z_0)\, f'[z_0 + \theta (Z - z_0)],$$

λ e θ representando quantidades reaes positivas comprehendidas entre 0 e 1.

Sejam AB a recta descripta pelo ponto z; A, M e B os pontos correspondentes aos imaginarios z_0, z e Z; ω o angulo

BOx da recta com o eixo das abscissas; e ρ_0, ρ, ρ', b as distancias OA, OM, OB, CO. Será

$$z = CP + iMP = b + OP + iMP$$
$$= b + \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega) = b + \rho\, e^{i\omega},$$

e do mesmo modo

$$z_0 = b + \rho_0\, e^{i\omega},\ Z = b + \rho'\, e^{i\omega}.$$

Logo temos

$$f(z) = f(b + \rho\, e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

e, derivando relativamente a ρ,

$$e^{i\omega} f'(z) = \varphi'(\rho) + i\psi'(\rho).$$

Applicando agora ás funcções $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ o theorema III do n.º 49 vem

$$\varphi(\rho') = \varphi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\varphi'(\rho_1)$$

$$\psi(\rho') = \psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\psi'(\rho_2),$$

ρ_1 e ρ_2 representando dois valores de ρ correspondentes a dois valores z_1 e z_2 de z comprehendidos no intervallo AB. Temos pois

$$f(Z) = \varphi(\rho') + i\,\psi(\rho')$$

$$= (\rho_0) + i\,\psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,[\varphi'(\rho_1) + i\,\psi'(\rho_2)]$$

$$= f(z_0) + (\rho' - \rho_0)\,\{R\,[e^{i\omega} f'(z_1) + I\,[e^{i\omega} f'(z_2)]\}$$

ou

$$(Z) = f(z_0) + R\,[(Z - z_0)\,f'(z_1)] + I\,[(Z - z_0)\,f'(z_2)]$$

por ser

$$(\rho' - \rho_0)\,e^{i\omega} = Z - z_0\,.$$

Está pois demonstrada a formula (1), devida a Cauchy. D'esta formula vamos deduzir a formula (2), devida ao snr. Mansion, professor na Universidade de Gand (*).

Pondo na formula (1)

$$Z - z_0 = B\,e^{ib},\; f'(z_1) = C\,e^{ic},\; f'(z_2) = D\,e^{id}$$

vem

$$f(Z) - f(z_0) = BC\cos(b + c) + BDi\,\text{sen}\,(b + d) = H\,e^{ih}\,,$$

onde

$$H^2 = B^2\,C^2\cos^2(b + c) + B^2\,D^2\,\text{sen}^2(b + d)\,.$$

Suppondo agora $C > D$, vem

(*) *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.ª série, tomo x. A formula do snr. Mansion é análoga a outra devida ao snr. Darboux (*Journal de Liouville*, 3.ª série, tomo II) cuja demonstração é mais complicada.

$$H^2 \gtreqless 2 B^2 C^2 ,$$

e portanto

$$H = \lambda BC \sqrt{2} ,$$

onde λ representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo temos a formula

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda \sqrt{2} e^{i(h-b-c)} (Z - z_0) f'(z_1)$$

que dá a formula (2) pondo $h - b - c = a$, e notando que das relações

$$Z - z_0 = (\rho' - \rho_0) e^{i\omega}, z_1 - z_0 = (\rho_1 - \rho_0) e^{i\omega}, \rho_1 - \rho_0 < \rho' - \rho_0$$

se tira $\rho_1 - \rho_0 = \theta (\rho' - \rho_0)$, e portanto

$$z_1 - z_0 = \theta (Z - z_0) ,$$

θ representando uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo modo pondo $H = \lambda BD \sqrt{2}$.

Do theorema que vimos de demonstrar deduz-se como no n.° 49 os dois corollarios seguintes:

1.°—Se a derivada de uma funcção é nulla n'um certo intervallo rectilineo, a funcção é constante no mesmo intervallo.

2.°—Se duas funcções tiverem a mesma derivada n'um certo intervallo rectilineo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.

Theorema II—Se as funcções f (z) *e* F (z) *e as suas derivadas* f' (z), f'' (z), . . ., fⁿ (z), F' (z), F'' (z), . . ., Fᵐ (z) *forem finitas e determinadas para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *e* Z *descrevendo uma recta que una estes dois pontos, será:*

$$\frac{f(Z)-f(z_0)-(Z-z_0)f'(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z)^l}{l\,!}f^l(z_0)}{F(Z)-F(z_0)-(Z-z_0)F'(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^k}{k\,!}F^k(z_0)}$$

$$=\frac{\dfrac{(Z-z_0)^{l+1}}{(l+1)\,!}f^{l+1}(z_0)+\ldots+\dfrac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{n-1}(z_0)+R_n}{\dfrac{(Z-z_0)^{k+1}}{(k+1)\,!}F^{k+1}(z_0)+\ldots+\dfrac{(Z-z_0)^{m-1}}{(m-1)\,!}F^{m-1}(z_0)+R'_m}$$

onde

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)]$$

$$R'_m=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^m(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)\,!}F^m[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o theorema correspondente do n.º 86, applicando o theorema anterior á funcção φ do n.º 86.

D'este theorema deduz-se, pondo

$$F(z)=(z-z_0)^{k+1},$$

o theorema seguinte:

Theorema III — Se as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^n(z)$ *forem finitas e determinadas para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *a* Z *descrevendo uma recta que une estes dois pontos será*

$$f(Z)=f(z_0)+(Z-z_0)f'(z_0)+\ldots$$
$$+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{n-1}(z_0)+R_n$$

onde

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

A formula precedente é, como se vê, a *formula de Tay-*

lor que foi demonstrada primeiro no caso de variaveis reaes, e que foi entendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias. A expressão que vimos de achar do resto R_n é a expressão devida ao sr. Darboux (*), com a fórma que lhe deu ultimamente o sr. Mansion (**).

181. — *Se na vesinhança do ponto* a, *a funcção* f (z) *fôr susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de* z — a, *de modo que seja*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots$$

teremos

$$A_n = \frac{f^n(a)}{n\,!}.$$

Com effeito, pondo

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_n(z-a)^n$$
$$+ (z-a)^{n+1} \varphi(z, a),$$

e derivando n vezes esta igualdade relativamente a z, vem

$$f^n(z) = n\,!\,A_n + (z-a)^{n+1} \frac{d^n \varphi}{dz^n}$$
$$+ n(n+1)(z-a)^n \frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-3}} +$$
$$+ \ldots + (n+1)\,!\,(z-a)\,\varphi(z, a),$$

e pondo $z = a$

$$f^n(a) = n\,!\,A_n.$$

(*) *Journal de Liouville*, 3.ª série, tomo II.
(**) Loc. cit.

Applicações

182. — *Desenvolvimento do binomio.* — Applicando a formula de Taylor ao binomio

$$y = (1 + z)^k$$

onde k é real e z imaginario, vem como no n.º 88

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} \binom{k}{a} z^a + R_n$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} z^n (1-\theta)^{n-1} (1+\theta z)^{k-n}.$$

2) Se o módulo ρ de $z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ é menor do que a unidade, cada vez que n augmenta de uma unidade R_n adquire o factor

$$\left(\frac{k}{n} - 1\right) z \frac{1-\theta}{1+\theta z}$$

cujo módulo é igual ao valôr absoluto da expressão

$$M = \left(\frac{k}{n} - 1\right) \rho \frac{1-\theta}{\sqrt{1 + \theta^2 \rho^2 + 2\theta\rho\cos\omega}},$$

visto ser o módulo de $1 + \theta z$ igual a

$$\sqrt{1 + \theta^2 \rho^2 + 2\theta\rho\cos\omega}.$$

O producto dos dois primeiros factores de M tende para $-\rho$ quando n tende para o infinito; e o terceiro é sempre menor do que a unidade visto que o seu maior valôr $\frac{1-\theta}{1-\theta\rho}$,

que se obtem pondo $cos\ \omega = -1$, é menor do que a unidade.

Logo ha um valôr de n a partir do qual o môdulo do resto R_n adquire indefinidamente factores menores do que a unidade, e portanto R^n tende para zero quando n tende para o infinito.

Logo n'este caso, o binomio considerado póde ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$(1 + z)^k \; 1 + = \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a .$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a série precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dous termos consecutivos d'esta série:

$$\frac{\binom{k}{a+1} z}{\binom{k}{a}} = \frac{(k-a)\, z}{a+1} = \frac{\left(\frac{k}{a} - 1\right) z}{1 + \frac{1}{a}}$$

tende para ρ quando a tende para o infinito. Logo ha um valôr de a a partir do qual os módulos dos termos da série crescem indefinidamente.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é igual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, pode-se consultar uma excellente memoria do sr. Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo IX).

Appliquemos agora a formula que vimos de obter á deducção d'algumas formnlas de que teremos de fazer uso.

I — A funcção

$$\text{sen}\ z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \,\text{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k .$$

1) Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \cdot \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz}$$

$$= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} [\cos (k-2a) z + i \operatorname{sen} (k-2a) z]$$

suppondo $\binom{k}{0} = 1$.

D'esta igualdade tira-se, se k é par,

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \cos (k-2a) z,$$

e, se k é impar,

$$2^k i^{k-1} \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen} (k-2a) z.$$

Estas formulas importantes dão o desenvolvimento da potencia k de *sen* z ordenado segundo os senos ou cosenos dos arcos multiplos de z. O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito e os termos equidistantes dos extremos são iguaes, como é facil de vêr.

2) Se k fôr negativo ou fraccionario, as formulas precedentes ainda têem logar quando o módulo de e^{-2iz} é menor do que a unidade, isto é, suppondo $z = x + iy$, quando é $e^{2y} < 1$, ou $y < 0$. N'este caso porém o numero de termos das formulas precedentes é infinito, e dão portanto o desenvolvimento de $sen^k z$ em série ordenada segundo os senos ou os cosenos dos arcos multiplos de z. Esta especie de séries de que aqui apparece o primeiro exemplo, tem uma importancia grande em Analyse, e serão estudadas n'outra parte do Curso.

Partindo da igualdade

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = (-1)^k e^{-kiz} (1 - e^{2iz})^k$$

obtem-se, como no caso anterior, as formulas que dão o desenvolvimento de $sen^k z$ em série ordenada segundo os senos ou os cosenos dos arcos multiplos de z quando é $y > 0$.

II — Por uma analyse semilhante á que vem de ser empregada se acha as formulas:

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=0}^{k} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z$$

quando k é inteiro e positivo, e

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=0}^{\infty} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z$$

quando k é negativo ou fraccionario.

II — Reciprocamente, da igualdade

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \operatorname{sen} kz,$$

onde k é inteiro e positivo, deduz-se, desenvolvendo a potencia do binomio que entra no primeiro membro e igualando separadamente as partes reaes e as partes imaginarias dos seus dois membros,

$$\operatorname{sen} kz = k \cos^{k-1} z \operatorname{sen} z - \binom{k}{3} \cos^{k-3} z \operatorname{sen}^3 z$$

$$+ \binom{k}{5} \cos^{k-5} z \operatorname{sen}^5 z - \ldots$$

$$\cos kz = \cos^k z - \binom{k}{2} \cos^{k-2} z \operatorname{sen}^2 z$$

$$+ \binom{k}{4} \cos^{k-4} z \operatorname{sen}^4 z - \ldots$$

O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito.

133. — *Desenvolvimento da exponencial.* — Por um calculo semilhante ao empregado no caso das variaveis reaes (n.º 92) acha-se a formula

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{z^n}{n!} e^{\theta z}.$$

Pondo $z = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$, acha-se que o módulo de R_n é

$$\frac{\rho^n}{n!} e^{\theta\rho \cos \omega},$$

e portanto que R_n tende para zero quando n tende para o infinito, qualquer que seja o valôr de z. Logo e^z é sempre susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a!}.$$

134. — *Desenvolvimento do log* $(1+z)$. — Applicando a formula de Taylor a esta funcção, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{z^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{1+\theta z} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de *log* $(1+z)$ cujo valôr inicial é igual a zero.

Raciocinando agora como no n.º 93 vê-se que se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em série

$$\log(1+z) = \sum_{a=1}^{\infty} (-1)^{a-1} \frac{z^a}{a},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta série é divergente.

135. — *Desenvolvimento do seno e do coseno em série.* — Por meio de uma analyse semilhante á que foi empregada no caso das variaveis reaes, é facil de vêr que as séries achadas no n.º 94 para o seno e o coseno de uma variavel real, ainda têem logar quando a variavel é imaginaria.

IV

Outros methodos para desenvolver as funcções em série

136. — O processo anterior para achar o desenvolvimento das funcções em série é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n, que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no Calculo Integral, e ainda a um theorema importante, devido ao snr. Weierstrass, que aqui vamos demonstrar.

Demonstremos porém primeiro os dous lemmas seguintes:

Lemma 1.º — É condição necessaria e sufficiente para que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$$

seja uniformemente convergente n'uma área dada, que a cada valôr da quantidade positiva δ, *por mais pequena que seja, corresponda um valôr* n_1 *de* n *tal que a desigualdade*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valôres de n *superiores a* n_1, *qualquer que seja* p *e qualquer que seja o ponto que* z *represente na área considerada.*

Deduz-se facilmente este lemma da igualdade (n.º 9)

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)|$$

$$< + \sqrt{(x_{n+1} + \ldots + x_{n+p})^2 + (y_{n+1} + \ldots + y_{n+p})^2}.$$

Com effeito, se a série proposta fôr uniformemente con-

vergente na área considerada, a cada valôr de δ' e de δ'' por mais pequenos que sejam corresponderá um valôr n_1 de n (n.º 17) tal que as desigualdades

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} < \delta', \; y_{n+1} + \ldots + y_{n+p} < \delta''$$

serão satisfeitas (em valôr absoluto) por todos os valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p e qualquer que seja z dentro da área considerada. Logo tambem a desigualdade

$$| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) | < + \sqrt{\delta'^2 + \delta''^2}$$

será satisfeita pelos mesmos valores de n, p e z, o que demonstra a primeira parte do theorema, visto que se póde sempre pôr $\delta = + \sqrt{\delta'^2 + \delta''^2}$.

Reciprocamente, se δ' e δ' representarem dous numeros positivos tão pequenos quanto se queira, e δ um numero positivo menor do que δ' e δ', e se fôr

$$| f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) | < \delta$$

quando $n \overline{\overline{<}} n_1$, qualquer qne seja p e qualquer que seja o ponto representado por z dentro da área considerada, virá

$$(x_{n+1} + \ldots + x_{n+p})^2 + (y_{n+1} + \ldots + y_{n+p})^2 < \delta^2;$$

logo as desigualdades

$$x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} < \delta < \delta', \; y_{n+1} + \ldots + y_{n+p} < \delta < \delta''$$

serão satisfeitas (em valôr absoluto) pelos mesmos valores de n, p e z. A série proposta é pois uniformemente convergente na área considerada (n.º 17).

Lemma 2.º — Se a série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \; z = x + iy$$

fôr convergente n'um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que têem o mesmo módulo ρ, o módulo de F (z) fôr menor do que uma quanti-

dade positiva L, *o módulo de cada termo da série será tambem menor do que* L.

Com effeito, multiplicando a série proposta por z^{-m}, vem

$$z^{-m}F(z)=\sum_{n=1}^{m-1}c_n z^{n-m}+c_m+\sum_{n=m+1}^{\infty}c_n z^{n-m}$$

$$=\sum_{n=1}^{m-1}c_n z^{n-m}+c_m+\sum_{n=m+1}^{k}c_n z^{n-m}+R\,,$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é

$$|\,z^{-m}F(z)\,|<L\rho^{-m}\,,$$

e como, por mais pequeno que seja o valôr que se attribua a uma quantidade positiva δ, ha sempre um valôr k_1 tal que é $|\,R\,|<\delta$, quando $k>k_1$, teremos (n.º 9)

$$|\,z^{-m}F(z)-R\,|<L\rho^{-m}+\delta\,,$$

ou

$$\left|\sum_{n=1}^{m-1}c_n z^{n-m}+c_m+\sum_{n=m+1}^{k}c_n z^{n-m}\right|<L\rho^{-m}+\delta\,.$$

Dando agora n'esta desigualdade a z os valores

$$z=\rho,\ \rho e^{i\theta},\ \rho e^{2i\theta},\ \ldots,\ \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valôr maior do que os differentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z, temos as desigualdades

$$\left|\sum_{n=1}^{m-1}c_n \rho^{n-m}+c_m+\sum_{n=m+1}^{k}c_n \rho^{n-m}\right|<L\rho^{-m}+\delta$$

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} \right|$$

$$< L\rho^{-m} + \delta$$

. . . .

que dão, sommando e attendendo ao theorema 1.º do n.º 9,

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right) \right.$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right)$$

$$\left. + ac_m \right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A$$

e dando a θ um valôr que não seja raiz da equação $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, isto é, um valôr tal que A seja finito,

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A \rho^{n-m} \right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta)$$

ou

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desigualdade precedente independente de c_m.

D'esta desigualdade tira-se

$$|\, c_m \,| \overline{\overline{<}} L\rho^{-m} + \delta\,;$$

porque, se fosse

$$|c_m| > L\rho^{-m} + \delta,$$

podia dar-se a a um valôr tão grande que fosse

$$|c_m| - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

ou *a fortiori*

$$\left|c_m + \frac{B}{a}\right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.° 9)

$$\frac{|B|}{a} + \left|c_m + \frac{B}{a}\right| \overline{\overline{>}} \left|c_m\right|.$$

Da desigualdade

$$|c_m| \overline{\overline{<}} L\rho^{-m} + \delta$$

tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $|c_m| > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valôr tão pequeno que fosse

$$|c_m| > L\rho^{-m} + \delta.$$

137. — *Theorema.* — *Se uma funcção* f (z) *fôr susceptivel de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um circulo de raio* R :

$$(1) \qquad f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots,$$

e se as funcções P_0 (z), P_1 (z), *etc. forem susceptiveis de ser desenvolvidas em séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de* z, *convergentes dentro do mesmo circulo:*

$$P_0(z) = A_0^0 + A_1^0 z + A_2^0 z^2 + \ldots + A_m^0 z^m + \ldots$$

....

$$(2) \quad P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + A_2^{(n)} z^2 + \ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots$$

....,

a funcção f(z) *será tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de* z:

$$(3)\quad f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m + \dots$$

e será

$$(4)\qquad A_m = A^0_m + A_m^{(1)} + \dots + A_m^{(n)} + \dots$$

Este theorema foi demonstrado pelo snr. Weierstrass da maneira seguinte (*):

Seja ρ uma quantidade positiva menor do que R; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ρ, a cada valôr da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr n_1 de n tal que a desigualdade

$$|\, P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \dots + P_{n+p}(z) \,| < \delta$$

será satisfeita por todo o valôr de n igual ou superior a n_1 e por todos os valores de z que têem o módulo ρ, qualquer que seja p.

Mas temos (n.° 15)

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) + \dots + P_{n+p}(z) &= A_0^{(n+1)} + A_0^{(n+2)} + \dots + A_0^{(n+p)} \\ &+ z\,(A_1^{(n+1)} + A_1^{(n+2)} + \dots + A_1^{(n+p)}) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ z^m (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)}) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Logo, em virtude do lemma precedente, temos a desigualdade

$$|\, A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \dots + A_m^{(n+p)} \,| < \delta\rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da série (4).

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja

(*) *Monatsberichte der Kön. Akademie de Wissenschaften zu Berlin* — 1880.

$$R > \rho_1 > \rho,$$

podemos dar a n um valôr tal que seja tambem

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}| < \delta\rho_1^{-m}$$

por maior que seja p; e portanto

$$\left|\lim_{p=\infty}\left((A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)})\right)\right| \overline{\overline{<}} \delta\rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} = A'_m$$

$$\lim_{p=\infty}\left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) = A''_m$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m$$

e

$$|A''_m| \overline{\overline{<}} \delta\rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1, a desigualdade

$$|A''_0| + |A''_1 z| + \ldots + |A''_m z^m| + \ldots$$

$$\overline{\overline{<}} \delta\left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \ldots\right] \overline{\overline{<}} \delta\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue que (n.° 13, 2.°) a série:

$$A''_0 + A''z + \ldots + A''_m z^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é tambem convergente (n.° 15) a série

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) = A_0^{(0)} + A_0^{(1)} + \ldots + A_0^{(n)}$$

$$+ z(A_1^{(0)} + A_1^{(1)} + \ldots + A_1^{(n)})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ z^m (A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_m z^m + \ldots$$

Temos pois

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m$$

$$= \sum_{a=0}^{n} P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m$$

e portanto (n.º 9, 1.º)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| \overline{<} \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valôr tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a igualdade (3), que se queria demonstrar.

138. — *Exemplo 1.º* — A funcção

$$f(z) = \text{sen}(\text{sen}\, z)$$

(já considerada no n.º 94 no caso de ser z real e $|z| < 1$), dá a série

$$f(z) = 1 - \text{sen}\, z + \frac{\text{sen}^3 z}{3!} - \frac{\text{sen}^5 z}{5!} + \ldots$$

que é uniformemente convergente qualquer que seja z (n.° 17). A funcção

$$\operatorname{sen}^n z = \left(1 - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.° 15) em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z. Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a funcção sen (sen z) póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z.

Exemplo 2.° — A funcção

$$f(z) = e^{(1 + z)^k}$$

dá a série uniformemente convergente, qualquer que seja z,

$$f(z) = 1 + (1 + z)^k + \frac{(1 + z)^{2k}}{2!} + \frac{(1 + z)^{3k}}{3!} + \ldots$$

1) Se k é inteiro positivo, cada termo d'esta série póde ser desenvolvido segundo as potencias de z, qualquer que seja o valôr de z, e portanto o mesmo acontece á funcção proposta.

2) Se k é negativo ou fraccionario, cada termo da série póde ser desenvolvido segundo as potencias de z, quando o módulo de z é menor do que a unidade. Logo a funcção proposta é tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z, quando é $|z| < 1$.

Exemplo 3.° — Vê-se do mesmo modo que a funcção

$$f(z) = \operatorname{sen}[\log(z + 1)]$$

póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z quando o módulo de z é menor do que a unidade.

139. — Applicando o theorema precedente ás séries ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz-se, como vamos vêr, o theorema seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior de um circulo de centro a *e raio* R, *isto é, quando* $| z - a | < R$, *e se* z_0 *representar um ponto do interior d'este circulo, as derivadas* $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, *etc. serão respectivamente iguaes ás sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da série proposta, isto é:*

$$f'(z_0) = c_1 + 2\,c_2\,(z_0 - a) + \ldots + n\,c_n\,(z_0 - a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(z_0) = 2\,c_2 + 3.2\,c_3\,(z_0 - a) + \ldots + n\,(n-1)\,c_n\,(z_0 - a)^{n-2} + \ldots$$

....

Em segundo logar, se fôr $| z_0 - a | + | z - z_0 | < R$, *teremos*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,f'(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n\,!}\,f^n(z_0) + \ldots$$

Com effeito, pondo na série proposta $z = z_0 + h$, teremos

$$f(z_0 + h) = c_0 + c_1\,(z_0 + h - a) + \ldots$$
$$+ c_n\,(z_0 + h - a)^n + \ldots$$

Esta série, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando é $| z_0 + h - a | < R$, ou *a fortiori* (n.° 9, 1.°) quando é $| z_0 - a | + | h | < R$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0 + h) = f_0(z_0) + h f_1(z_0) + h^2 f_2(z_0) + \ldots$$

onde é

$$f_0(z_0) = c_0 + c_1\,(z_0 - a) + \ldots + c_n\,(z_0 - a)^n + \ldots$$

$$f_1(z_0) = c_1 + 2\,c_2\,(z_0 - a) + \ldots + n\,c_n\,(z_0 - a)^{n-1} + \ldots$$

....

Pondo agora $h = z - z_0$, vem

$$f(z) = f_0(z_0) + (z - z_0) f_1(z_0) + \ldots + (z - z_0)^n f_n(z_0) + \ldots$$

com a condição $| z_0 - a | + | z - z_0 | < R$.

Para das formulas precedentes tirar o theorema enunciado basta notar que é (n.º 130)

$$f_0(z_0) = f(z_0),\ f_1(z_0) = f'(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0) = \frac{f^n(z_0)}{n!},\ \ldots$$

Corollario.—Se a série

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior do circulo de raio R *e centro* a, *a funcção será continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita e determinada.

140.—A respeito das derivadas das séries enunciaremos ainda o theorema seguinte, que se demonstra do mesmo modo que o theorema análogo relativo ás funcções de variaveis reaes (n.º 124):

Theorema.—Se a série

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

fôr convergente n'uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a série seguinte formada com as derivadas dos termos da precedente:

$$f'_1(z) + f'_2(z) + \ldots + f'_n(z) + \ldots,$$

será

$$f'(z) = f'_1(z) + f'_2(z) + \ldots + f'_n(z) + \ldots$$

na mesma área.

V

Funcções regulares n'uma região do plano

141. — *Definições.* — Se a funcção $f(z)$, na vesinhança do ponto z_0, fôr susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, de modo que haja um numero positivo R tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots$$

quando $| z - z_0 | < R$, diz-se que *a funcção* $f(z)$ *é regular no ponto* z_0.

E' facil de vêr que $(1 + z)^k$, e^z, $\log(1 + z)$ etc. são funcções regulares em todo o plano excepto em pontos isolados.

1) O binomio $(1 + z)^k$ dá

$$(1 + z)^k = (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k$$

$$= (1 + z_0)^k \sum_n \binom{k}{n} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^k$$

quando $| z - z_0 | < | 1 + z_0 |$; e portanto é regular em todo o plano, excepto no ponto $z_0 = -1$.

2) Da série

$$e^{z - z_0} = 1 + (z - z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \ldots$$

tira-se

$$e^z = e^{z_0} \left[1 + (z - z_0) + \ldots + \frac{(z - z)^n}{n!} + \ldots\right];$$

portanto e^z é uma funcção regular em todo o plano.

3) Da igualdade

$$\log(1+z) = \log(1+z_0) + \log\left(1 + \frac{z-z_0}{1+z_0}\right)$$

$$= \log(1+z_0) + \frac{z-z_0}{1+z_0} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^2 + \dots,$$

que tem logar quando é $|z - z_0| < |1 + z_0|$, conclue-se que *log* $(1+z)$ é uma funcção regular em todo o plano excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que *sen z* e *cos z* são funcções regulares em todo o plano.

142. — *Theorema 1.º—Se uma funcção uniforme, regular em todos os pontos de uma área* A, *fôr constante em todos os pontos de uma linha finita contida na área* A, *será constante em toda a área.*

Este theorema é devido a Neumann, e foi por elle demonstrado do modo seguinte:

Representando por a o valôr de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

ou (n.º 130)

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^n(a) + \dots$$

Mas por ser constante a funcção $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, \text{ etc.}$$

Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente demonstra-se do mesmo modo que é $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z)$

$= f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contôrno da área A demonstra-se completamente o theorema.

Theorema 2.º — Se duas funcções uniformes regulares em todos os pontos de uma área A, *forem iguaes em todos os pontos de uma linha finita contida na área* A, *serão iguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A.

Theorema 3.º — Se uma funcção uniforme regular no ponto a *se anulla assim como as suas derivadas até á ordem* m — 1, *quando é* z = a, *teremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$$

onde φ (z) *é uma funcção uniforme regular na vesinhança do ponto* a.

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \dots + c_m (z - a)^m + \dots$$

e $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, ..., teremos

$$f(z) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{(z - a)}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \dots\right]$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

Theorema 4.º — Os pontos em que uma funcção uniforme regular n'uma área A *têem um mesmo valôr, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A, as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas iguaes a zero. Chamando pois $f^m(a)$ a primeira derivada que não se annulla, teremos a differença

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z - a}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \dots\right]$$

onde é possivel dar a $|z - a|$ um módulo tão pequeno δ, que o módulo do seu primeiro termo seja maior que o módulo

da somma dos seguintes quando $| z - a | \overline{\overline{<}} \delta$. Logo na circumferencia de centro a e raio δ a differença $f(z) - f(a)$ não póde ser nulla.

Theorema 5.° — A somma de duas expressões uniformes regulares em todos os pontos da área A, é uma expressão regular nos mesmos pontos.

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema do n.° 15. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A, teremos

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \ldots + c_n (z - a)^n + \ldots$$

$$F(z) = C_0 + C_1 (z - a) + \ldots + C_n (z - a)^n + \ldots$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = C_0 + c_0 + (C_1 + c_1)(z - a) + \ldots$$

Theorema 6.° — O producto de duas expressões uniformes regulares em todos os pontos da área A é uma expressão regular nos mesmos pontos.

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior partindo do theorema 5.° do n.° 15.

Theorema 7.° — O quociente de duas expressões $\varphi(z)$ *e* $\psi(z)$ *uniformes e regulares na área A será regular nos pontos da mesma área em que o denominador* $\psi(z)$ *se não annulla.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \ldots + c_n (z - a)^n + \ldots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[1 + \frac{(z - a)(c_1 + c_2 (z - a) + \ldots)}{c_0}\right]^{-1}$$

$$= c_0 [1 + P(z - a)]^{-1},$$

pondo

$$\frac{(z - a)(c_1 + c_2 (z - a) + \ldots)}{c_0} = P(z - a).$$

Dando a $|z - a|$ um valôr tão pequeno que seja $|P(z-a)| < 1$, podemos desenvolver $[\psi(z)]^{-1}$ em série ordenada segundo as potencias de $z - a$, e teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 [1 - P(z-a) + (P(z-a))^2 - (P(z-a))^3 + \ldots]$$

Esta série é uniformemente convergente na vesinhança do ponto a assim como (n.º 15) as séries que resultam de $P(z-a)$, $(P(z-a))^2$, etc.; logo (n.º 137) a funcção $\frac{1}{\psi(z)}$ é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z - a$ na vesinhança do ponto a. Esta funcção é pois regular no ponto a assim como, em virtude do theorema anterior, a funcção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(z) \cdot \frac{1}{\psi(z)}$.

VI

Funcções regulares em todo o plano

143. — A toda a funcção uniforme $f(z)$ regular em todos os pontos do plano chama-se *funcção inteira*. Taes são, entre as funcções algebricas, os polynomios raccionaes inteiros relativamente a z, e, entre as funcções transcendentes, as funcções e^z, sen z, cos z e, em geral, as funcções que podem ser desenvolvidas na série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

qualquer que seja z. Com effeito, estas funcções são regulares em todos os pontos do plano, pois que, desenvolvendo segundo as potencias de $z - a$ os termos da série

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - a + a) + \ldots + c_n (z - a + a)^n + \ldots,$$

obtem-se, em virtude do theorema do n.º 137, o desenvolvi-

mento de $f(z)$ com série ordenada segundo as potencias de $z - a$, qualquer que seja a.

A theoria das funcções transcendentes inteiras é a continuação natural da theoria das funcções racionaes inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, análogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptiveis de se exprimir por um producto de factores que tornam explicitas as raizes da funcção. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, etc. em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido pelo snr. Weierstrass (*). Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlin, vamos considerar as duas funcções *sen* z e *cos* z cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtem por considerações particulares.

144. — *Decomposição do seno e do coseno em factores.* — Principiemos por demonstrar o lemma seguinte:

Se u_1, u_2, etc. representarem funcções de z cujos módulos sejam menores do que um numero positivo L, o producto

$$\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{u_n}{n^2}\right)$$

tenderá para a unidade, quando m tende para o infinito.

Com effeito, temos

$$\sum_1^{\infty}\frac{|u_n|}{n^2} < L\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

ou, reunindo os termos do segundo membro em grupos de $1, 2, 4, \ldots, 2^a, \ldots$ teremos,

$$\sum_1^{\infty}\frac{|u_n|}{n^2} < L\left[1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{7^2}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{(2^a)^2}+\frac{1}{(2^a+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{a+1}-1)^2}\right)+\ldots\right],$$

ou *a fortiori*, notando que a somma dos termos de cada

(*) Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veranderlichen* (*Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin* — 1876).

grupo é menor do que o producto do primeiro termo do grupo pelo numero de termos,

$$\sum_1^{\infty} \frac{|u^n|}{n^2} < L\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^a} + \ldots\right]$$

d'onde

$$\sum_1^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} < 2L.$$

Logo a série $\sum_1^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2}$ é convergente (n.º 12—1.º), e portanto (n.os 18 e 20) é tambem convergente o producto

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right),$$

e temos

$$\lim_{m=\infty} \prod_m^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim\limits_{m=\infty} \prod_1^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1 .$$

Posto isto, vamos decompôr a funcção *sen* x em factores.

Da expressão de *sen* kz dada no n.º 132 — III tira-se, quando k é impar, pondo $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$,

$$\operatorname{sen} kz = f(\operatorname{sen} z),$$

onde $f(\operatorname{sen} z)$ representa uma funcção inteira do gráo k. Os valores de *sen* z, em numero k, que annullam esta funcção devem corresponder aos valores de z que satisfazem á equação *sen* $kz = 0$ e que dão para *sen* z valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes:

$$0, \pm \frac{\pi}{k}, \pm \frac{2\pi}{k}, \ldots, \pm \frac{(k-1)\pi}{2k}.$$

Logo temos

$$\operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right),$$

ond A é uma constante que vamos determinar. Para isso, devida-se os dous membros da igualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

Mudando na equação precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, teremos a equação

$$\operatorname{sen} \pi z = k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right).$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta equação quando k tende para o infinito.

Por tender para a unidade a razão do seno para o arco quando o arco tende para zero, é facil de vêr que, quando k tende para o infinito, teremos

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2}\right) \lim_{k=\infty} R_m$$

pondo

$$R_m = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{m\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right).$$

Consideremos um factor qualquer de R_m, isto é, o factor

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}}$$

onde é $n \overline{\overline{>}} m$ e $n \overline{\overline{<}} \frac{k-1}{2}$. Por ser (n.º 135)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^3}{3\,!} \cos \theta \frac{n\pi}{k}$$

$$= \frac{n\pi}{k} \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right),$$

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valôr absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2} (1 + \varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena quando k é infinitamente grande, teremos

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = 1 - \frac{z^2 (1 + \varepsilon)^2}{n^2 \left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right)^2} = 1 + \frac{u_n}{n^2}$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não póde ser infinito qualquer que seja n. Logo, em virtude do lemma anterior, o producto

$$R_m = \prod_m^\infty \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$$

tende para a unidade quando m tende para o infinito.

O producto

$$\pi z \left(1 - \frac{z^2}{1}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2}\right)$$

tenderá pois para $\operatorname{sen} \pi z$ quando m tende para o infinito, e teremos a formula d'Euler:

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Do mesmo modo se decompõe $\cos \pi z$ em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

145. — *Theorema de Weierstrass.* — *Sendo dada a série de quantidades* $0, a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e que satisfaçam á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *pode-se construir uma funcção transcendente inteira pela formula*

$$(1) \qquad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{S_c}, \quad S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

cujas raizes são $0, a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *e cujos respectivos gráos de multiplicidade são* $n_0, n_1, \ldots, n_c, \ldots$

Reciprocamente, se $f_1(z)$ *representar uma funcção inteira cujas raizes são* $0, a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *e os respectivos gráos de multiplicidade* $n_0, n_1, \ldots, n_c, \ldots$, *esta funcção póde ser decomposta em factores que tornam explicitas estas raizes por meio da formula*

$$(2) \qquad f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{S_c},$$

onde $\varphi(z)$ *representa uma funcção inteira.*

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida ao sr. Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm (*).

Da série (n.° 134)

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = - n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$, deduz-se

$$(A) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c(1,\infty)}$$

(*) *Acta Mathematica*, tomo IV.

pondo para brevidade

$$S_c(u, \nu) = \sum_{k=u}^{\nu} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k .$$

Logo temos

$$(B) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c + 1, \infty)},$$

onde m_c representa um numero inteiro ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_c S(1, m_c)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valôr tão grande que seja

$$(C) \qquad n_c \mid S_c(m_c + 1, \infty) \mid < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valôr que se dê a z, que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possivel por ser n'este caso uniformemente convergente a série $S_c(1, \infty)$. O producto $\Pi\, E_c$, pondo

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representará uma funcção regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, como vamos vêr.

Consideremos um ponto qualquer z_0 do plano, e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem á condição $\mid z - z_0 \mid \overline{\overline{<}} \rho$, onde ρ é uma quantidade finita tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim_{c=\infty} a_c = \infty$, é sempre possivel dar a c_1 um valôr tão grande que a desigualdade

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$$

seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1, qualquer que seja o valôr de z que satisfaça á condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a série $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c_2 um valôr tão grande que, dando a δ um valôr tão pequeno quanto se queira, a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2, qualquer que seja p.

Logo as duas desigualdades precedentes serão satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Das desigualdades precedentes e da desigualdade (C) conclue-se que a desigualdade

$$(D) \qquad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t S_t (m_t + 1, \infty) \right| < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2 na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Por outra parte, a formula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t (m_t + 1, \infty)}$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = - \sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t (m_t + 1, \infty),$$

e, em virtude da desigualdade (D),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log E_t \right| < \delta .$$

Logo a série

$$\sum_{l=1}^{\infty} \log E_l$$

é (n.º 136) uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é differente de a_c e que a ρ se dá um valôr tão pequeno que seja

$$| z - z_0 | < | z_0 - a_c | .$$

O segundo membro da igualdade

$$\log E_c = n_c \log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n_c \log \left(1 - \frac{z_0}{z_c}\right)$$

$$+ n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

será susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, e temos (*)

$$\log E_c = P (z - z_0),$$

e portanto, applicando o theorema do n.º 137,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1 (z - z_0) ,$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1 (z - z_0)}.$$

D'esta formula tira-se depois

(*) Empregaremos, como o sr. Weierstrass, as notações $P (z - z_0)$, $P_1 (z - z_0)$, etc. para representar séries ordenadas segundo as potencias inteiras positivas de $z - z_0$.

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \ldots + \frac{P_1^n(z - z_0)}{n!} + \ldots$$

ou (n.° 137)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a funcção $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0, como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valôr tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| \overline{<} \rho$ não exista outra raiz da funcção considerada, teremos

$$\frac{\prod_1^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j; e portanto

$$\prod_1^{\infty} E_c = (z - a_j)^{n_j} e^{P_4(z - a_j)},$$

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a funcção $\prod_1^{\infty} E_c$ é regular no ponto a_j.

As raizes a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar, são todas differentes de zero. Para que a funcção tenha tambem a raiz 0 basta multiplicar $\prod_1^{\infty} E_c$ por z^{n_0}. Com effeito, temos (n.° 15)

$$z^{n_0} \prod_1^{\infty} E_c = (z_0 + z - z_0) P_2(z - z_0) = P_5(z - z_0),$$

e portanto a nova funcção que se obtem é ainda regular em todo o plano.

De tudo o precede conclue-se a primeira parte do theorema do sr. Weirstrass, isto é, que se póde constituir pela formula (1) uma funcção que se comporta regularmente em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, a_1, a_2, etc.

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ da funcção $f_1(z)$ dada pela funcção $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nulla nem infinita em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.° 142—7.°) uma funcção $F(z)$ regular em todo o plano que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na vesinhança do ponto z_0,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

onde b_0 é differente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log \left[1 + \frac{(z - z_0)(b_1 + b_2(z - z_0) + \dots)}{b_0}\right].$$

Logo se a $|z - z_0|$ se der um valôr tão pequeno que seja

$$\frac{|z - z_0|\,|b_1 + b_2(z - z_0) + \dots|}{|b_0|} < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.° 137,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a funcção $\log F(z)$ é inteira. Temos pois

$$\log F(z) = \varphi(z)$$

o que dá

$$F(z) = e^{\varphi(z)},$$

e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} \,.\, f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

146. — *Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) S_c$$

que entram na formula (2), chama o sr. Weierstrass um *factor primario* da funcção considerada $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma funcção inteira dada em factores primarios, como para achar uma funcção inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valôr de c, um valôr de m_c que satisfaça á desigualdade (C), e para isso basta, como vamos vêr, dar a m_c um valôr tal que seja convergente a série

$$(D) \qquad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c \, z^{m_c + 1}}{a_c^{m_c + 1}} \right| .$$

Com effeito, se esta série é convergente, podemos dar a ε_c o valôr

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c \, z^{m_c + 1}}{a_c^{m_c + 1}} \right| ,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c.

Mas por ser

$$n_c \left| \sum_{k = m_c + 1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k = m_c + 1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k = m_c + 1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c \, z^{m_c + 1}}{a_c^{m_c + 1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$$

a desigualdade (C) póde ser substituida pela seguinte:

$$(E) \qquad \left|\frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c,$$

que é satisfeita, visto que se póde dar a λ o valôr maximo que toma $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, isto é, o valôr $\frac{1}{1-\varepsilon}$.

Se houver pois um valôr de m_c, constante qualquer que seja c, tal que a série (D) seja convergente, emprega-se este valôr em todos os termos das formulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$.

Com effeito, a série (D) transforma-se então na série

$$\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{n_c z^{c+1}}{a_c^{c+1}}\right|$$

que é convergente (n.º 14, 4.º) visto que a raiz

$$\sqrt[c]{n_c \left|\frac{z}{a_c}\right|^{c+1}}$$

tende para zero quando c tende para o infinito.

147. — *Exemplo.* — Para applicar o theorema do sr. Weirstrass, procuremos a fórma geral das funcções inteiras cujas raizes são:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,\ c,\ -c,\ \ldots$$

Como a série $\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{c^2}$ é convergente qualquer que seja z (n.º 144), podemos pôr $m_c = z$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)}\, z \prod_{c=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{c}\right)e^{\frac{z}{c}}\left(1+\frac{z}{c}\right)e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira.

Faz parte das funcções comprehendidas na fórma precedente a funcção sen πz. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.° **144**).

148. — *Caso em que m_c é constante.* — No caso de m_c ser constante, a funcção (2) tem propriedades notaveis que foram estudadas pelos srs. Laguerre, Cesàro, etc. A respeito d'estas funcções limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z)$ são reaes, tambem as raizes de $f'_1(z)$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c = 0$ e $m_c = 1$, e em seguida pelo sr. Cesàro, professor na Universidade de Palermo, no caso de m_c representar uma constante qualquer (*Giornale di Mathematiche* — tomo XXII).

A formula (2) dá

$$\log f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[n_c \log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right].$$

Sommando as derivadas dos termos do segundo membro d'esta igualdade vem, suppondo $\varphi(z)$ constante,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left[\frac{n_c}{z - a_c} + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{a_c} \left(\frac{z}{a_c}\right)^{k-1} \right]$$

ou

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z - a_c} = -\frac{1}{a_c}\left[1 + \frac{z}{a_c} + \ldots + \left(\frac{z}{a_c}\right)^{m_c - 1}\right]$$

$$+ \frac{1}{a_c^{m_c}} \frac{z^{m_c}}{(z - a_c)}.$$

Por outra parte, da convergencia da série (D) conclue-se a convergencia da série

$$\lambda \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right|;$$

e portanto a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr c_1 de c tão grande que as desigualdades

$$\lambda \sum_{t=1}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| < \delta, \left| \frac{z}{a_t} \right| < \varepsilon, |z| < \rho$$

serão satisfeitas pelos valores de c superiores a c_1, qualquer que seja p e por maior que seja o valôr que se dê a ρ. Logo *a fortiori* teremos finalmente

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_t} \right|} < \delta$$

visto que λ representa o maximo valôr de $\dfrac{1}{1 - \left|\dfrac{z}{a_t}\right|}$; depois

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a_t}\right|} < \delta,$$

por ser

$$\left|1-\frac{z}{a_t}\right|>1-\left|\frac{z}{a_t}\right|;$$

e finalmente

$$\sum_{t=c}^{c+p}\left|\frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t}(z-a_t)}\right|<\delta.$$

Logo a série (F) é uniformemente convergente qualquer que seja ρ, isto é, em todo o plano.

Do que precede e do theorema do n.° 140 conclue-se

$$\frac{f'_1(z)}{f_1(z)}=\sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)}.$$

Posto isto, suppondo m_c constante e igual a m, e chamando z_1 uma qualquer das raizes da equação $f'_1(z)=0$ teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c z_1^{m}}{a_c^{m}(z_1-a_c)}=0,$$

ou, pondo $z_1=\rho(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega)$,

$$\sum_{c=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m\cdot\frac{n_c(\cos m\omega+i\operatorname{sen}m\omega)}{\rho\cos\omega-a_c+i\rho\operatorname{sen}\omega}=0.$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes das quaes uma determina ρ e a outra ω:

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c}{d_c}\left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m\Big\{\rho\cos(m-1)\omega-a_c\cos m\omega\Big\}=0$$

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c}{d_c}\left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m\Big\{\rho\operatorname{sen}(m-1)\omega-a_c\operatorname{sen}m\omega\Big\}=0$$

pondo

$$d_c=(\rho\cos\omega-a_c)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\omega.$$

Se m é impar, multiplicando a primeira d'estas desigualdades por sen $(m - 1)\,\omega$, a segunda por cos $(m - 1)\,\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m-1}} = 0$$

d'onde se tira $\omega = 0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por sen $m\omega$, a segunda por cos $m\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m}} = 0$$

d'onde se tira tambem $\omega = 0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1 = \rho$. As raizes de $f'_1(z) = 0$ são portanto reaes, como se queria demonstrar.

VI

Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

149. — Das funcções uniformes não inteiras limitar-nos-hemos a estudar aqui as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ taes que seja $\lim\limits_{c=\infty} |a_c| = \infty$, na vesinhança dos quaes tenhamos

$$f(z) = P(z - a_c) + G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right)$$

onde

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = B_1\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + B_2\left(\frac{1}{z - a_c}\right)^2 + \ldots$$
$$+ B_m\left(\frac{1}{z - a_c}\right)^m.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da funcção, e foram chamados pelo sr. Weierstrass *pólos* quando m é finito, *pontos singulares essenciaes* quando m é infinito. N'outra parte d'este Curso veremos a relação que ha entre estes pontos e os pontos singulares do n.º 22.

As funcções consideradas resultam naturalmente da generalisação das funcções racionaes. Na verdade, toda a funcção racional $f(z)$ é susceptivel da decomposição (n.º 27)

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + \Sigma \frac{B}{(z - a_2)^b} + \ldots;$$

se agora z_0 representar um ponto differente de a_1, a_2, etc., temos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z_0 - a_1)^a} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a}$$

$$+ \Sigma \frac{B_b}{(z_0 - a_2)^b} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_2}\right)^{-b} + \ldots$$

d'onde resulta (n.os 132 e 15)

$$f(z) = P(z - z_0).$$

e a funcção é portanto regular na vesinhança de z_0: se porém z_0 representa um dos pontos a_1, a_2, etc., a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só ás parcellas correspondentes a a_2, a_3, etc. vem um resultado da fórma

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem tambem ao grupo de funcções que estamos considerando as funcções que são o quociente de duas funcções transcendentes inteiras $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$, isto é, as funcções da fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

Com effeito, sendo a_1, a_2, ..., a_c, ... as raizes do de-

nominador e n_1, n_2, ..., n_c, ... os seus respectivos gráos de multiplicidade, a funcção $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano differente dos pontos a_1, a_2, etc. (n.° 142 — 7.°); e, na vesinhança do ponto a_c, teremos (n.° 145)

$$f_1(z) = \frac{P(z - a_c)}{(z - a_c)^{n_c} e^{P_1(z - a_c)}}$$

$$= \frac{a_0 + a_1(z - a_c) + a_2(z - a_c)^2 + \dots}{(z - a_c)^{n_c}}$$

$$= G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_2(z - a_c) .$$

Logo a funcção considerada é regular em todo o plano excepto nos pontos a_1, a_2, ..., a_c, ..., que são pólos.

150. — Para saber se um ponto a_c no qual a funcção $f(z)$ se torna infinita, é um pólo, pode-se seguir dous caminhos. O primeiro consiste em procurar se ha uma potencia de $z - a_c$ tal que o producto de $f(z)$ por essa potencia de $z - a_c$ dê uma funcção que seja regular na vesinhança do ponto a_c. Com effeito, no caso de a_c ser um pólo de $f(z)$, temos (n.° 149)

$$(z - a_c)^m f(z) = (z - a_c)^m P(z - a_c)$$

$$+ B_1(z - a_c)^{m-1} + B_2(z - a_c)^{m-2} + \dots + B_m ;$$

e reciprocamente, se $(z - a_c)^m f(z)$ é regular na vesinhança do ponto a_c, temos

$$(z - a_c)^m f(z) = A_0 + A_1(z - a_c) + \dots + A_m(z - a_c)^m + \dots,$$

o que dá um resultado da fórma

$$f(z) = P(z - a_c) + \frac{A_0}{(z - a_c)^m} + \frac{A_1}{(z - a_c)^{m-1}} + \dots$$

$$+ \frac{A_{m-1}}{z - a_c} .$$

O segundo processo consiste em procurar se a funcção

$\frac{1}{f(z)}$ é nulla e regular no ponto a_c. Com effeito, se a_c fôr um pólo, temos (n.º 149)

$$\frac{1}{(z-a_c)^m f(z)} = \frac{1}{B_m}\left[1+\frac{(z-a_c)\varphi(z)}{B_m}\right]^{-1},$$

pondo para brevidade

$$\varphi(z) = B_{m-1} + B_{m-2}(z-a_c) + \ldots + B_1(z-a_c)^{m-2} + (z-a_c)^{m-1} P(z-a_c).$$

Dando agora a $(z-a_c)$ um valôr tão pequeno que seja

$$\left|\frac{(z-a_c)\varphi(z)}{B_m}\right| < 1$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 137, um resultado da fórma

$$\frac{1}{(z-a_c)^m f(z)} = P_1(z-a_c).$$

d'onde se tira

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a_c)^m P_1(z-a_c),$$

e a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é portanto nulla e regular no ponto a_c. Reciprocamente, se a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é nulla e regular no ponto a_c, temos

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a_c)^m [A_0 + A_1(z-a_c) + \ldots + A_m(z-a_c)^m + \ldots],$$

e portanto

$$f(z) = \frac{\left[1 + \frac{(z - a_c)\,\psi(z)}{A_0}\right]^{-}}{A_0 (z - a_c)^m}$$

pondo

$$\psi(z) = A_1 + A_2 (z - a_c) + \ldots$$

D'aqui tira-se, como no caso anterior, un
fórma

$$f(z) = \frac{P(z - a_c)}{(z - a_c)^m}$$

quando $\left|\frac{(z - a_c)\,\psi(z)}{A_0}\right| < 1$, ou ainda um resul

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - a_c)^m} + \frac{c_1}{(z - a_c)^{m-1}} -$$

$$+ \frac{c_{m-1}}{z - a_c} + P_1 (z - a_c) \, ;$$

o ponto a_c é pois um pólo da funcção $f(z)$.

151. — Assim como acontece com as funcç
as funcções que estamos estudando são suscep
decomposição que torna explicitos os pólos e os
ciaes da funcção. Esta propriedade importante
pelo sr. Weierstrass no caso de ser finito o nu
tos singulares da funcção, foi em seguida ester
Mittag-Leffler ao caso de a funcção conter um n
de pólos ou pontos essenciaes. Antes porém de
bello e importante theorema devido ao sabio pro
versidade de Stockholm, vamos considerar o ca
cot z cuja decomposição se obtem de um modo
e dá origem a algumas formulas importantes.

A formula (n.° 144)

$$\text{sen}\, z = z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2}\right)$$

dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2}\right)$$

e, derivando relativamente a z (n.° 140).

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2 \pi^2}$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right).$$

Esta formula dá a decomposição de $\cot z$ em fracções simples que tornam explicitos os pólos $0, +\pi, -\pi, +2\pi, \ldots, +c\pi, \ldots$ da funcção.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias importantes:

I — Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima formula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2 \pi^2} + \frac{z^2}{c^4 \pi^4} + \frac{z^4}{c^6 \pi^6} + \ldots\right)$$

quando é (n.° 132) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.° 132,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2 S_2}{\pi^2} z - \frac{2 S_4}{\pi^4} z^3 - \frac{2 S_6}{\pi^6} z^5 - \ldots$$

pondo

$$S_2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c_2}, \quad S_4 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c^4}, \text{ etc.}$$

Esta formula dá o desenvolvimento de $\cot z$ em série ordenada segundo as potencias de z, e vê-se que este desenvolvimento tem logar quando é $|z| < \pi$.

II — Por ser

$$z \cot z = \frac{iz\left(e^{2iz} + 1\right)}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

vem (n.º 81, V)

$$\left(\frac{d \,.\, z \cot z}{dz}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^n \,.\, z \cot z}{dz^n}\right) = (-1)^{\frac{n}{2} - 1} (2\,i)^n B_{n-1} \,,$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e temos portanto tambem, applicando a formula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2\,!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4\,!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6\,!} z^6 - \ldots$$

Igualando os coefficientes das potencias de grão $2m - 1$ de z nos dous desenvolvimentos de cot z que vimos de obter, resulta a relação importante:

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)\,!} = S_{2m} \,.$$

III — Do desenvolvimento de cot z que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento de tang z, de sec z e de cosec z em série ordenada segundo as potencias de z, desenvolvendo os segundos membros das formulas conhecidas:

$$\text{tang } z = \cot z - 2 \cot 2z$$

$$\text{cosec } z = \cot z + \tan \tfrac{1}{2} z$$

$$\sec z = \text{tang } z \text{ cosec } z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira funcção são susceptiveis d'este desenvolvimento quando é $| z | < \frac{\pi}{2}$, e a segunda quando é $| z | < \pi$.

152. — *Theorema de Mittag-Leffler. — Dadas as quantidades* a_1, a_2, ..., a_c, ... *que satisfaçam á condição* $\lim_{c=\infty} | a_c | = \infty$, *e dadas as funcções de* $\frac{1}{z - a_c}$

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\ G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right),\ \ldots,\ G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right),\ \ldots$$

que são da fórma

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = A_1\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + A_2\left(\frac{1}{z-a_c}\right)^2 + \ldots,$$

é sempre possivel formar uma funcção $f_c(z)$ da fórma

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

que seja regular em todos os pontos do plano differentes de a_1, a_2, ..., a_c, ... e que na vesinhança d'estes pontos se possa pôr debaixo da fórma

$$f(z) = P(z-a_c) + G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right).$$

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano excepto nos pontos a_1, a_2, ..., a_c, ..., que são pólos ou pontos singulares essenciaes e que satisfazem á condição $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, póde ser reduzida á fórma

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z (*).

Por ser uniformemente convergente a série

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} - \frac{A_2}{a_c^2}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} + \ldots$$

quando z é differente de a_c, e por ser cada termo d'esta série susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, teremos em virtude do theorema do n.° 137

(*) *Mittag-Lefler: Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes etc.* (*Acta Mathematica* — tomo IV).

$$(A) \qquad G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Consideremos agora, como no n.º 145, uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valôr tão grande que seja

$$(B) \qquad \left|\sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k\right| < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valôr que se attribua a z que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < |\varepsilon| < 1$, o que é sempre possivel por ser uniformemente convergente a série anterior na região do plano determinada pela condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z),$$

pondo

$$F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

satisfará ás condições do theorema enunciado, isto é, representará a funcção $f_1(z)$ como vamos vêr.

Seja z_0 um ponto do plano differente dos pontos a_1, a_2, etc., e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, e por ser convergente a série $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c um valôr tão grande que as desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{<} \rho$, qualquer que seja p e por mais pequeno que seja o valôr que se dê a δ.

D'estas desigualdades e da desigulddade (B) conclue-se que a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_t+1}^{\infty} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} | F_t(z) | < \delta$$

será tambem satisfeita pelos valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{<} \rho$.

Logo a série

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

é uniformemente convergente na região definida pela condição $| z - z_0 | \overline{<} \rho$.

Posto isto, como z_0 é differente de a_c, supponhamos que se dá a ρ um valôr tão pequeno que seja

$$| z - z_0 | < | z_0 - a_c | .$$

O segundo membro da igualdade

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \frac{A_1}{z_0 - a_c}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1}$$

$$+ \frac{A_2}{(z_0 - a_c)^2}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-2} + \dots$$

é susceptivel (n.º 137) de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \overline{<} \rho$; logo o mesmo acontece

á funcção $F_c(z)$ e temos (n.º 137)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

A funcção $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0.

Consideremos agora um ponto singular a_j de funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valôr tão pequeno que na região determinada pela condição $|z - a_j| \overline{\overline{<}} \rho$ não exista outro ponto singular da funcção considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j, e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_2(z - a_j).$$

Os pontos singulares a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar são differentes de zero. Para que o ponto 0 seja um ponto singular da funcção, de modo que na vesinhança d'este ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z - z_0) + G_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

pondo

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = A_1\left(\frac{1}{z}\right) + A_2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots,$$

basta pôr

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.º 137) regular na vesinhança de qualquer ponto z_0 differente de 0; e na vesinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema do sr. Mittag-Leffler, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queremos formar.

Para demonstrar a segunda parte basta notar que a differença

$$f_1(z) - \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

não tem pontos singulares, e portanto é igual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

153. — *Quociente de duas funcções inteiras.* — Vimos já (n.º 142 — 7.º) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano excepto nos pontos que são raizes do denominador, que são pólos. A estas funcções é applicavel pois o theorema do sr. Mittag-Leffler, isto é, podem ser reduzidas á fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \varphi(z) + \sum_1^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right].$$

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$ que são pólos, é o quociente de duas funcções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2, etc. os expoentes dos factores $(z-a_1)^{n_1}$, $(z-a_2)^{n_2}$, etc. pelas quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desapparecer os pólos, e construindo por meio do theorema do sr. Weierstrass uma funcção inteira $\varphi_2(z)$ cujas raizes sejam a_1, a_2, etc. com os gráos de multiplicidade n_1, n_2, etc., o producto $f_1(z) \cdot \varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma funcção inteira $\varphi_1(z)$. Te-

mos pois

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

154. — *Determinação de m_c.* — Para se applicar o theorema do sr. Mittag-Laffler é necessario conhecer um valôr de m_c tal que a desigualdade (B) seja satisfeita. Para esse fim dá o sr. Weierstrass o processo seguinte.

Tome-se uma quantidade ε_0 comprehendida entre ε e 1 e determine-se uma quantidade g tal que para todos os valores de z que têem o módulo $\varepsilon_0 \mid a_c \mid$ seja

$$\left| G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) \right| \overline{\overline{<}}\, g;$$

será então (n.º 136 — 2.º)

$$| A_k^{(c)} | \overline{\overline{<}}\, g\varepsilon_0^{-k}$$

e portanto, quando $\left| \frac{z}{a_c} \right| < \varepsilon$,

$$\left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| \overline{\overline{<}}\, g \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^k$$

ou, por ser $\varepsilon_0 < \varepsilon$,

$$\left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| \overline{\overline{<}}\, \frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{m_c + 1}.$$

Logo pode-se tomar para m_c o mais pequeno valôr que satisfaz á desigualdade

$$\frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{m_c + 1} < \varepsilon_c.$$

INDICE

INTRODUCÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS IMAGINARIOS E REGRAS PARA O SEU CALCULO

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES DE ORDEM QUALQUER

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

NOTA

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros constituem os numeros *racionaes*. O seu estudo foi o objecto principal da Arithmetica. Ahi foram definidos, assim como as operações a que se sugeitam, e ahi foram estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se lettras que os representavam, e definiram-se as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.º — *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação d'estes numeros cujas leis fundamentaes são:

$$1) \quad a + b = b + a$$

$$2) \quad (a + b) + c = (a + c) + b$$

$$3) \quad a + 0 = a;$$

2.º — *Subtracção* é a operação inversa da somma.

3.º — *Multiplicação* é a combinação dos numeros representados pelas lettras a e b, caracterisada pelas leis:

$$1)\quad ab = ba$$

$$2)\quad (ab)\,c = (ac)\,b$$

$$3)\quad (a + b)\,c = ac + bc$$

$$4)\quad a \times 0 = 0,\ a \times 1 = a.$$

4.º — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º — *Elevação a potencias* é a multiplicação de factores iguaes.

6.º — *Extracção da raiz* é a operação inversa da elevação a potencias.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de vêr que todo o calculo arithmetico é fundado nas leis fundamentaes precedentes, e nas leis fundamentaes da transformação das igualdades:

1) Se fôr $a = b$, será $b = a$

2) Se fôr $a = b$ e $a = c$, será $b = c$

3) Se fôr $a = b$ e $c = d$, será $ac = bd$, etc.

Duas das operações precedentes, isto é, a subtracção e a extracção de raiz não são sempre possiveis usando dos numeros considerados na Arithmetica. Para não termos porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novos numeros mais geraes do que os precedentes e definem-se as suas operações de modo que os resultados a que levem sejam applicaveis áquelles. E' o que vamos vêr.

Theoria dos numeros irracionaes (*)

2. — **I** — Os numeros irracionaes apparecem primeiro na Algebra pela consideração dos radicaes. Com effeito, por não ser sempre possivel a operação $\sqrt[n]{b}$ empregando os numeros racionaes, somos levados a considerar o signal $a + \sqrt[n]{b}$ como representando numeros de uma nova especie, que contém os numeros racionaes quando é $b = 0$, e que quando b é differente de zero tomam o nome de numeros *irracionaes*.

Para sugeitar estes numeros ao calculo torna-se necessario definir as suas operações de modo que subsistam as propriedades fundamentaes enunciadas no n.º precedente. Só d'este modo serão os resultados a que se chega por meio d'estes numeros, applicaveis ao caso particular dos numeros racionaes.

1.º — Dous numeros irracionaes $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ dizem-se iguaes quando é $a = c$ e $b = d$.

2.º — Chama-se *addição* dos dous numeros $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ a operação determinada pela igualdade

$$(a + \sqrt[n]{b}) + (c + \sqrt[n]{d}) = a + c + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{d}\,.$$

3.º — Chama-se *multiplicação* dos dous numeros $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ a operação determinada pela igualdade

$$(a + \sqrt[n]{b})\,(c + \sqrt[n]{d}) = ac + a\sqrt[n]{d} + c\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{bd}\,.$$

(*) Consultem-se a respeito da theoria dos numeros irracionaes as obras seguintes:

Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen (Brunswick, 1872).
Heine: Die Elemente der Functionenlehre (*Jornal de Crelle*, t. 74).
Tannery: Introduction à la theorie des fonctions, (Paris, 1886).

4.° — Chama-se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

E' facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades enunciadas no n.° 1, e que dão origem ás regras relativas ao calculo dos radicaes conhecidas dos Elementos d'Algebra.

Os numeros irracionaes appareceram tambem na Geometria Elementar debaixo de um ponto de vista mais geral do que o procedente, como limites de uma série de numeros racionaes. E' debaixo d'este ponto de vista que vamos agora estudal-os.

II — Diz-se que um numero racional, variavel e crescente u_n cujos valores successivos são u_1, u_2. etc., tende para um *limite* racional a quando n augmenta indefinidamente, se os numeros u_1, u_2, etc. se approximam successivamente de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valôr n_1 de n tal que seja (em valôr absoluto)

$$u_n - a < \delta$$

quando $n > n_1$.

Se o numero racional u_n crescer á medida que n augmenta, sem todavia poder jámais exceder um numero racional determinado, e não tender para um limite racional, diz-se, por definição, que tende para um *numero irracional* (que representaremos por lim u_n) maior do que qualquer dos numeros racionaes u_n ou inferiores a u_n e menor do que qualquer dos outros.

E' evidente que a definição precedente comprehende os numeros irracionaes a que se foi conduzido nos Elementos pela extracção das raizes.

Dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_n dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que um são tambem do que o outro. E' evidente que a igualdade assim definida goza das propriedades fundamentaes das igualdades enunciadas no n.° 1.

Diz-se que lim u_n é maior do que lim v_m quando existe algum numero racional maior do que lim v_m, e menor do que lim u_n.

Definamos agora as operações sobre numeros irracionaes.

1.° — Chama-se *addição* de dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_m a operação que tem por fim determinar o numero racional ou irracional para que tende a somma $u_n + v_m$ quando n e m augmentam indefinidamente.

Para justificar esta definição, notemos primeiro que por serem, por hypothese, u_n e v_m menores do que dous numeros determinados, a somma $u_n + v_m$ será tambem menor do que um numero determinado igual á somma d'estes; logo a somma $u_n + v_m$ tende para um numero racional ou irracional.

Notemos em seguida que este limite é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como n e m augmentem. Com effeito, se c e c' fossem dous numeros correspondentes a dous modos differentes de crescimento de n e m, e considerassemos um terceiro numero c'' definido por todos os numeros racionaes que definem c e c', todos os numeros racionaes inferiores a c e c' seriam evidentemente inferiores a c'', e portanto seria $c = c''$ e $c' = c''$, d'onde $c = c'$.

Notemos finalmente que a somma de numeros irracionaes, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.° 1, como é facil de vêr.

2.° — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição; isto é, a operação que tem por fim, sendo dado a somma lim u_n de dous numeros e uma parcella lim v_m, achar a outra lim w_t.

3.° — Chama-se *multiplicação* de dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_m a operação que tem por fim achar o numero racional ou irracional para que tende o producto $u^n v_m$ quando n e m augmentam indefinidamente.

Justifica-se esta operação exactamente do mesmo modo que se justificou a operação da somma.

5.° — Chama-se *divisão* a operação inversa da multiplicação.

III — Consideremos agora a série de numeros racionaes ou irracionaes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, que augmentam, diminuem ou oscillam indefinidamente quando n augmenta. Diz-se n'este caso que u_n tende para um limite racional ou irracional a, quando n augmenta indefinidamente, se os numeros u_1, u_2, etc. se approximam de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valor n_1 de n tal que seja (em valôr absoluto)

$$u_n - a < \delta$$

quando $n > n_1$.

Para conhecer quando u_n tende para um limite, emprega-se o theorema seguinte devido a Cauchy:

E' condição necessaria e sufficiente para que u_n tenda para um limite quando n augmenta indefinidamente, que, a cada valôr dado a δ, por mais pequeno que seja, corres-

ponda um valôr n_1 de n tal que a desigualdade

$$(1) \qquad u_{n+p} - u_n < \delta$$

seja satisfeita (em valôr absoluto) pelos valares de n superiores a n_1 qualquer que seja p.

Com effeito, se u_n tende para um limite a, a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr n_1 de n tal que as desigualdades (em valôr absoluto)

$$u_{n+p} - a < \tfrac{1}{2}\delta.\ u_n - a < \tfrac{1}{2}\delta$$

serão satisfeitas quando $n > n_1$. Logo tambem será satisfeita pelos mesmos valores de n e p a desigualdade (1), visto que o valór absoluto da differença $u_{n+p} - u_n$ é menor do que a somma dos valores absolutos de $u_{n+p} - a$ e $u_n - a$.

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desigualdade (1) tem logar, u_n tende para um numero racional ou irracional (*).

Dê-se a δ um valôr particular δ_1, e chame-se a o valôr correspondente de n e α_1 um qualquer dos valores de u_{a+p}. Por ser

$$u_{a+p} - \alpha_1 < \delta_1,\ u_a - \alpha_1 < \delta_1,$$

os numeros u_{a+p} estão comprehendidos entre $\alpha_1 - 2\delta$ e $\alpha_1 + 2\delta$, e *á fortiori* entre $\alpha_1 - 4\delta$ e $\alpha_1 + 4\delta$.

Dê-se em seguida a b o valôr δ_2 menor do que $\frac{\delta_1}{2}$, e chame-se $b < a$ o valôr correspondente de n e α_2 um qualquer dos valores de u_{b+p}. Os numeros u_{b+p} estão comprehendidos entre $\alpha_2 - 2\delta_2$ e $\alpha_2 + 2\delta_2$, e, como α_2 está comprehendido entre $\alpha_1 - 2\delta_1$ e $\alpha_1 + 2\delta_1$, $\alpha_2 - 2\delta_2$ e $\alpha_2 + 2\delta_2$ estão comprehendidos entre $\alpha_1 - 3\delta_1$ e $\alpha_1 + 3\delta_1$ e portanto entre $\alpha_1 - 4\delta_1$ e $\alpha_1 + 4\delta_1$.

Continuando do mesmo modo, formam-se duas séries, uma de numeros crescentes

$$\alpha_1 - 4\delta_1,\ \alpha_2 - 4\delta_2,\ \ldots,\ \alpha_i - 4\delta_i,\ \ldots$$

e outra de numeros decrescentes

(*) *Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* Pisa, 1878.

$$\alpha_1 + 4\delta_1, \alpha_2 + 4\delta_2, \ldots, \alpha_i + 4\delta_i, \ldots,$$

e os numeros $u_{n_i + p}$ estão comprehendidos entre os numeros $\alpha_i - 4\delta_i$ e $\alpha_i + 4\delta_i$, cuja differença tende para zero á medida que i augmenta.

Seja agora

$$v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots$$

a serie de numeros crescentes que se forma tomando um numero racional entre cada par de numeros da primeira das series precedentes; e seja

$$w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots$$

a serie corresponde relativa á segunda. Os numeros $u_{n_i + p}$ estão comprehendidos entre os numeros v_i e w_{i+1}, cuja differença tende para zero á medida que i augmenta. A primeira série tende para um numero racional ou irracional c á medida que i augmenta, e como a differença entre $u_{n_i + p}$ e v_i tende para zero, os numeros $u_{n_i + p}$ tendem tambem para c quando i augmenta.

Corollario. — *Se u_n diminue ou augmenta sempre quando n augmenta, u_n tende para um numero racional ou irracional.*

Com effeito, quando u_n diminue, se u_1, u_2, etc. não tendessem para um numero racional ou irracional, haveria sempre um valôr de δ e de p tal que o valôr absoluto da differença $u_{n+p} - u_n$, isto é $u_n - u_{n+p}$, seria maior do que δ, por maior que fosse n. Teriamos pois

$$u_n - u_{n+p} > \delta, \; u_{n+p} - u_{n+2p} > \delta, \ldots,$$

e portanto

$$u_n - u_{n+kp} > k\delta,$$

d'onde se se concluiria que u_{n+kp} tende para $-\infty$ quando k tende para ∞, o que é contrario á hypothese.

Do mesmo modo se considera o caso em que u_n augmenta.

3. — *Representação geometrica dos numeros irracionaes.* — Sabe-se pelos Elementos de Geometria que toda a re-

cta póde ser representada por um numero racional ou irracional, tomando outra recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional póde ser representado por uma recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de de um ponto A, todos os numeros racionaes menores do que os numeros u_n, que entram na definição do numero irracional lim u_n, obtem-se uma série de pontos que representaremos por M. Do mesmo modo os numeros maiores do que u_n darão outra série de pontos que representaremos por N. Por ser sempre $AN > AM$, as duas séries de pontos estão separadas por um ponto k, e a distancia Ak representa o numero irracional considerado.

Ás operações sobre numeros racionaes e irracionaes correspondem combinações de rectas, isto é, operações geometricas assim definidas:

1.° — Addição de duas rectas dadas é a operação que tem por fim procurar a recta que resulta de collocar uma das rectas dadas adiante da outra de modo que uma principie onde a outra termina.

2.° — Multiplicação de duas rectas é a operação que tem por fim procurar a recta que é quarta proporcional entre as rectas dadas (meios) e a unidade (extremo).

3.° — Chama-se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

E' facil de vêr, com effeito, que as operações que vimos de definir gozam das propriedades fundamentaes expostas no n.° 1, e portanto que a estas combinações é applicavel o calculo arithmetico.

4. — *Potencias irracionaes dos numeros.* — E' bem conhecida desde os Elementos de Algebra a significação do signal a^u quando u representa um numero racional inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo, e viu-se que em todos estes casos tem logar a igualdade fundamental

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Resta definir este mesmo signal quando u é um numero irracional. Seja primeiro a maior do que a unidade e sejam u_1, u_2, ... u_n, ... os numeros crescentes com n, mas inferiores a um numero α, que determinam o numero irracional $u = \lim u_n$. Os numeros a^{u_1}, a^{u_2}, ..., a^{u_n}, ... crescem tambem quando n augmenta, sem poderem todavia exceder o numero a^{α}. Tendem pois para um numero irracional lim a^{u_n}

que tomaremos para definição do signal a^u. E' facil de vêr que a igualdade fundamental das potencias tem logar no caso das potencias irracionaes; pois que, sendo $v = \lim v_n$ outro nnmero irracional, temos

$$a^u \,.\, a^v = \lim (a^{u_n} \,.\, a^{v_n}) = \lim a^{u_n + v_n}$$

$$= a^{\lim (u_n + v_n)} = a^{u + v} .$$

Quando é $a < 1$, póde pôr-se $a = \frac{1}{a'}$ onde é $a' > 1$, e temos a igualdade $a^u = \frac{1}{a'^u}$ que define a^u.

Nota. — A respeito de a^u faremos ainda a observação seguinte, de que teremos de fazer uzo: *Quando u tende para o limite zero, a^u tende para a unidade.*

Seja $a > 1$, unico caso que nos importa considerar. Se u fôr positivo, ponhamos $u \leqq \frac{1}{m}$, m representando um numero inteiro que tende para o infinito quando u tende para zero. Da desigualdade

$$\left(1 + \frac{a - 1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \binom{m}{2}\left(\frac{a - 1}{m}\right)^2 + \ldots > a$$

ou

$$a^u - 1 = a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a - 1}{m}$$

tira-se que $a^u - 1$ tende para zero quando u tende para zero, visto ser $a^u > 1$ e $\frac{a - 1}{m}$ tender para zero quando m tende para o infinito.

Quando u é negativo ponhamos $u = - y$, o que dá a igualdade

$$a^u - 1 = - \frac{a^y - 1}{a^y},$$

do qual se tira ainda o principio enunciado.

III

Numeros negativos e numeros imaginarios

5. — *Numeros negativos.* — Consideremos a differença $a - b$ entre dous numeros a e b. Se fôr $b > a$, a subtração precedente é impossivel empregando os numeros até aqui estudados. Considera-se porisso $a - b$ como definindo uma nova especie de numeros, a que se chama *numeros negativos.*

Definida assim esta especie de numeros, resta definir as operações a realisar com elles de modo que se sugeitem ás propriedades fundamentaes indicadas no n.° 1.

1.° — Dous numeros $a - b$ e $c - d$ dizem-se iguaes quando é

$$a + d = b + c .$$

2.° — Chama-se *addição* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

3.° — Chama-se *multiplicação* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (bc + ad).$$

E' muita facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.° 1, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

6. — **I** — *Numeros imaginarios.* — A extracção de raiz das quantidades negativas é uma operação impossivel usando dos numeros precedentemente estudados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros da fórma $a + b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos*, e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo é necessario definir as operações que sobre elles se devem executar de modo que se sugeitem ás leis fundamentaes expostas no n.° 1.

1.° — Dous numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ dizem-se *iguaes* quando é $a = c$, $b = d$.

Diz-se que o numero imaginario $a + b\sqrt{-1}$ é maior do que o numero imaginario $c + d\sqrt{-1}$ quando é $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$.

2.° — Chama-se *addição* dos numeros imaginarios dous $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = a + c + (b + d)\sqrt{-1}.$$

3.° — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição.

4.° — Chama-se *multiplicação* dos numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

5.° — Chama-se *divisão* do numero $a + b\sqrt{-1}$ pelo numero $c + d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é, a operação que tem por fim achar um numero $x + y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c + d\sqrt{-1}$ dê $a + b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a + b\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})$$

ou

$$a + b\sqrt{-1} = cx - dy + (dx + cy)\sqrt{-1},$$

d'onde se tira

$$a = cx - dy,$$

$$b = dx + cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}.$$

INDICE